Groupe de travail d'analyse ultramétrique

Thong Nguyen-Quang-Do

Résidu en s = 1 de certaines fonctions d'Iwasawa

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 11 (1983-1984), exp. nº 19, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1983-1984__11__A11_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
11e année, 1983/84, n° 19, 9 p.
26 mars 1984

RÉSIDU EN $s = 1$ DE CERTAINES FONCTIONS D'IWASAWA

par NGUYEN-QUANG-DO Thong (*)

0. Introduction.

Soient k une extension finie de $\underset{\sim}{Q}$, p un nombre premier (si $p = 2$, on suppose que k contient les racines 4e de 1), et S un ensemble fini de places de k contenant les places archimédiennes et les places divisant p . Au couple (k , S) on associe le pro-p-groupe $X_k^S = X_k$, qui est par définition le groupe de Galois de la pro-p-extension abélienne S-ramifiée (i. e. non ramifiée hors de S) maximale de k . Un certain nombre de propriétés arithmétiques importantes de k se reflètent dans la structure de X_k : ainsi, la valeur du $\underset{\sim}{Z}_p$-rang de X_k est donnée par la conjecture de Leopoldt pour k et S (à savoir, $\text{rang}_{\underset{\sim}{Z}_p} X_k = 1 + r_2$, r_2 = nombre de places complexes de k), tandis que l'ordre de T_k , le sous-groupe de torsion de X_k , est relié au résidu en $s = 1$ de la fonction zêta p-adique de k (quand k est réel) [2]. Comme l'a fait remarquer G. GRAS [4], la notion de S-ramification n'est pas une généralisation de la non-ramification, mais plutôt une notion "duale". Le théorème principal que nous montrons ci-dessous (théorème 1) précise cette notion de dualité, en même temps qu'il nous permet de relier les points de vue précédents (conjecture de Leopoldt, fonction ζ_p) à la théorie d'Iwasawa, suivant COATES ([2], p. 269-353).

Nous adopterons les notations suivantes :

- S = ensemble fini de places de k contenant les places archimédiennes et les places de k divisant p ;
- Σ = ensemble des places non archimédiennes de S ;
- k_S = extension S-ramifiée maximale de k ;
- $k_S(p)$ = pro-p-extension S-ramifiée maximale de k ;
- $\mathcal{G}_k^S = \mathcal{G}_k = \text{Gal}(k_S/k)$ et $G_k^S = G_k = \text{Gal}(k_S(p)/k)$ (donc G_k est le plus grand quotient de $\mathcal{G}_k$ qui soit un pro-p-groupe) ;
- $X_k^S = X_k = G_k^{ab}$ (l'abélianisé de G_k) ;
- T_k = le sous-groupe de $\underset{\sim}{Z}_p$-torsion de X_k .

On sait que X_k est un $\underset{\sim}{Z}_p$-module de type fini, donc T_k est un p-groupe fini.

De façon générale, pour tout $\underset{\sim}{Z}_p$-module X , on pose

---

(*) NGUYEN-QUANG-DO Thong, Mathématiques, Université Paris-7, 2 place Jussieu, 75251 PARIS CEDEX 05.

$$\rho(X) = \mathbb{Z}_p\text{-rang de } X = \dim_{\mathbb{Q}_p} X \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p .$$

On sait que $1 + r_2 \leqslant \rho(X) \leqslant \{k : \mathbb{Q}\}$, où r_2 est le nombre de places complexes de k, et la conjecture de Leopoldt (sous entendu pour k et S) dit que $\rho(X_k) = 1 + r_2$, ce qui équivaut à $H^2(G_k , \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0$ (voir par exemple [10]). On s'interesse maintenant à la structure de T_k.

1. T_k et modules d'Iwasawa.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit μ_{p^n} le groupe des racines p^n-ièmes de l'unité. On pose

$$\mu_{p^\infty} = \bigcup_{n\geq 1} \mu_{p^n} \quad \text{et} \quad \mu(k) = \mu_{p^\infty} \cap k^x .$$

On associe à k les extensions $K = k(\mu_p)$ et $k_\infty = k(\mu_{p^\infty})$. On note

$$G_\infty = \mathrm{Gal}(K_\infty/k) \quad \text{et} \quad \Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K) .$$

On introduit les modules d'Iwasawa suivants : soit L_∞ la pro-p-extension abélienne non ramifiée, décomposant les places de S, maximale, de K_∞. On pose $X_\infty = \mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)$ et $A_\infty = \mathrm{Hom}(X_\infty , \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ (le dual de Pontrjagin de X_∞).

Pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$, on note $A_\infty(i)$ le "i-twist" de Tate de A_∞.

THÉORÈME 1. - Supposons que k vérifie la conjecture de Leopoldt. On a une suite exacte

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow \mu(k) \longrightarrow \prod_{v\in\Sigma} \mu(k_v) \longrightarrow T_k \longrightarrow A_\infty(1)^{G_\infty} \longrightarrow 0$$

(k_v désigne le complété v-adique).

Remarques.

(i) X_∞ est la limite projective des p-groupes de S-classes d'ideaux $Cl_S(L)$ des sous-extensions finies L de K_∞/K, donc $Cl_S(k)$ est relié à $(X_\infty)_{G_\infty}$ (le plus grand quotient de X_∞ sur lequel G_∞ opère trivialement) par la théorie classique d'Iwasawa. Par suite, $A_\infty(1)^{G_\infty}$ est relié à un "twist" du dual de $Cl_S(k)$, ce qui "explique" la notion de dualité évoquée plus haut.

(ii) Si k contient μ_{p^n}, le théorème 1 permet de décrire le sous-groupe de p^n-torsion $T_k(p^n)$ par une suite exacte

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow \prod_{v\in\Sigma-\{v_0\}} \mu_{p^n} \longrightarrow T_k(p^n) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Cl_S(k) , \mu_{p^n}) \longrightarrow 0 .$$

Le résultat est bien connu des K-théoriciens (voir par exemple [7], 2.1) ; voir aussi le § 3).

<u>Preuve du théorème.</u>

(a) Considérons la suite exacte de G_k-modules (avec action triviale)

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^n}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \xrightarrow{p^n} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow 0 \ .$$

Puisque $H^2(G_k\ ,\ \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}) = 0$ (k vérifie la conjecture de Leopoldt), la suite exacte de cohomologie s'écrit

$$H^1(G_k\ ,\ \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{p^n} H^1(G_k\ ,\ \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^2(G_k\ ,\ \mathbb{Z}_{p^n}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

d'où par dualité

$$H^2(G_k\ ,\ \mathbb{Z}_{p^n}/\mathbb{Z})^* \simeq \mathrm{Ker}(X_k \xrightarrow{p^n} X_k) \quad (\ * \ \text{désigne le dual de Pontrjagin}).$$

En prenant n suffisamment grand, on obtient donc

$$H^2(G_k\ ,\ \mathbb{Z}_{p^n}/\mathbb{Z})^* \simeq T_k \ .$$

Le problème consiste maintenant à décrire le groupe $H^2(G_k\ ,\ \mathbb{Z}_{p^n}/\mathbb{Z})^*$.

(b) On sait ([5], 6.22) que $H^2(G_k\ ,\ \mathbb{Z}_{p^n}/\mathbb{Z}) = H^2(\mathcal{G}_k\ ,\ \mathbb{Z}_{p^n}/\mathbb{Z})$, et ce dernier groupe prend place dans la suite exacte de Poitou-Tate ([5], 1.3)

$$\begin{aligned}
&0 \to H^0(\mathcal{G}_k,\mu_{p^n}) \to \prod_{v\in\Sigma} H^0(\mathcal{G}_v,\mu_{p^n}) \prod_{v\in S-\Sigma} H^0(\mathcal{G}_v,\mu_{p^n}) \to H^2(\mathcal{G}_k,\mathbb{Z}_{p^n}/\mathbb{Z})^* \to H^1(\mathcal{G}_k,\mu_{p^n}) \longrightarrow \prod_{v\in S} H^1(\mathcal{G}_v,\mu_{p^n}) \\
&0 \leftarrow H^0(\mathcal{G}_k,\mathbb{Z}_{p^n}/\mathbb{Z})^* \leftarrow \coprod_{v\in S} H^2(\mathcal{G}_v,\mu_{p^n}) \leftarrow H^2(\mathcal{G}_k,\mu_{p^n}) \leftarrow H^1(\mathcal{G}_k,\mathbb{Z}_{p^n}/\mathbb{Z})^* \longleftarrow \prod_{v\in S} H^1(\mathcal{G}_v,\mu_{p^n})
\end{aligned}$$

(on remarquera que les lignes parallèles sont duales).

La première ligne nous donne, pour $n \gg 0$, la suite exacte,

$$0 \longrightarrow \mu(k) \longrightarrow \prod_{v\in\Sigma} \mu(k_v) \longrightarrow T_k \longrightarrow \mathrm{Ker}^1_S(\mu_{p^n}) \longrightarrow 0 \ ,$$

où $\mathrm{Ker}^1_S(\mu_{p^n})$ désigne le noyau de $H^1(\mathcal{G}_k\ ,\ \mu_{p^n}) \longrightarrow \prod_{v\in\Sigma} H^1(\mathcal{G}_v\ ,\ \mu_{p^n})$.

Pour tous entiers $m \geqslant n$, on a des homomorphismes naturels $\mathrm{Ker}^1_S(\mu_{p^n}) \to \mathrm{Ker}^1_S(\mu_{p^m})$. Comme T_k est fini, la suite exacte précédente montre que <u>les</u> $\mathrm{Ker}^1_S(\mu_{p^n})$ <u>sont finis et se stabilisent à partir d'un certain rang</u>. Donc, en posant

$$\mathrm{Ker}^1_S(\mu_{p^\infty}) = \varinjlim \mathrm{Ker}^1_S(\mu_{p^n}) \ ,$$

on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mu(k) \longrightarrow \prod_{v\in\Sigma} \mu(k_v) \longrightarrow T_k \longrightarrow \mathrm{Ker}^1_S(\mu_{p^\infty}) \longrightarrow 0 \ .$$

(c) Il reste à identifier ce dernier groupe $\mathrm{Ker}^1_S(\mu_{p^\infty})$. D'abord quelques notations.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, posons $\mathrm{Ker}_S^1(\mu_{p^n}) = V_n(k)$. On voit facilement que

$$V_n(k) = \{x \in k \ ; \ x \in k_v^{x p^n} \ , \ \forall\, v \in \Sigma \ , \ x \in U_v\, k_v^{x p^n} \ , \ \forall\, v \notin \Sigma\}/k^{x p^n}$$

(ici, U_v désigne les unités locales, avec la convention que $k_v^x = U_v$ si v est une place archimédienne), et $V_n(k) \simeq \mathrm{Hom}((\mathrm{Cl}_S(k) , \mu_{p^n})$ si $\mu_{p^n} \subset k^x$.

Soit alors $K_n = k(\mu_{p^n})$, $n \geqslant 1$, la tour habituelle des sous-extensions de K_∞/K. Posons $G_n = \mathrm{Gal}(K_n/k)$.

LEMME 1. - <u>Pour tout entier</u> $n \geqslant 1$, <u>on a</u> $V_n(k) \simeq V_n(K_n)^{G_n}$.

<u>Preuve</u>. - Cela résulte immédiatement des définitions et de la trivialité cohomologique, bien connue du G_n-module μ_{p^n} ([5], 7.1).

Par passage à la limite, on obtient $\mathrm{Ker}_S^1(\mu_{p^\infty}) \simeq \mathrm{Hom}(X^\infty , \mu_{p^\infty})^{G_\infty}$, ce qui termine la démonstration du théorème.

Q. E. D.

Notons qu'en passant, on a également démontré la suite exacte (2) de la remarque (i). Le théorème 1 permet de retrouver facilement un certain nombre de résultats connus.

COROLLAIRE 1 (GILLARD [3], MIKI [8]). - <u>Supposons</u> $\mu_p \subset k^*$. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u>.

(i) $T_k \simeq \prod_{v\in\Sigma} \mu(k_v)/\mu(k)$,

(ii) $A_\infty = (0)$, <u>c'est-à-dire</u> $L_\infty = K_\infty$,

(iii) <u>pour tout entier</u> n , $\mathrm{Cl}_S(K_n) = (0)$,

(iv) <u>pour tous entiers</u> m <u>et</u> n , $V_m(K_n) = (0)$.

<u>Preuve</u>. - $A_\infty = 0 \iff A_\infty(1) = 0 \iff A_\infty(1)^\Gamma = 0$ (car A_∞ est une limite inductive de p-groupes, et Γ est un pro-p-groupe). Le reste de la démonstration est immédiat, compte tenu des suites exactes (1), (2) et du lemme 1.

Q. E. D.

COROLLAIRE 2 (comparer à [9], proposition 11, et rapprocher des critères de nullité du nombre de classes). - <u>Supposons</u> $\mu_p \subset k^x$. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u>.

(i) $T_k = (0)$,

(ii) $|\Sigma| = 1$ et $A_\infty = (0)$,

(iii) $|\Sigma| = 1$ et $\mathrm{Cl}_S(k) = 0$,

(iv) <u>le pro-p-groupe</u> G_k <u>est libre</u>,

(v) $T_L = (0)$ pour toute extension finie L/k contenue dans k_S .

Preuve. - C'est immédiat, compte tenu des suites exactes (1) et (2). L'implication (i) ==> (v) résulte du fait que tout sous-groupe fermé d'une pro-p-groupe libre est libre

Q. E. D.

PROPOSITION 1 :

Soit L/k une extension galoisienne finie contenue dans $k(p)$, de groupe de Galois G . Supposons que L (donc aussi k) vérifie la conjecture de Leopoldt. Alors l'isomorphisme de transfert $X_k \to X_L$ induit un isomorphisme $T_k \xrightarrow{\sim} (T_L)^G$

Preuve. - On sait que $\mathrm{cd}\, G_k \leqslant 2$, donc aussi $\mathrm{cd}\, G_L \leqslant 2$. Soit D le module dualisant de G_k ; c'est aussi le module dualisant de G_L , puisque G_L est d'indice fini dans G_k ([11], I-29). Par définition du module dualisant, on a des isomorphismes fonctoriels

$$H^2(G_k , \mathbb{Z}_{p^n}/\mathbb{Z})^* \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{p^n}/\mathbb{Z} , D)^{G_k} \quad \text{et} \quad H^2(G_L , \mathbb{Z}_{p^n}/\mathbb{Z})^* \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{p^n}/\mathbb{Z} , D)^{G_L} .$$

Mais l'hypothèse de Leopoldt entraîne que

$$H^2(G_k , \mathbb{Z}_{p^n}/\mathbb{Z})^* \simeq T_k \quad \text{et} \quad H^2(G_L , \mathbb{Z}_{p^n}/\mathbb{Z})^* \simeq T_L \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

La proposition en résulte.

Q. E. D.

Remarque. - L'hypothèse de S-ramification imposée à l'extension L/k n'est pas une hypothèse restrictive. Si elle n'est pas vérifiée, il n'y a qu'à considérer l'ensemble fini de places $\mathcal{S}$, formé de S et des places de k qui se ramifient dans L/k / La relation entre G_k^S et $G_k^{\mathcal{S}}$ est donnée par le théorème d'Olaf NEUMANN ([2], p. 625-647), qui est l'analogue pour les corps de nombres du théorème d'existence de Riemann.

"Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k_{\mathcal{S}}(p)/k_S(p))$ est un pro-p-produit libre $*_{v\in\mathcal{S}-\Sigma}\, I(v)$ où $I(v)$ est le sous-groupe engendré par les groupes d'inertie I_w , $w|v$. Le groupe d'inertie I_w est isomorphe à $\mathbb{Z}_p$ si $Nv \equiv 1 \pmod p$, et trivial sinon".

En utilisant ce théorème et la proposition 1, on retrouve sans difficulté un certain nombre de résultats de G. GRAS [4] reliant les groupes T_k et $(T_L)^G$. Nous n'entrons pas dans les détails.

Pour finir, énonçons un résultat sur les modules d'Iwasawa, qui s'obtient par passage à la limite sur la suite exacte (1).

PROPOSITION 2. - Supposons que k contient μ_p et que la conjecture de Leopoldt soit vérifiée à tous les étages de la tour cyclotomique K_∞/k . Soit Y_∞ le groupe de Galois sur K_∞ de la pro-p-extension abélienne S-ramifiée de K_∞ , considéré comme module sur $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$.

On a une suite quasi exacte de Λ-modules.

$$0 \longrightarrow T(\mu_{p^\infty}) \longrightarrow \prod_{v\in\Sigma} T(\mu_{p^\infty}) \longrightarrow \mathrm{tor}_\Lambda\, Y_\infty \longrightarrow \alpha(X_\infty(-1)) \longrightarrow 0 ,$$

où $T(.)$ désigne le module de Tate et $\alpha(.)$ l'adjoint.

Notons qu'on trouve chez IWASAWA ([6], théorèmes 15 et 16) une suite exacte analogue, mais qui va en sens inverse (phénomène de dualité ?). On peut également obtenir des formules asymptotiques donnant l'ordre des T_{k_n} dans la tour cyclotomique. Nous n'entrons pas dans les détails.

2. T_k et fonctions p-adiques.

Dans toute cette section, on suppose que k est totalement réel. On suppose en outre que $p \neq 2$ et que Σ est l'ensemble des places de k divisant p . Alors $K = k(\mu_p)$ est un corps CM , et le groupe de Galois G_∞ de $K_\infty = k(\mu_{p^\infty})$ sur k se décompose : $G_\infty = \Gamma \times \Delta$, avec $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ et $\Delta = \mathrm{Gal}(K/k)$ (d'ordre premier à p). On note e_i les idempotents orthogonaux habituels de l'algèbre $\mathbb{Z}_p[\Delta]$. On introduit alors une fonction p-adique qui joue un rôle important dans la théorie d'Iwasawa.

Soit Z_∞ le groupe de Galois de la pro-p-extension abélienne non ramifiée maximale de K_∞ , et soit $B_\infty = Z_\infty^*$ son dual de Pontrjagin. Soit $g_i(T)$ la série caractéristique du Λ-module $\mathrm{Hom}(e_i\, B_\infty , \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ (i impair) et soit la nouvelle série $G_i(T) = g_i((1+T)^{-1} - 1)$ (i impair). Fixons un générateur topologique γ de Γ, et posons $u = \mathcal{K}(\gamma)$, où $\mathcal{K}$ est le caractère décrivant l'action de Γ sur μ_{p^∞} (remarquons que $u \in 1 + p\,\mathbb{Z}_p$). Nous appelons alors $Z_p(s)$ la fonction p-adique définie par : $s \in \mathbb{Z}_p \longmapsto G_1(u^s - 1)/(u^s - u)$.

THEOREME 2. - Supposons que le corps réel k vérifie la conjecture de Leopoldt. Alors $G_1(u-1) \sim \# T_k$ (le signe $\sim$ signifie l'égalité à une unité p-adique près).

Preuve. - Il suffit d'appliquer le théorème 1 et de calculer l'ordre de $(X_\infty^*(1))^{G_\infty}$

$$(X_\infty^*(1))^{G_\infty} = (X_\infty^*(1)^\Delta)^\Gamma = ((e_1\, X_\infty)(-1)^*)^\Gamma = (e_1\, X_\infty(-1)_\Gamma)^* .$$

Mais il est connu que $(e_i\, X_\infty)(-i)$ n'a pas de sous-module fini non nul pour i impair. Comme $(e_1\, X_\infty)(-1)_\Gamma$ est fini (par l'hypothèse de Leopoldt), un lemme classique ([2], COATES, App. p. 338-351) montre que $e_1\, X_\infty(-1)^\Gamma$ est nul et que l'ordre de $e_1\, X_\infty(-1)_\Gamma$ est égal à $f_1(u^{-1} - 1)$ à une unité p-adique près ($f_1(T)$ est la série caractéristique de $e_1\, X_\infty$). Or il est facile de relier $f_1(u^{-1} - 1)$ et $g_1(u^{-1} - 1)$. En utilisant par exemple [6], théorème 9, on a

$$g_1(u^{-1} - 1) \sim \prod_{v|p} \# \mu(k_v) . f_1(u^{-1} - 1)$$

Q. E. D.

COROLLAIRE ([2], théorème 1.3). - Le résidu de $Z_p(s)$ en $s = 1$ est égal à une unité p-adique près, à $\rho_p = (2^{d-1} h R_p/\sqrt{\Delta}) \prod_{v|p} (1 - (Nv)^{-1})$, où $d = [k : Q]$, Δ est la valeur absolue du discriminant, h le nombre de classes, R_p le régulateur p-adique.

Preuve. - La valeur de $\# T_k$ a été calculée par COATES dans [2] (App. p. 338-351). On a $\# T_k = \# \mu(k(\mu_p)) . \rho_p$. Dans la formule finale donnant le résidu, la quantité $\# \mu(k(\mu_p))$ disparaît, car le développement limité de $u^s - u$ commence par $(s - 1) u \log u$.

Q. E. D.

Remarques.

(i) Si k est abélien réel, on sait que k vérifie la conjecture de Leopoldt et que $\mathrm{res}_{s=1} \zeta_p(s) = \rho_p$ [2]. C'est une indication en faveur de la "conjecture principale" de la théorie d'Iwasawa (voir [2]).

(ii) Si l'on considère le corps CMK , les mêmes calculs que précédemment permettent d'exprimer l'ordre de T_K^- (le sous-groupe des éléments de torsion renversés par la conjugaison complexe) comme étant la valeur en $s = 1$ d'une fonction d'Iwasawa. Les résultats de G. GRAS ([4], théorème 4.2) donnent alors une "formule analytique" pour le nombre de classes h_K^- . Nous n'entrons pas dans les détails.

3. Relations avec K_2 .

Dans cette section, nous supposons que $\mu_p \subset k^\times$ et nous prenons pour Σ l'ensemble des places de k divisant p . La relation entre la p-ramification et la K--théorie est exprimée par un certain nombre de propriétés de dualité, dont notamment la "mauvaise dualité" (CARROLL-CANDIOTTI-KRAMER, voir [7]) entre T_k et $R_2\, k[p]$, la partie p-primaire du "noyau modéré" (pour une définition, voir [7]). Nous nous proposons d'éclaircir cette dualité.

PROPOSITION 3. - Supposons que $\mu_{p^n} \subset k^\times$. Alors

$$H^2(G_k , \underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z})(2) \simeq R_2\, k/p^n R_2\, k .$$

Autrement dit, on a une dualité parfaite.

$$H^2(G_k , \underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z})^* \times R_2\, k/p^n R_2\, k (- 1) \dashrightarrow \mu_{p^n} .$$

Preuve. - On a la suite exacte bien connue en K-théorie

$$0 \to (Cl_S(k)/p^n)(1) \to R_2\, k/p^n \to \prod_{v\in\Sigma} \mu(k_v)/p^n \to \mu(k)/p^n \to 0$$

(cette suite exacte est démontrée pour l'exposant p dans [7], § 2, mais la démonstration est la même pour l'exposant p^n). D'un autre côté, on a la suite exacte de localisation (voir démonstration du théorème (1)),

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}^2_S(\underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z}) \longrightarrow H^2(\mathcal{G}_k , \underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z}) \longrightarrow \prod_{v\in\Sigma} H^2(\mathcal{G}_v , \underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z}) \longrightarrow H^0(\mathcal{G}_k , \mu_{p^n})^* \longrightarrow 0$$

Or $H^2(\mathcal{G}_v , \underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z}) \simeq \mu_{p^n}(k_v)^*$ d'après la théorie locale, et $\mathrm{Ker}^2_S(\underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z})$ est dual de $\mathrm{Ker}^1_S(\mu_{p^n}) = \mathrm{Hom}(Cl_S(k) , \mu_{p^n})$, d'après POITOU-TATE. Il en résulte immédiatement la dualité cherchée $H^2(G_k , \underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z})^* \times R_2\, k/p^n R_2\, k \longrightarrow \mu_{p^n}$.

COROLLAIRE 1 ([7], théorème (2.1). - *Si k vérifie la conjecture de Leopoldt, on a une dualité parfaite.*

$$T_k(p^n) \times R_2\, k/p^n R_2\, k(-1) \longrightarrow \mu_{p^n} ,$$

où $T_k(p^n)$ est le sous-groupe des éléments de p^n-torsion.

Preuve. - Si k vérifie la conjecture de Leopoldt, $T_k(p^n) = H^2(G_k , \underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z})^*$ (voir la démonstration du théorème 1)

Q. E. D.

En passant à la limite dans la tour cyclotomoqie de k , on retrouve un résultat de dualité de COATES ([1], théorème 4).

COROLLAIRE 2 (on ne suppose pas que k vérifie la conjecture de Leopoldt). - *On a une dualité parfaite de Γ-modules*

$$\mathrm{tor}_\Lambda Y_\infty \times R_2\, K_\infty[p](-1) \longrightarrow \mu_{p^\infty} ,$$

(Rappelons que Y_∞ est le groupe de Galois sur K_∞ de la pro-p-extension S-ramifiée abélienne maximale de K_∞).

Preuve. - Soit (K_m) la tour habituelle des sous-extensions finies de K_∞/k . On sait que la $\underset{\sim}{Z}_p$-extension cyclotomique K_∞/k vérifie la conjecture faible de Leopoldt, c'est-à-dire que les défauts de la conjecture de Leopoldt pour les K_m sont bornés (voir [10]). On en déduit facilement que

$$\varinjlim_{m,\mathrm{res}^*} \varprojlim_n H^2(G_k , \underset{\sim}{Z}_{p^n}/\underset{\sim}{Z})^* \simeq \varprojlim_m \varprojlim_n T_k(p^n) \simeq \mathrm{tor}_\Lambda Y_\infty .$$

Q. E. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] COATES (John). - On K_2 and some classical conjectures in algebraic number theory, Annals of Math., Series 2, t. 95, 1972, p. 99-116.

[2] FRÖHLICH (A.) (editor). - Algebraic number fields (L-functions and Galois properties), Proceedings of a symposium organised by the London mathematical Society [1975. Durham]. - London, New York, San Francisco, Academic Press, 1977.

[3] GILLARD (Roland). - Formulations de la conjecture de Leopoldt et étude d'une condition suffisante, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg, t. 48, 1979, p. 125-138.

[4] GRAS (Georges). - Groupe de Galois de la p-extension abélienne p-ramifiée maximale d'un corps de nombres, J. für reine und angew. Math., t. 333, 1982, p. 86-132.

[5] HABERLAND (Klaus). - Galois cohomology of algebraic number fields. - Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978.

[6] IWASAWA (Kenkichi). - On $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of algebraic number fields, Annals of Math., Series 2, t. 98, 1973, p. 246-326.

[7] KRAMER (Kenneth) and CANDIOTTI (Alan). - On K_2 and $\mathbb{Z}_p$-extensions of number fields, Amer. J. of Math., t. 100, 1978, p. 177-196.

[8] MIKI (Hiroo). - On the maximal abelian ℓ-extension of a finite algebraic number field with given ramification, Nagoya math. J., t. 70, 1978, p. 183-202.

[9] NGUYEN-QUANG-DO (Thong). - Sur la structure galoisienne des corps locaux et la théorie d'Iwasawa, Comp. Math., Gröningen (à paraître).

[10] NGUYEN-QUANG-DO (Thong). - Formations de classes et modules d'Iwasawa (à paraître).

[11] SERRE (Jean-Pierre). - Cohomologie galoisienne, 2e édition. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1964 (Lecture Notes in Mathematics, 5).