Groupe de travail d'analyse ultramétrique

Yvette Amice

Dilogarithme p-adique

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 10, nº 2 (1982-1983), exp. nº 17, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1982-1983__10_2_A3_0>

2 mai 1983

DILOGARITHME p-ADIQUE, D'APRÈS R. COLEMAN [2]

par Yvette AMICE (*)
[Université Paris-7]

Avertissement. - Cet exposé ne vise pas à rendre compte de l'ensemble de l'article de R. Coleman [2]. En effet, il ne traite rien de ce qui concerne l'interprétation du dilogarithme comme régulateur, ni des motivations puisées dans la K-théorie. De plus, la construction analytique d'un "cristal logarithmique" ([2], § IV) n'est pas reprise dans le cadre général où R. Coleman la présente, mais on donne une présentation simplifiée, suffisante pour l'application aux k-logarithmes. Enfin le langage reste celui de l'analyse p-adique élémentaire et on évite de faire appel à la géométrie analytique rigide.

1. Introduction.

Pour $k \geqslant 0$, le "k-logarithme" ℓ_k est défini, pour $z \in \mathbb{C}_p$, $|z| < 1$, par

$$\ell_k(z) = \sum_{n\geqslant 1} z^n/n^k \ . \tag{1}$$

En particulier, $\ell_0(z) = z/z - 1$ et $\ell_1(z) = -\log(1 - z)$. Il est clair que ℓ_0 admet un prolongement analytique naturel à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) - \{1\}$, et il est bien connu que le logarithme admet des prolongements localement analytiques sur $\mathbb{C}_p^*$, satisfaisant l'équation fonctionnelle naturelle (cf. rappels en 4.1) : chaque tel logarithme définit un prolongement de ℓ_1 à $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}_p) - \{1 , \infty\}$. Ayant choisi un logarithme, donc une fonction ℓ_1, ce qui revient à choisir une constante (cf. 4.1), on est tenté de vouloir construire la suite de fonctions ℓ_k, $k \geqslant 2$, par intégrations successives des équations différentielles $\ell_k'(z) = \ell_{k-1}(z)/z$. Mais comme aucune équation fonctionnelle analogue à celle du logarithme ne se présente naturellement pour rigidifier la situation, chaque intégration laisse a priori le choix d'une infinité (dénombrable) de constantes, ce qui n'est guère satisfaisant.

D'autre part, les fonctions ℓ_k ne sont pas bornées sur le disque $|z| < 1$, on ne peut donc pas espérer les prolonger hors de ce disque par un moyen rigide, à la Krasner ou Tate. Par contre, les fonctions $\ell_k^{(p)}$ définies pour $|z| < 1$ par

$$\ell_k^{(p)}(z) = \sum_{n\geqslant 1,(n,p)=1} z^n/n^k = \ell_k(z) - p^{-k}\,\ell_k(z^p) \tag{2}$$

se prolongent de façon naturelle en des fonctions analytiques (strictement) sur le disque $D_\infty = \{z \in \mathbb{C}_p \ ; \ |z - 1| > p^{-1/(p-1)}\}$, comme on le verra au § 2.

On a donc deux suites de fonctions ℓ_k, pour $|z| < 1$, et $\ell_k^{(p)}$, pour $z \in D_\infty$

(*) Yvette AMICE, Mathématique, aile 45-55, Université Paris-7, 2 place Jussieu, 75251 PARIS CEDEX 05.

liées par (2) et satisfaisant aux équations différentielles

(3) $$d\ell_k(z) = \ell_{k-1}(z)\ dz/z$$

et

(3 bis) $$d\ell_k^{(p)}(z) = \ell_{k-1}^{(p)}(z)\ dz/z\ .$$

Comme ℓ_0 admet un prolongement analytique à D_0 , en supposant qu'on y ait déjà prolongé ℓ_{k-1} , la construction de ℓ_k revient alors à intégrer sur D_0 la forme différentielle $\omega_k = \ell_{k-1}(z)\ dz/z$, sachant qu'elle y satisfait

$$\omega_k(z) - p^{-k}\ \omega_k(z^p) = d(\ell_k^{(p)}(z))\ ,$$

c'est-à-dire qu'elle est, modulo les formes exactes, vecteur propre d'un opérateur de Frobenius. On montrera au § 3 (3.3 : lemme de Dwork) que de telles formes admettent sur des domaines convenables (affinoïdes connexes ayant bonne réduction) une primitive unique satisfaisant une condition naturelle relative au Frobenius.

Ceci permet de construire un prolongement canonique des fonctions ℓ_k dans le domaine $X = \{z \in \underset{\sim}{C}_p\ ;\ |z - 1| = 1\}$, qui satisfait (2) et (3).

Pour obtenir un prolongement à tout le domaine où ℓ_1 est définie, on construit au § 4 des anneaux de fonctions $A_{\log}(V)$, sur des couronnes V , puis $A_{\log}(C)$ sur des voisinages convenables de X , dont les principales propriétés sont :

- le principe d'unicité : toute fonction f de $A_{\log}(V)$, nulle sur un ouvert U de V est nulle sur V ;
- Toute forme différentielle à coefficients dans $A_{\log}(V)$ admet, dans cet anneau, une primitive unique à une constante additive près.

Ceci permet, au § 5, de construire sur $C = \underset{\sim}{P}^1(\underset{\sim}{C}_p) - \{1\ ,\ \infty\}$ un anneau de fonctions dans lequel les équations différentielles (3) ont une unique solution qui satisfasse aussi (2) pour $z \in D_0$.

Enfin le § 6 présente quelques relations fonctionnelles satisfaites par ℓ_2 et ℓ_3 .

<u>Notations.</u>

O_p , M_p , , sont l'anneau de valuation, l'idéal de valuation et le corps résiduel du corps $\underset{\sim}{C}_p$, complété de la clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$, où la valeur absolue est normalisée par $|p| = p^{-1}$. Pour $a \in O_p$, $\pi(a) \in \ell$ est sa projection canonique et $\tilde{a} = \pi^{-1}(\pi(a)) = a + M_p = \{x \in \underset{\sim}{C}_p\ ;\ |x - a| < 1\}$ est sa classe résiduelle.

Pour $a \in \underset{\sim}{C}_p$, $r \in R^+$, $B(a\ ,\ r^+) = \{z \in \underset{\sim}{C}_p\ ;\ |z - a| \leq r\}$ et $B(a\ ,\ r^-) = \{z \in \underset{\sim}{C}_p\ ;\ |z - a| < r\}$. On note A^c le complémentaire dans $\underset{\sim}{P}^1(\underset{\sim}{C}_p)$ d'une partie A .

Sur un ouvert D de $\underset{\sim}{P}^1(\underset{\sim}{C}_p)$, on considère les espaces fonctionnels :

$H(D)$, espace des éléments analytiques sur D (i. e. des limites uniformes sur D de fractions rationnelles sans pôle dans D) ;

$A(D)$, espace des fonctions analytiques sur D ($f \in A(D)$ s'il existe une suite croissante D_n de réunion D telle que $f|_{D_n} \in H(D_n)$) ;

$L(D)$, espace des fonctions localement analytiques sur D ,

$L_r(D)$, espace des fonctions $f \in L(D)$ dont la série de Taylor en chaque point $x \in D$ converge vers f sur le plus grand disque contenant x et contenu dans D .

2. Prolongement de $\ell_k^{(p)}$.

Une autre méthode a été indiquée dans [1], § 2. Nous présentons ici celle proposée par R. COLEMAN.

On note $D_0 = \{z \in P^1(\underset{\sim}{C}_p) \; ; \; |z - 1| > p^{-1/(p-1)}\}$.

PROPOSITION 2.1. - *Les fonctions* $\ell_k^{(p)}(z)$, *définies pour* $k \geqslant 0$ et $|z| < 1$ *par*

$$(2) \qquad \ell_k^{(p)}(z) = \sum_{n\geqslant 1,(n,p)=1} z^n/n^k ,$$

sont prolongeables en des fonctions analytiques sur D_0 , *nulles à l'infini. Elles y satisfont*

$$(3 \text{ bis}) \qquad d\ell_k^{(p)}(z) = \ell_{k-1}^{(p)}(z)\, dz/z$$

et, pour $m > 1$,

$$(4) \qquad \sum_{\zeta^m=1} \ell_k^{(p)}(\zeta z) = m^{1-k}\, \ell_k^{(p)}(z^m) .$$

De plus,

$$(5) \qquad \ell_k^{(p)}(1/z) + (-1)^k\, \ell_k^{(p)}(z) = 0 .$$

On procède par récurrence sur k . Pour $k = 0$, $\ell_0(z) = (z/(1 - z)) - (z^p/(1 - z^p))$ satisfait visiblement (2), (4) et (5). Pour $k = 1$, (3 bis) s'écrit

$$d\ell^{(p)}(z) = dz/(1 - z) - z^{p-1}\, dz/(1 - z^p) = (1/p)\, d(\log((1 - z^p)/(1 - z)^p) .$$

Or, pour $z \in D_0$, $|(1 - z^p)/(1 - z)^p - 1| < 1$, et

$$\ell_1^{(p)}(z) = (1/p) \log((1 - z^p)/(1 - z)^p)$$

satisfait visiblement (4) et (5). Remarquons que $A(D_0)$ satisfait au principe d'unicité, et qu'il y a donc pour chaque k au plus une fonction analytique sur D_0 qui vérifie (2).

Soit $k \geqslant 2$, et supposons qu'on ait construit $\ell_{k-1}^{(p)}$. Alors, d'après (2),

$\ell_{k-1}^{(p)}(0) = 0$, donc $\ell_{k-1}^{(p)}(z)/z$ est une fonction analytique sur D_o : elle y admet une unique primitive nulle en 0 , notée $\ell_k^{(p)}$, et qui admet nécessairement en zéro la série de Taylor (2).

Pour $m > 1$, soit $g_k(z) = (\sum_{\zeta^m=1} \ell_k^{(p)}(\zeta z)) - m^{1-k} \ell_k^{(p)}(z^m)$, alors $dg_k(z) = g_{k-1}(z)\, dz/z$. On sait que $g_1 = 0$, supposons que $g_{k-1} = 0$, alors g_k est constante sur D_o , et comme elle est nulle en 0 , (4) en résulte.

Pour $z = \infty$, $\ell_1^{(p)}$ est nulle. Supposons $\ell_{k-1}^{(p)}(\infty) = 0$, alors $\ell_k^{(p)}(\infty) = b$ qui, d'après (4), satisfait $mb = m^{1-k}\, b$, et comme $k \geq 2$, $b = 0$.

Enfin, si $h_k(z) = \ell_k^{(p)}(1/z) + (-1)^k \ell_k^{(p)}(z)$, on vérifie que $dh_k(z) = -h_{k-1}(z)dz/z$. Or $h_o(z) = 0$, si on suppose que $h_{k-1}(z) = 0$, on en déduit que $h_k(z)$ est constante sur D_o , mais $h_k(0) = 0$, d'où (5)

Remarque. - On peut retrouver ici les expressions de valeurs $L_p(k , \chi)$, $k \geq 1$, des fonctions L p-adiques aux entiers positifs que R. COLEMAN donne au § 7 de [2], et qu'on trouve aussi dans [1], § 2.

3. Le lemme de Dwork.

Nous disposons maintenant d'un prolongement de $\ell_k^{(p)}$ à D_o : pour en construire un pour ℓ_k , reste à "détordre" $\ell_k^{(p)}$ de façon canonique. Ce problème est en grande partie résolu par la méthode suivante.

DÉFINITION 3.1. - On note X une partie de $\underset{\sim}{C}_p$ définie par la donnée d'une famille finie S de points $a \in O_p$, deux à deux distincts modulo M_p , alors

$$X = B(0 , 1^+) - \cup_{a \in S} B(a , 1^-)$$

L'image $\tilde{X}$ de X dans $\mathfrak{k}$ est donc $\tilde{X} = \mathfrak{k} - \cup_{a \in S} \pi(a)$ et $X = \pi^{-1}(\tilde{X})$. Autrement dit, X est un affinoïde connexe ayant bonne réduction.

DÉFINITION 3.2. - On dit qu'une application $\varphi : X \to X$, analytique, est un q-morphisme de Frobenius, ou F_q-morphisme, si c'est un relèvement à X de la restriction à $\tilde{X}$ d'un Frobenius $\bar{x} \to \bar{x}^q$ de $\mathfrak{k}$ sur F_q . Alors $|\varphi(z) - z^q| < 1$.

On sait que si φ est un tel morphisme et $\tilde{x}$ une classe de X modulo M_p , il existe $m \geq 1$ tel que $\varphi^m(\tilde{x}) \subseteq \tilde{x}$, et que φ^m a un unique point fixe $\alpha_{\tilde{x}}$ dans $\tilde{x}$.

PROPOSITION 3.3 (Lemme de Dwork). - Soit $X = B(0 , 1^+) - \cup_{a \in S} B(a , 1^-)$, et φ un F_q-morphisme de X . Soient ω une forme différentielle à coefficients dans $L_r(X)$, $g \in L_r(X)$ et $b \in \underset{\sim}{C}_p$, b non-racine de l'unité, telles que :

(i) $\varphi^* \omega - b\omega = dg$.

Il existe une unique $f \in L_r(X)$ telle que

(ii) $df = \omega$,

(iii) $\varphi^* f - bf = g$.

Unicité de f . - Supposons que f satisfasse (ii) et (iii) avec $\omega = 0$ et $g = 0$. Alors f est localement constante sur X (puisque localement analytique) et constante sur chaque classe, $\tilde{x}$ de X (puisque $f \in L_r(X)$). Soit $\tilde{x}$ une classe, m telque $\varphi^m(\tilde{x}) \in \tilde{x}$, et $\alpha_{\tilde{x}}$ l'unique point fixe de φ^m dans $\tilde{x}$. D'après (iii), on a

$$(\varphi^{*m} f - b^m f)(\alpha_{\tilde{x}}) = 0 = (1 - b^m) f(\alpha_{\tilde{x}}) ,$$

et comme b n'est pas racine de l'unité $f(\alpha_{\tilde{x}}) = 0$, donc f est nulle sur $\tilde{x}$, et donc nulle sur X .

Existence. - Sur chaque classe, ω admet une primitive analytique sur cette classe et définie à une constante additive près. Pour définir une primitive f de ω sur X , il suffit donc de fixer sa valeur en un point de chaque classe $\tilde{x}$, par exemple au point fixe $\alpha_{\tilde{x}}$. Soit $\tilde{x}$ une classe, on note $m = m(\tilde{x})$ le plus petit entier tel que $\varphi^m(\tilde{x}) \subseteq \tilde{x}$, et $\alpha = \alpha_{\tilde{x}}$ le point fixe de φ^m , et on pose

$$f(\alpha) = (1/(1 - b^m))(\textstyle\sum_{i=1}^m b^{i-1} g(\varphi^{m-i}(\alpha))) .$$

Ceci définit une primitive f de ω sur X . Reste à montrer qu'elle satisfait (iii). Soit $F = \varphi^* f - bf - g$, comme $dF = 0$ et $F \in L_r(X)$, F est constante sur chaque classe $\tilde{x}$, et il suffit de montrer que $F(\alpha_{\tilde{x}}) = 0$ pour tout $\tilde{x}$ pour que (iii) en résulte. Choisissons une classe $\tilde{x}$, et soit $\tilde{y} = \varphi(\tilde{x})$, alors $m(\tilde{y}) = m(\tilde{x}) = m$ et $\alpha_{\tilde{y}} = \varphi(\alpha_{\tilde{x}})$, on a donc

$$\varphi^* f(\alpha) = (1/(1 - b^m))(\textstyle\sum_{i=1}^m b^{i-1} g(\varphi^{m-i+1}(\alpha)))$$

$$\varphi^* f(\alpha) - bf(\alpha) = (1/(1 - b^m))(g(\varphi^m(\alpha)) - b^m g(\alpha)) = g(\alpha) .$$

Ainsi $F(\alpha_{\tilde{x}}) = 0$, et f satisfait (iii).

COROLLAIRE 3.4. - Soit $X = B(0, 1^+) - B(1, 1^-) = \{x \in \underset{\sim}{C}_p ; |x - 1| = 1\}$. On note $\ell_0(x) = x/(1 - x)$ et, pour $k \geqslant 1$, $\ell_k^{(p)}(x)$ l'élément analytique sur X construit en 2.1.

Pour $k \geqslant 1$, il existe une unique suite de fonctions $\ell_k \in L_r(X)$ telles que

(i) $d\ell_k(x) = \ell_{k-1}(x)\, dx/x$

(ii) $\ell_k(x) - p^{-k} \ell_k(x^p) = \ell_k^{(p)}(x)$.

On procède par récurrence sur k . Supposons ℓ_{k-1} construite, et posons $\omega_k = \ell_{k-1}\, dz/z$, $g_k(z) = - p^k \ell_k^{(p)}(z)$, $b_k = p^{k}$ et $\varphi(z) = z^p$. Les conditions (i) et (ii) s'écrivent

$$d\ell_k = \omega_k \quad \text{et} \quad \phi^* \ell_k - b_k \ell_k = g_k .$$

Or $g_k \in H(X) \subseteq L_r(X)$ et $\omega_k - b_k \omega_k = g_{k-1}\, dz/z$, puisque ℓ_{k-1} satisfait (ii), par hypothèse de récurrence, et $g_{k-1}\, dz/z = dg_k$ d'après la propriété (3 bis), proposition 2.1. Comme $\ell_0(0) = 0$ et, pour $k \geq 2$, $\ell_{k-1}(0)(1 - p^{1-k}) = \ell_{k-1}^{(p)}(0) = 0$, on voit que ω_k est à coefficients dans $L_r(X)$ et que les hypothèses de la proposition 3.3 sont satisfaites, d'où l'existence et l'unicité de ℓ_k satisfaisant (i) et (ii) sur X .

Remarquons que la récurrence ci-dessus s'applique à la construction de $\ell_1(z) = -\log(1 - z)$. Elle montre que le prolongement canonique du logarithme au cercle unité de $\underset{\sim}{C}_p$ (cf. 4.1) est caractérisé par les conditions

$$d(\log(1 - z)) = - dz/(1 - z) \quad \text{et} \quad \log(1 - z^p) - p \log(1 - z) = \log(u(z)) ,$$

pour $|z - 1| = 1$, où $u(z) = (1 - z^p)/(1 - z)^p$, donc $|u(z) - 1| < 1$ pour $z \in X$, et $\log(u(z))$ y est défini par la série de Taylor évidente. L'unique logarithme ainsi construit satisfait nécessairement l'équation fonctionnelle $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

COROLLAIRE 3.5. - <u>Pour</u> $k \geq 1$ <u>et</u> $m > 1$, <u>les fonctions</u> ℓ_k <u>satisfont sur</u> X

(6) $$\sum_{\zeta^m=1} \ell_k(\zeta z) = m^{1-k}\, \ell_k(z^m) .$$

Soit en effet

$$h_k(z) = \sum_{\zeta^m=1} \ell_k(\zeta z) - m^{1-k}\, \ell_k(z^m)$$

et

$$X' = B(0\, ,\, 1^+) - \sum_{\zeta^m=1} B(\zeta\, ,\, 1^-) .$$

Alors $h_k \in L_r(X')$, et on a

$$\phi^* h_k - p^{-k} h_k = - p^k \left(\sum_{\zeta^m=1} \ell_k^{(p)}(\zeta z) - m^{1-k}\, \ell_k^{(p)}(z^m)\right) = 0$$

d'après la relation (5) de la proposition 2.1. De même $dh_k = 0$, et l'unicité dans le lemme de Dwork montre que $h_k = 0$.

4. <u>Les anneaux</u> $A_{\log}(V)$.

4.1. <u>Rappels sur le logarithme</u>. - Soit $D = \underset{\sim}{P}^1(\underset{\sim}{C}_p) - \{0\, ,\, \infty\} = \underset{\sim}{C}_p^*$. <u>Par définition, un logarithme sur</u> D , <u>noté</u> $\log(z)$, <u>est une fonction localement analytique, satisfaisant</u> $d(\log(z)) = dz/z$ <u>et</u> $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$. <u>On sait qu'alors, pour</u> $|z - 1| < 1$,

$$\log(z) = - \sum_{n\geq 1} (1 - z)^n/n .$$

Pour $|z| = 1$, il existe une unique racine de l'unité d'ordre premier à p , ζ , telle que $|z - \zeta| < 1$. Comme on a nécessairement $\log \zeta = 0$, on pose

$$\log z = \log(z/\zeta)$$

où $\log(z/\zeta)$ est défini par la série de Taylor ci-dessus, et on obtient l'unique logarithme possible sur $|z| = 1$.

Soit $z \in \underset{\sim}{C}_p^*$, alors $|z| = p^{-a/b}$, où a/b est un rationnel. Pour chaque rationnel a/b , $(a , b) = 1$, choisissons un élément $\pi_{a/b}$ tel que $(\pi_{a/b})^b = p^a$, et posons, pour $|z| = p^{-a/b}$, $\bar{z} = (z/\pi_{a/b})$. Alors $|\bar{z}| = 1$, et à deux choix différents de $\pi_{a/b}$ correspondent des valeurs de $\bar{z}$ qui diffèrent d'une racine de l'unité. Donc $\log(\bar{z})$ ne dépend que de z et non du choix des $\pi_{a/b}$.

D'autre part, pour tout logarithme on doit avoir $\log(\pi_{a/b}) = (a/b) \log p$, quel que soit le choix de $\pi_{a/b}$. En résumé :

LEMME 4.1. - <u>Soit</u> $\beta \in \underset{\sim}{C}_p$, <u>il existe un unique logarithme sur</u> $\underset{\sim}{C}_p^*$ <u>noté</u> $\log_\beta(z)$ <u>tel que</u> $\log_\beta(p) = \beta$. <u>On a alors, pour</u> $z \in \underset{\sim}{C}_p^*$, <u>avec les notations ci-dessus</u> :

$$\log_\beta(z) = \beta\, v(z) + \log(\bar{z})$$

<u>où</u> v <u>est la valuation sur</u> $\underset{\sim}{C}_p^*$, <u>normalisée par</u> $v(p) = 1$.

On vérifie immédiatement que les logarithmes ainsi décrits sur $\underset{\sim}{C}_p^*$ satisfont :

$\log \in L_r(\underset{\sim}{C}_p^*)$,

$\log(1 - z^p) - p \log(1 - z) = \log((1 - z^p)/(1 - z)^p)$.

pour tout sous-corps K de $\underset{\sim}{C}_p$ à valuation discrète, $\log|_{K^*}$ est bornée.

<u>On note désormais</u> log <u>l'un des logarithmes sur</u> $\underset{\sim}{C}_p^*$, <u>fixé une fois pour toutes.</u>

4.2. <u>L'anneau</u> $A_{\log}(V)$. - Soit $a \in \underset{\sim}{C}_p$, $r < R \leqslant \infty$ positifs ou nuls, et $V = V(a , r , R) = \{z \in \underset{\sim}{C}_p ; r < |z - a| < R\}$. Rappelons que, si $f \in A(V)$, f est somme sur V d'une unique série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n \in \underset{\sim}{Z}} a_n (z - a)^n .$$

Alors $f^+(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z - a)^n$ converge pour $|z - a| < R$, et

$$f^-(z) = \sum_{k \geqslant 1} a_{-k}/(z - a)^k$$

pour $|z - a| > r$.

LEMME 4.2. - <u>Soit</u> $f \in A(V)$ <u>et</u> $\omega = f(z)\, dz$, <u>il existe</u> $g \in A(V)$ <u>telle que</u> $dg = \omega$ <u>à la condition nécessaire et suffisante que</u> $a_{-1} = 0$.

Si $a_{-1} = 0$, f^+ admet une primitive analytique sur $B(a , R)$, et f^- en admet une sur $B(a\ ,\ r^+)^c$. D'autre part, $dz/(z-a)$ n'admet aucune primitive dans $A(V)$; si g était une telle primitive, $g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n(z-a)^n$, on aurait $1/(z-a) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} nb_n(z-a)^{n-1}$, ce qui contredit l'unicité du développement en série de Laurent.

On note $\mathrm{Res}_a(f) = a_{-1}$: le lemme ci-dessus montre que cette quantité ne dépend pas du choix de a comme centre de V , et représente l'obstruction à ce que $f(z)\,dz$ soit une forme exacte dans $A(V)$.

DÉFINITION 4.3. - Ayant choisi un logarithme sur $\mathbb{C}_p^*$, on note, pour $n \geq 1$,

$$A^n_{\log}(V) = \sum_{i=0}^n A(V) \log^i(z-a) \quad \text{et} \quad A_{\log}(V) = \bigcup_{n\geq 1} A^n_{\log}(V) .$$

Comme $dz/(z-a) = d(\log(z-a))$, on voit que, pour $f \in A(V)$, $f(z)\,dz$ admet une primitive dans $A^1_{\log}(V)$. Plus généralement, on va montrer que

$$H^0(A_{\log}(V)) = \mathbb{C}_p \quad \text{et} \quad H^1(A_{\log}(V)) = 0 .$$

LEMME 4.4. - Soit $f \in A_{\log}(V)$, U un ouvert, $U \subsetneq V$, tels que $f|_U = 0$. Alors si $f(z) = \sum_{i=0}^n h_i(z) \log^i(z-a)$, $h_i \in A(V)$, $h_i = 0$ pour tout i et $f = 0$ sur V .

Autrement dit, $A_{\log}(V)$ satisfait le principe d'unicité, et chacun des $A(V)$-modules $A^n_{\log}(V)$ est libre de rang $n+1$.

Supposons qu'il existe f satisfaisant aux hypothèses du lemme avec $h_n \neq 0$, et choisissons une telle f de telle sorte que n soit minimal pour cette propriété. Alors $n \neq 0$, puisque $A(V)$ satisfait au principe d'unicité. Pour $z \in U$, $df = 0$, donc aussi $h'_n f - h_n f'|_U = 0$. Or

$$h'_n f - h_n f' = \sum_{i=0}^{n-1} (h'_n h_i - h_n h'_i - (i+1)\, h_n h_{i+1}/(z-a)) \log^i(z-a) ,$$

et comme n a été choisi minimal, on a nécessairement, pour $i = 0 , \ldots , n-1$

$$h'_n h_i - h_n h'_i - (i+1)\, h_n h_{i+1}/(z-a) = 0 \quad \text{sur} \quad V .$$

En particulier $h'_n h_{n-1} - h_n h'_{n-1} = n\, h_n^2/(z-a)$, donc, pour $z \in V$ et $h_n(z)\neq 0$,

$$d(h_{n-1}/h_n) = n\, dz/(z-a) .$$

Comme les zéros de h_n sont isolés, et $1/(z-a) \in A(V)$, cette relation est vraie sur V , et $h_{n-1}/h_n \in A(V)$, mais, d'après le lemme 4.2, $dg = n\, dz(z-a)$ et $g \in A(V)$ entraîne $n = 0$, d'où une contradiction.

PROPOSITION 4.5. - Soit $f \in A^n_{\log}(V)$ et $\omega = f(z)\,dz$, alors il existe $g \in A_{\log}(V)$ telle que $dg = \omega$, g est unique à une constante près et $g \in A^{n+1}_{\log}(V)$.

<u>Unicité</u>. - Soit $g \in A_{\log}(V)$, telle que $dg = 0$. Si $g \neq 0$, g admet une représentation

$$g(z) = \sum_{i=0}^{k} g_i(z) \log^i(z - a) ,$$

telle que $g_i \in A(V)$ et $g_k \neq 0$. Or

$$g'(z) = \sum_{i=0}^{k-1} (g_i' + (i + 1) g_i/(z - a)) \log^i(z - a)) + g_k' \log^k(z - a) .$$

D'après le lemme 4.4, on a $g_k' = 0$, donc $g_k = c$, une constante, et

$$g_{k-1}' + kc/(z - a) = 0 ,$$

ce qui d'après 4.2 entraîne $kc = 0$. Comme $g_k = c \neq 0$, c'est que $k = 0$ et $g = c$.

<u>Existence</u>. - Soit $f(z) = \sum_{i=0}^{n} h_i(z) \log^i(z - a)$, posons $b = \mathrm{Res}_a(h_n)$, alors $(h_n - b/(z - a)) dz = dg_n$ où $g_n \in A(V)$, d'après 4.2. De plus,

$$dg_n . \log^n(z - a) = d(g_n . \log^n(z - a)) - (ng_n/(z - a)) . \log^{n-1}(z - a) dz ,$$

donc

$$\omega = f(z) dz = (b/(n + 1)) d(\log^{n+1}(z - a)) + d(g_n . \log^n(z - a)) + \omega_1 ,$$

où $\omega_1 = f_1(z) dz$ et $f_1 \in A_{\log}^{n-1}(V)$. Par hypothèse de récurrence, $\omega = dg_1$, $g_1 \in A_{\log}^{n}(V)$, d'où l'existence de g . Pour $n = 0$, on a déjà remarqué que si $f \in A(V)$, $f(z) dz$ a une primitive dans $A_{\log}^{1}(V)$.

5. Prolongement de ℓ_k .

Soit $C = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) - \{1 , \infty\}$. On a vu en 4.1 que $\ell_1(z) = - \log(1 - z)$ admet des prolongements à C . Lorsqu'on a fixé un logarithme sur $\mathbb{C}_p^*$, ℓ_1 est bien défini sur C . D'autre part, on a montré en 3, corollaire 3.4, que les fonctions ℓ_k admettent un prolongement canonique à $X = B(0 , 1^+) - B(1 , 1^-)$. L'ouvert C est réunion de X et des deux couronnes $V_1 = \{z \in \mathbb{C}_p ; 0 < |z - 1| < 1\}$ et $V_\infty = \{z \in \mathbb{C}_p ; 1 < |z| < \infty\}$. Sur chacune de ces couronnes on peut définir des ℓ_k par intégrations successives des formes différentielles $\omega_k = \ell_{k-1}(z) dz/z$, mais cela laisse pour chaque k le choix d'une constante sur chacune de ces couronnes. Ce qui a permis d'obtenir un prolongement canonique des ℓ_k à X est la condition relative à un Frobenius $\varphi(x) = x^p$ de X , et le fait que les fonctions $\ell_k^{(p)}$ admettent un prolongement naturel à un voisinage D_0 de X

$$(D_0 = \{z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) ; |z - 1| > p^{-1/(p-1)}\}) .$$

Or D_0 rencontre chacune des couronnes V_1 et V_∞ , suivant une couronne W_1 et V_∞ , et c'est en imposant au prolongement cherché pour ℓ_k de satisfaire sur ces couronnes la condition $\overset{*}{\Phi}\ \ell_k - p^{-k}\ \ell_k = \ell_k^{(p)}$ que l'on va assurer, pour chaque k, l'unicité de la primitive de ω_k.

NOTATIONS. - Soit $X = B(0\ ,\ 1^+) - \bigcup_{a\in S} B(a\ ,\ 1^-)$ un affinoïde à bonne réduction. Un "bon voisinage" C de X est défini par la donnée de réels $r_a < 1$, pour $a \in S$ et $R > 1$, alors

$$C = \{z \in \underset{\sim}{C}_p\ ;\ r_a < |z - a| < R\ ,\ \text{pour}\ a \in S\}\ .$$

On note $V_a = \{z \in \underset{\sim}{C}_p\ ;\ r_a < |z - a| < 1\}$, pour $a \in S$, et $V_\infty = \{z \in \underset{\sim}{C}_p ; 1 < |z| < R\}$. Alors $C = X \cup (\bigcup_{a\in S\cup\infty} V_a)$, où cette réunion est disjointe.

On note Φ une fonction analytique sur C, dont la restriction à X est un F_q-morphisme de X. Pour un tel Φ, W désigne un "bon voisinage" de X tel que $W \subseteq C$ et $\Phi(W) \subseteq C$. Pour $a \in S \cup \infty$, on note alors $W_a = W \cap V_a$.

Par exemple, si $\Phi(x) = x^q$, où q est choisi de telle sorte que, pour $a \in S$, $|a^q - a| < 1$,

$W = \{z \in \underset{\sim}{C}_p\ ;\ \ |z| < R^{1/q}$

$$\text{et, pour}\ a \in S\ ,\ |(z - a^q)/(z - a)^q - 1| < 1\ \text{ et }\ |z^q - a| > r_a\}$$

convient.

DÉFINITION 5.1. - On note $B_{\log}(C)$ l'espace des fonctions h localement analytiques sur C telles que

(i) $h \in L_r(C)$ et, pour $a \in S \cup \infty$, $h|_{V_a} \in A_{\log}(V_a)$,

(ii) il existe Φ et W comme ci-dessus, $b \in \underset{\sim}{C}_p$ non-racine de l'unité, et $g \in A(W)$ telles que $\omega = h\, dz$ satisfasse

$$\overset{*}{\Phi}\ \omega - b\omega = dg\ \ \text{sur}\ \ W\ .$$

Remarque. - L'espace $B_{\log}(C)$ que nous définissons ici ne coïncide pas avec l'espace $A_{\log}(C)$ que définit R. COLEMAN. En effet, dans sa définition, on devrait, dans (ii), remplacer " $g \in A(W)$ " par " $g = g_1|_W$ où $g_1 \in A_{\log}(C)$ ", ce qui suppose une construction de $A_{\log}(C)$ par induction. L'espace que nous considérons ici a probablement de moins bonnes propriétés fonctorielles que $A_{\log}(C)$, et est donc sans doute moins bien adapté à des fins géométriques, cependant il suffit à la construction des k-logarithmes et à la démonstration de leurs principales propriétés.

PROPOSITION 5.2. - Avec les notations ci-dessus, soit $h \in B_{\log}(C)$, $\omega = h(z)dz$, $b \in \underset{\sim}{C}_p$ et $g \in A(W)$ telles que, sur W,

$$\overset{*}{\Phi}\ \omega - b\omega = dg\ .$$

Il existe une unique $f \in B_{\log}(C)$ telle que

$$df = \omega \text{ sur } C \text{ et } \Phi^* f - bf = g \text{ sur } W .$$

Comme $h \in L_r(C)$, $h|_X \in L_r(X)$ et la restriction de f à X est déjà connue, et unique, d'après le lemme de Dwork.

Soit d'autre part $a \in S \cup \infty$, ω admet sur V_a des primitives dans $A_{\log}(V_a)$, définies à une constante près. Notons f_a une telle primitive, alors sur W_a

$$d(\Phi^* f_a - bf_a - g) = 0 .$$

Donc $C_a = \Phi^* f_a - bf_a - g$ est une constante sur W_a . Si f est une primitive de ω sur C et $f \in B_{\log}(C)$, on a nécessairement, $f|_{V_a} = f_a + D_a$, où D_a est une constante. Alors, sur W_a , $\Phi^* f - bf - g = C_a + D_a(1 - b)$. Donc, pour que $(\Phi^* f - bf - g) = 0$ sur W_a , il faut et il suffit que $D_a = C_a/(b - 1)$. On a ainsi défini f de façon unique, sur X et sur chaque V_a, donc sur C , satisfaisant aux conditions imposées.

COROLLAIRE 5.3. - <u>Soit</u> $f \in B_{\log}(C)$, <u>si</u> f <u>est localement constante sur</u> C , <u>elle est constante.</u>

Soit $\omega = df = 0$, elle satisfait $\Phi^*_\omega = 0$, donc pour chaque constante g elle admet une unique primitive f_g telle que $\Phi^*(f_g) = g$. Soit $z_0 \in W$ et $g_0 = \Phi^*(f)(z_0))$, alors $f - g_0$ est l'unique primitive de ω telle que $\Phi^*(f - g_0) = 0$, comme 0 est une telle primitive, $f = g_0$ sur C .

THÉORÈME 5.4. - <u>On note</u> log <u>un logarithme sur</u> $\underset{\sim}{C}_p^*$, <u>fixé une fois pour toutes.</u> <u>Soit</u>

$$C = \underset{\sim}{P}^1(\underset{\sim}{C}_p) - \{1 , \infty\} , \quad X = B(0 , 1^+) - B(1 , 1^-) , \quad D_0 = \{z ; \ |z - 1| > p^{-1/(p-1)}\}.$$

<u>On note</u> $\ell_0(z) = z/(1 - z)$, <u>pour</u> $z \in C$, <u>et, pour</u> $z \in D_0$, $\ell_k^{(p)}(z)$ <u>est la fonction construite en 2.1,</u> $\ell_k^{(p)} \in A(D_0)$

<u>Pour tout</u> $k \geq 1$, <u>il existe une unique fonction</u> $\ell_k \in B_{\log}(C)$ <u>telle que</u>

(i) $d\ell_k(z) = \ell_{k-1}(z)\, dz/z$

(ii) <u>pour</u> $z \in D_0$, $\ell_k(z) - p^{-k} \ell_k(z^p) = \ell_k^{(p)}(z)$.

<u>De plus, ces fonctions satisfont</u> :

(a) $\ell_k(z) + (-1)^k \ell_k(1/z) = -(1/k\,!) \log^k z$, $z \neq 0$,

(b) <u>pour</u> $|z| < 1$, $\ell_k(z) = \sum_{n\geq 1} z^n/n^k$,

(c) <u>pour</u> $m > 1$ et $z^m \neq 1$, $\sum_{\zeta^m=1} \ell_k(\zeta z) = m^{1-k} \ell_k(z^m)$.

La démonstration se fait évidemment par récurrence sur K . Remarquons d'abord que si $\ell_k \in B_{\log}(C)$, la restriction de ℓ_k à $B(0 , 1^-)$, y est analytique, et une récurrence évidente montre que (i) et (ii) entraînent (b), en particulier on a nécessairement $\ell_k(0) = 0$ pour tout k. Pour $k = 1$, on sait déjà que $\ell_1(z) = -\log(1 - z)$ est l'unique primitive de $dz/(1 - z)$ satisfaisant (ii) et appartenant à $B_{\log}(C)$ (N. B. : à chaque choix d'un log correspond un anneau $B_{\log}(C)$ assurant cette condition).

Supposons ℓ_{k-1} construite, alors $\ell_{k-1}(0) = 0$, donc $\omega_k = \ell_{k-1}(z)\, dz/z$ est à coefficients dans $B_{\log}(C)$. Posons $\phi(z) = z^p$, $W = D_0 \cap C$, $b_k = p^{-k}$ et $g_k = -p^k \ell_k^{(p)}$. On a

$$\phi^* \omega_k - b_k \omega_k = (p\ell_{k-1}(z^p) - p^k \ell_{k-1}(z))\, dz/z = pg_{k-1}(z)\, dz/z = pdg_k ,$$

grâce à la propriété (3 bis), proposition 2.1. Donc ω_k admet une unique primitive ℓ_k dans $B_{\log}(C)$ satisfaisant $\phi^* \ell_k - p^k \ell_k = g_k$, c'est-à-dire (ii).

On a déjà remarqué que ces fonctions ℓ_k satisfont (b). Pour prouver (a), soit $C' = C - \{0\}$, et $h_k(z) = \ell_k(z) + (-1)^k \ell_k(1/z) + (1/k\,!) \log^k(z)$. Alors $h_k \in B_{\log}(C')$, et elle satisfait

$$dh_k(z) = (\ell_{k-1}(z) + (-1)^{k-1} \ell_{k-1}(1/z) + (1/(k-1)!) \log^{k-1} z)\, dz/z = h_{k-1}\, dz/z ,$$

et, pour $z \in D_0$,

$$h_k^{(p)}(z) = h_k(z) - p^{-k} h_k(z^p) = \ell_k^{(p)}(z) + (-1)^k \ell_k^{(p)}(z^p) = 0$$

d'après la proposition 3.1, relation (5).

De plus $h_0(z) = 0$. Si on suppose que $h_{k-1} = 0$, h_k est localement constante, donc constante sur C'. Cette constante doit satisfaire $h_k(1 - p^{-k}) = 0$, donc elle est nulle, d'où (a).

La démonstration de (c) est analogue. On considère cette fois $C'' = C - \mu_m$, où $\mu_m = \{z \,;\, z^m = 1\}$, et $j_k(z) = m^{1-k} \ell_k(z^m) - \sum_{\zeta^m=1} \ell_k(\zeta z)$. Alors $j_k \in B_{\log}(C'')$, elle satisfait $dj_k = j_{k-1}\, dz/z$, $j_0(z) = 0$. On en déduit, comme ci-dessus, que j_k est localement constante, donc constante, sur C'', mais pour $z^p \in C''$ on doit avoir $j_k(1 - p^{-k}) = m^{1-k} \ell_k^{(p)}(z^m) = \sum_{\zeta^m=1} \ell_k^{(p)}(\zeta z) = 0$ d'après le corollaire 3.5., donc $j_k = 0$.

<u>Remarque</u>. – Le domaine C où l'on a opéré les intégrations successives des ω_k pour construire les ℓ_k est en fait une couronne : $C = \{z \,;\, 0 < |z - 1| < \omega\}$. On pourrait donc croire qu'il suffisait d'effectuer ces intégrations successives dans l'anneau $A_{\log}(V)$. Mais on a utilisé de façon essentielle le fait, facile à vérifier, que si $f \in B_{\log}(C)$ et $f(0) = 0$, $f/z \in B_{\log}(C)$. Or cette propriété n'est plus vraie dans l'anneau $A_{\log}(C)$, car si

$$f(z) = \sum_{0 \leq i \leq n} h_i(z) \log^i(z - 1) \in A_{\log}(C) ,$$

$f(0) = 0 \iff h_0(0) = 0$, mais pour $i \neq 0$, $h_i(z) \log^i(z-1)/z$ n'est plus dans $A_{\log}(C)$.

6. Relations fonctionnelles.

Outre les relations (a) et (c) du théorème 5.4, on a, pour $k = 2$, des relations particulières.

6.1. Dilogarithmes. - On considère

$$d(z) = \ell_2(z) + \tfrac{1}{2} \log z \log(1-z) .$$

Alors $D \in B_{\log}(C')$, où $C' = C - \{0\} = \underset{\sim}{C}_p - \{0 , 1\}$. Pour $z \in C'$,

$$D(z) + d(1/z) = -\tfrac{1}{2} \log^2 z + \tfrac{1}{2} \log z \log(1-z) - \tfrac{1}{2} \log z \log(1 - 1/z) = 0 .$$

D'autre part

$$d(D(z) + D(1-z)) = d(\ell_2(z) + \ell_2(1-z) + \log z \log(1-z))$$

$$= (-\log(1-z)/z + \log z/(1-z) + \log(1-z)/z - \log z/(1-z))\, dz = 0 .$$

Donc $D(z) + D(1-z)$ est localement constante, donc constante, sur C' . Soit a une racine de $a^2 - a + 1 = 0$ $(a = 1 \pm \sqrt{5})/2)$, alors $(1/a) = 1 - a$, et on a

$$D(a) + D(1-a) = D(a) + D(1/a) = 0 .$$

PROPOSITION 6.1. - Soit $D(z) = \ell_2(z) + \tfrac{1}{2} \log z \log(1-z)$, alors

$$D(z) + D(1/z) = 0 \quad \text{et} \quad D(z) + D(1-z) = 0 .$$

Signalons d'autre part la relation d'Abel ([2], corollaire 6.5 (b)),

$$D(xy) = D(x) + D(y) - D(x(1-y)/(x-1)) - D(y(1-x)/(y-1))$$

dont la démonstration emploie des méthodes étrangères à cet exposé.

6.2. Trilogarithme. - On montrera en 6.3 que, pour tout $k \geqslant 2$, $\ell_k(z) - (1/k-1) \log z\, \ell_{k-1}(z) = m_k(z)$ se prolonge en une fonction analytique pour $|z - 1| < 1$, admettons-le provisoirement. On obtient pour $k = 3$ une relation moins satisfaisante que celles que donne la proposition 6.1.

PROPOSITION 6.2. - Pour $z \in C' = \underset{\sim}{C}_p - \{0 , 1\}$,

$$\ell_3(z) + \ell_3(1-z) + \ell_3(1-1/z) = -\tfrac{1}{2} \log^2 z \log(z-1) + \frac{1}{6} \log^3 z + m_3(1) .$$

Remarque. - Nous n'avons aucune information sur la nature de la constante $m_3(1)$. La démonstration relève d'un calcul direct, utilisant les relations déjà connues pour ℓ_2 .

On déduit d'abord des relations 6.1. que

$$\ell_2(1 - z) = - \ell_2(z) - \log z \log(1 - z)$$

et

$$\ell_2(1 - 1/z) = \ell_2(z) - \tfrac{1}{2} \log^2 z + \log z \log(1 - z) .$$

Soit $h(z) = \ell_3(z) + \ell_3(1 - z) + \ell_3(1 - 1/z)$, alors $h \in B_{\log}(C')$ et

$$\begin{aligned} h'(z) &= \ell_2(z)/z - \ell_2(1 - z)/(1 - z) - (1/z(1 - z))\, \ell_2(1 -(1/z)) \\ &= \ell_2(z)((1/z) + 1/(1 - z) - 1/z(1 - z)) + \log z \log(1 - z)/(1 - z) \\ &\quad - \log z \log(1 - z)/z\ (1 - z) + \tfrac{1}{2} \log^2 z(1/z(1 - z)) \\ &= + \tfrac{1}{2} \log^2 z/z + \tfrac{1}{2} \log^2 z/(1 - z) - \log z \log(1 - z)/z \\ &= (+(1/6 \log^3 z - \tfrac{1}{2} \log^2 z \log(1 - z))' . \end{aligned}$$

On obtient alors 6.2 en remarquant que la différence entre $h(z)$ et le second membre est localement constante, donc constante sur C' , et on détermine la constante en prenant les limites des deux membres lorsque $z \longrightarrow 1$, $z \in K$, un sous-corps à valuation discrète de $\underset{\sim}{C}_p$. Pour $h(z)$ la limite est $m_3(z)$, et comme $\log(z - 1)$ reste borné, la proposition en résulte.

6.3. <u>Autre prolongement</u>. - Comme annoncé ci-dessus, on a

PROPOSITION 6.3. - <u>Pour</u> $k \geq 2$, <u>la fonction</u> $m_k(z)=\ell_k(z)-(1/k-1) \log z\ \ell_{k-1}(z)$, <u>qui est dans</u> $B_{\log}(C')$ <u>est prolongeable en une fonction analytique sur le disque</u> $|z - 1| < 1$. <u>Ce prolongement satisfait</u> $m_{2k}(1) = 0$.

On remarque d'abord que, pour $k \geq 3$,

$$dm_k(z) = ((k - 2)/(k - 1))\, m_{k-1}(z)\, dz/z .$$

Or $m_2(z) = \ell_2(z) + \log z \log(1 - z) = \ell_2(1 - z)$, donc $m_2 \in A(B(1 , 1^-))$. Comme $1/z \in A(B(1 , 1^-))$, l'existence de fonctions $m_k \in A(B(1 , 1^-))$ s'obtient par intégrations successives, et comme les m_k sont bien définies pour $k \neq 1$, les "constantes d'intégration" sont bien déterminées. On vérifie que, pour $z \neq 1$, $m_k(z) + (- 1)^k m_k(1/z) = c_k \log^k z$, où c_k est une constante. Cette relation reste vraie en $z = 1$, par continuité, d'où $m_{2k}(1) = 0$.

COROLLAIRE 6.4. - <u>Soit</u> $k \geq 2$, <u>pour tout sous-corps</u> K <u>à valuation discrète de</u> $\underset{\sim}{C}_p$,

$$\lim_{z\to 1,\, z\in K}(\ell_k(z)) = m_k(1)$$

<u>et cette limite ne dépend pas de</u> K .

Pour $k = 2$, $\ell_2(z) = \ell_2(1 - z) - \log z \log(1 - z)$, et, pour $z \longrightarrow 1$, $z \in K$, $\log(1 - z)$ reste borné, donc la limite de $\ell_2(z)$ est $\ell_2(0) = m_2(1) = 0$. Une récurrence évidente achève la démonstration.

Notons $B = B(1 , 1^-)$ et $V = B - \{1\} = \{z ; 0 < |z - 1| < 1\}$. Alors $a_2(z) = \ell_2(1 - z) \in A(B)$ et $b_2(z) = - \log z \in A(B)$. L'expression ci-dessus de ℓ_2 est en fait la représentation de ℓ_2 dans $A_{\log}(V)$: $\ell_2 = a_2 + b_2 \log(1 - z)$. Elle montre que $\ell_2 \in A^1_{\log}(V)$, alors qu'à priori on la savait seulement dans $A^2_{\log}(V)$. Comme $\ell_k = m_k + (1/(k - 1)) \log z \, \ell_{k-1}$, si on suppose que $\ell_{k-1} = a_{k-1} + b_{k-1} \log(1 - z)$ où $a_{k-1} \in A(B)$, $b_{k-1} \in A(B)$, on en déduit que

$$\ell_k = a_k + b_k \log(1 - z) ,$$

où

$$a_k = m_k + (1/(k - 1)) \log z \, b_{k-1} \in A(B)$$

et

$$b_k = (1/(k - 1)) \, b_{k-1} = - (1/(k - 1)\,!) \log^{k-1} z .$$

COROLLAIRE 6.5. - <u>Soient</u> $B = B(1 , 1^-)$ <u>et</u> $V = B - \{1\}$. <u>Pour</u> $k \geqslant 2$, $\ell_k \in A^1_{\log}(V)$, <u>et on a</u> $\ell_k = a_k + b_k \log(1 - z)$, <u>où</u> b_k <u>et</u> a_k <u>sont analytiques sur</u> B ,

$$b_k(z) = - (1/(k - 1)\,!) \log^k z$$

et

$$a_k = \sum_{j=0}^{k-2} \log^j z . m_{k-j}(z)/((k - 1) \dots (k - j)) + \log^{k-2} z . \ell_2(1 - z)/(k - 1)\,! .$$

On obtient l'expression donnée ci-dessus pour a_k à partir de la relation de récurrence précédente.

Remarquons que si W est une couronne contenue dans $C = \underset{\sim}{C}_p - \{0 , 1\}$, ou bien W est dans $B(0 , 1^-)$, dans ce cas, $\ell_k \in A(W)$, ou bien $W \subseteq B(1 , 1^-) - \{1\}$, et le corollaire ci-dessus montre que $\ell_k \in A^1_{\log}(W)$, sinon, $W \subseteq \{|z| > 1\}$: alors $\ell_k(1/z) \in A(W)$ et l'unique représentation de ℓ_k dans $A_{\log}(W)$ est fournie par la relation (a)

$$\ell_k(z) = (- 1)^{k-1} (\ell_k(1/z) + (1/k\,!) \log^k z) .$$

Pour une telle couronne, $\ell_k \in A^k_{\log}(W)$, et n'est dans aucun $A^j_{\log}(W)$ avec $j < k$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Prolongement analytique des sommes de Gauss, II, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 9e année, 1981/82, fasc. 3, n° J1, 14 p.

[2] COLEMAN (R. F.). - Dilogarithms, Regulators and p-adic L-functions, Invent. Math., t. 69, 1982, p. 171-208.