Groupe de travail d'analyse ultramétrique

FRANCESCO BALDASSARRI

Cohomologie p-adique pour la fonction ${}_3F_2\left({a, b_1, b_2 \atop c_1, c_2}; \lambda\right)$

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 10, nº 2 (1982-1983), exp. nº 16, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1982-1983__10_2_A2_0>

COHOMOLOGIE p-ADIQUE POUR LA FONCTION ${}_3F_2\left({a, b_1, b_2 \atop c_1, c_2}; \lambda\right)$

par Francesco BALDASSARRI (*)

Cet exposé contient les résultats principaux sur la structure cohomologique (algébrique et p-adique) de la fonction hypergéométrique généralisée ${}_3F_2\left({a, b_1, b_2 \atop c_1, c_2}; \lambda\right)$; les démonstrations paraîtront ailleurs. La construction cohomologique, présentée ici, avait été esquissée par DWORK dans une lettre à SPERBER du 16 février 1982.

L'auteur espère que ce papier pourra aider à rendre plus claires certaines des idées contenues dans le livre de DWORK [1], tout en fournissant un nouvel exemple d'application de leur philosophie.

1. - Nous commençons par rappeler au lecteur la définition de la série hypergéométrique généralisée :

$$(1.0)\qquad {}_3F_2\left({a\ ,\ b_1\ ,\ b_2 \atop c_1\ ,\ c_2}\ ;\ \lambda\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i\ (b_1)_i\ (b_2)_i}{(c_1)_i\ (c_2)_i\ i\ !}\ \lambda^i$$

où a , b_1 , b_2 , c_1 , c_2 sont dans un corps de caractéristique 0 et $(a)_i = a(a + 1) \ldots (a + i - 1)$.

La construction cohomologique, que l'on présente ici, découle de la formule intégrale classique

$$(1.1)\quad {}_3F_2\left({a\ ,\ b_1\ ,\ b_2 \atop c_1\ ,\ c_2}\ ;\ \lambda\right) = \text{Cte} \int x^{b_1-1}(1 - x)^{c_1-b_1-1}\ {}_2F_1\left({a\ ,\ b_2 \atop c_2}\ ;\ x\lambda\right) dx\ ,$$

ou, encore mieux, du fait que, si $F(t)$ est une solution de l'opérateur hypergéométrique de Gauss $(E_t = t\,\frac{d}{dt})$

$$L_{a,b_2,c_2} = E_t(E_t + c_2 - 1) - t(E_t + a)(E_t + b_2)\ ,$$

la formule intégrale

$$\int x^{b_1-1}\ (1 - x)^{c_1-b_1-1}\ F(x\lambda)\ dx$$

définit une solution de l'opérateur

$$L_{a,b_1,b_2,c_1,c_2} = E_\lambda(E_\lambda + c_1 - 1)(E_\lambda + c_2 - 1) - \lambda(E_\lambda + a)(E_\lambda + b_1)(E_\lambda + b_2)$$

qui est justement celui qui tue ${}_3F_2\left({a, b_1, b_2 \atop c_1, c_2}; \lambda\right)$.

(*) Francesco BALDASSARRI, Seminario Matematico, Università di Padova, 7 Via Belzoni, I-35100 PADOVA (Italie).

L'analogue algébrique de (1.1) s'obtient de la façon suivante. Soient $a, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p \cap (0\ 1]$, où $\{a, b_1, b_2\} \cap \{c_1, c_2\} \neq \emptyset$, $1 \notin \{a, b_1, b_2\}$, et soient $\mathcal{Q}_t = \mathbb{Q}[t, \frac{1}{t(1-t)}]$, $\mathcal{L} = \mathbb{Q}[\lambda, x, \frac{1}{\lambda(1-\lambda)x(1-x)(1-x\lambda)}]$ et $\rho : \mathcal{Q}_t \longrightarrow \mathcal{L}$, $\rho(t) = x\lambda$, homomorphisme d'anneaux.

Si M_t est un $\mathcal{Q}_t/\mathbb{Q}$-module différentiel, on notera $M_{x,\lambda}$ le $\mathcal{L}/\mathcal{Q}$-module différentiel

$$\mathcal{L} \underset{\rho}{\longleftarrow} \otimes_{\mathcal{Q}_t} M_t$$

et, si $m(t) \in M_t$, on posera

$$m(x\lambda) = 1 \otimes m(t) \in M_{x\lambda} .$$

Rappelons en particulier que le $\mathcal{Q}_t/\mathbb{Q}$-module différentiel $W_{a,b,c;t}$ associé à ${}_2F_1\left({a,b \atop c};t\right)$ possède une $\mathcal{Q}_t$-base

$$\underset{\sim}{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \omega_{a,b,c+1}(t) \\ \omega_{a,b,c}(t) \end{pmatrix}$$

telle que (en sous entendant le symbole $\nabla_{a,b,c}$ de dérivée covariante) $E_t\, \underset{\sim}{\omega}(t) = {}^tG_{a,b,c}(t)\, \underset{\sim}{\omega}(t)$, où

$$(1.2) \qquad G_{a,b,c}(t) = \begin{pmatrix} -c & (c-a)(\frac{1}{1-t} - 1) \\ c-b & (a+b-c)(\frac{1}{1-t} - 1) \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas $L_{a,b,c}\, \omega_{a,b,c} = 0$.

Soit encore $W_{b,c;x}$ le $\mathcal{L}/\mathcal{Q}_\lambda$-module différentiel de $\mathcal{L}$-base $\zeta(x) = \zeta_{b,c}(x)$, telle que

$$E_x\, \zeta(x) = (c + \frac{b-c}{1-x})\, \zeta(x) .$$

Soit $\Omega_a = \Omega_{a,b_1,b_2,c_1,c_2} = W_{b_1,c_1;x} \otimes_{\mathcal{L}} W_{a,b_2,c_2;x\lambda}$ (produit tensoriel de $\mathcal{L}/\mathcal{Q}_\lambda$-modules différentiels) ; Ω_a est un $\mathcal{L}/\mathcal{Q}_\lambda$-module différentiel de base :

$$\eta = \begin{pmatrix} \zeta_{b_1,c_1}(x) \otimes \omega_{a,b_2,c_2+1}(x\lambda) \\ \zeta_{b_1,c_1}(x) \otimes \omega_{a,b_2,c_2}(x\lambda) \end{pmatrix}$$

satisfaisant

$$E_x\, \eta = (c_1 + \frac{b_1 - c_1}{1-x} + {}^tG_{a,b_2,c_2}(x\lambda))\, \eta .$$

On a donc une $\mathcal{L}/\mathcal{Q}_\lambda$-connexion

$$\nabla_{a,x} : \Omega_a \dashrightarrow \Omega_a \otimes_{\mathfrak{L}} \Omega^1_{\mathfrak{L}/\mathfrak{D}_\lambda}$$

$$\eta \longmapsto \left(c_1 + \frac{b_1 - c_1}{1 - x} + {}^tG_{a,b_2,c_2}(x\lambda)\right)\eta \otimes \frac{dx}{x} .$$

Posons $W_a = W_{a,b_1,b_2,c_1,c_2} = \Omega_a \otimes \Omega^1_{\mathfrak{L}/\mathfrak{D}_\lambda}/\nabla_{a,x}\Omega_a$.

On voit bien que, en écrivant en colonne les éléments de $\mathfrak{L}^2$, on a des isomorphismes :

$$\mathfrak{L}^2 \xrightarrow{\simeq} \Omega_a$$

$$\xi \longmapsto {}^t\xi\eta$$

$$\mathfrak{L}^2 \dashrightarrow \Omega_a \otimes \Omega^1_{\mathfrak{L}/\mathfrak{D}_\lambda}$$

$$\xi \longmapsto {}^t\xi\eta \otimes \frac{dx}{x}$$

et que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{L}^2 \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "D_a"'] & \Omega_a \arrow[d, "\nabla_{a,x}"] \\ \mathfrak{L}^2 \arrow[r, "\sim"] & \Omega_a \otimes \Omega^1_{\mathfrak{L}/\mathfrak{D}_\lambda} \end{tikzcd}$$

est commutatif si l'on définit

$$D_a = D_{a,b_1,b_2,c_1,c_2} = x\frac{\partial}{\partial x} + c_1 + \frac{b_1 - c_1}{1 - x} + G_{a,b_2,c_2}(x\lambda) .$$

On en déduit que $W_a \simeq \mathfrak{L}^2/D_a\,\mathfrak{L}^2$. Or, W_a admet une structure naturelle de $\mathfrak{D}_\lambda/\mathbb{Q}$-module différentiel ; en termes de $\mathfrak{L}^2$, il suffit de remarquer que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{L}^2 \arrow[rr, "\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} + G_{a,b_2,c_2}(x\lambda)"] \arrow[d, "D_a"'] & & \mathfrak{L}^2 \arrow[d, "D_a"] \\ \mathfrak{L}^2 \arrow[rr, "\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} + G_{a,b_2,c_2}(x\lambda)"] & & \mathfrak{L}^2 \end{tikzcd}$$

est commutatif, de sorte que l'on peut définir, pour $[\xi]$ = classe de $\xi \in \mathfrak{L}^2$ modulo $D_a\,\mathfrak{L}^2$ $(\nabla_a = \nabla_{a,b_1,b_2,c_1,c_2})$,

$$E_\lambda[\xi] = \nabla_a(E_\lambda)[\xi] = \left[\lambda\frac{\partial\xi}{\partial\lambda} + G_{a,b_2,c_2}(x\lambda)\,\xi\right] .$$

La formule intégrale (1.1) signifie simplement que

$$L_{a,b_1,b_2,c_1,c_2}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1-x}\end{pmatrix}\right] = 0 \ .$$

On peut démontrer que

$$\left(\left[\binom{1}{0}\right], \left[\binom{0}{1}\right], \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1-x}\end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1-x\lambda}\end{pmatrix}\right]\right)$$

est une $\mathcal{Q}_\lambda$-base de W_a , notons-la

$$e_a = (e_a^{(1)} , e_a^{(2)} , e_a^{(3)} , e_a^{(4)}) \ .$$

On voit directement que le sous-$\mathcal{Q}_\lambda$-module de W_a , engendré par $e_a^1 = (e_a^{(1)} , e_a^{(2)} , e_a^{(3)})$ (notons-le V_a), est stable pour l'action de $\nabla_a(E_\lambda)$. Ainsi V_a est le $\mathcal{Q}_\lambda/\underset{\sim}{Q}$-module différentiel associé à $L_a = L_{a,b_1,b_2,c_1,c_2}$, dans le sens que $L_a\, e_a^{(3)} = 0$ et que V_a est engendré par $e_a^{(3)}$ en tant que $\mathcal{Q}_\lambda/\underset{\sim}{Q}$-module différentiel.

On a $\nabla_a(E_\lambda)\, e_a^1 = M_a\, e_a^1$, où

$$M_a = \begin{pmatrix} -c_2 & c_2 - b_2 & 0 \\ -c_1 & 0 & c_1 - b_1 \\ \frac{(a-c_2)(b_1-c_2)}{b_1-c_1}\,\frac{\lambda}{1-\lambda} & \left[\frac{(a-c_2)(c_2-b_2)}{b_1-c_1} + c_1-c_2-a-b_2\right]\frac{\lambda}{1-\lambda} & (a+b_1+b_2-c_1-c_2)\,\frac{\lambda}{1-\lambda} \end{pmatrix}.$$

On verra ensuite une démonstration "raisonnée" du fait que V_a est sous-$\mathcal{Q}_\lambda/\underset{\sim}{Q}$-module différentiel de W_a .

2. - Rappelons en bref l'appareil cohomologique crée car DWORK pour ${}_2F_1\left({a,b \atop c};\lambda\right)$, et abrégeons (a , b , c) par a , $(1 - a , 1 - b , 1 - c)$ par $1 - a$, pour $a , b , c \in \underset{\sim}{Q} \cap \underset{\sim}{Z}_p \cap (0\ 1]$, $a , b \neq 1$, $a \neq c \neq b$. Dorénavant, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_\lambda$. Donc W_a a une $\mathcal{Q}$-base $\underset{\sim}{\omega}_a$ et $\nabla_a(E_\lambda)\,\omega_a = {}^tG_a(\lambda)\,\underset{\sim}{\omega}_a$.

Le $\mathcal{Q}/\underset{\sim}{Q}$-module différentiel dual de W_a sera noté K_a ; pour la base duale ω_a^* de $\underset{\sim}{\omega}_a$, on aura

$$\nabla_a^*(E_\lambda)\,\underset{\sim}{\omega}_a^* = - G_a(\lambda)\,\underset{\sim}{\omega}_a^* \ .$$

Il existe un isomorphisme de $\mathcal{Q}/\underset{\sim}{Q}$-modules différentiels,

$$\hat{D}_a : K_a \longrightarrow W_{1-a}$$

$$\omega_a^* \longmapsto \Delta_a(\lambda)\,\underset{\sim}{\omega}_{1-a}$$

où

$$\Delta_a(\lambda) = \Delta_{a,b,c}(\lambda) = \begin{pmatrix} (a-c)\lambda & 0 \\ 0 & (b-c)(1-\lambda) \end{pmatrix} .$$

On a donc

(2.1) $$G_a \Delta_a + \Delta_a {}^tG_{1-a} + E_\lambda(\Delta_a) = 0 .$$

Puisque $\Delta_{1-a} = -\Delta_a$, on a aussi :

(2.1)' $$G_{1-a} \Delta_a + \Delta_a {}^tG_a + E_\lambda(\Delta_a) = 0 .$$

Soit maintenant Ω le domaine universel p-adique. Les $\mathfrak{D}$-modules W_a et K_a déterminent deux fibrés vectoriels triviaux sur $\Omega \setminus \{0 , 1\}$ duaux entre eux, $\underset{\sim}{W}_a$ et $\underset{\sim}{K}_a$, munis des connexions duales. Notons encore $\underset{\sim}{\omega}_a$ et $\underset{\sim}{\omega}^*_a$ les bases globales de $\underset{\sim}{W}_a$ et $\underset{\sim}{K}_a$. Pour tout $\lambda \in \Omega \setminus \{0 , 1\}$, on a les fibres $W_{a,\lambda}$ et $K_{a,\lambda}$ avec les Ω-bases $\omega_{a,\lambda}$, $\omega^*_{a,\lambda}$. Le transport parallèle

$$T_{a;z,\lambda} : K_{a,z} \longrightarrow K_{a,\lambda}$$
$$\underset{\sim}{\omega}^*_{a,z} \longmapsto U_{a,z}(\lambda)\, \underset{\sim}{\omega}^*_{a,\lambda}$$

est défini pour $|\lambda - z| < |z| \min(1 , |z - 1|)$, et il est analytique dans une telle région (c'est-à-dire que sa matrice $U_{a,z}(\lambda)$ est analytique pour $|\lambda - z| < |z| \min(1 , |z - 1|)$).

Bien sûr, $U_{a,z}(\lambda)$ est alors la solution du système $E_\lambda Y = Y G_a(\lambda)$ près de $\lambda = z$, qui vaut $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $\lambda = z$.

Si $\alpha \in \underset{\sim}{Q} \cap \underset{\sim}{Z}_p \cap (0 , 1]$, soit $\alpha' \in \underset{\sim}{Q} \cap \underset{\sim}{Z}_p \cap (0 , 1]$ tel que

$$p\alpha' - \alpha = \mu_\alpha \in \{0 , 1 , \ldots , p - 1\} .$$

Soit $\mathcal{U} = \{\lambda \in \Omega , \ \lambda \neq 0 , \ |\lambda - 1| > p^{-1/(p-1)}\}$ et $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$, $\varphi(\lambda) = \lambda^p$. On peut définir des morphismes horizontaux, duaux centre eux :

$$\underset{\sim}{\alpha}_a : \underset{\sim}{W}_a|\mathcal{U} \longrightarrow \varphi^* \underset{\sim}{W}_{a'}|\mathcal{U}$$

$$\underset{\sim}{\alpha}^*_a : \varphi^* \underset{\sim}{K}_{a'}|\mathcal{U} \longrightarrow \underset{\sim}{K}_a|\mathcal{U}$$

Pour tout $\lambda \in \mathcal{U}$, on a donc :

$$\alpha_{a,\lambda} : W_{a,\lambda} \longrightarrow W_{a',\lambda^p}$$

$$\alpha^*_{a,\lambda} : K_{a',\lambda^p} \longrightarrow K_{a,\lambda} ,$$

Ω-isomorphismes duaux tels que $\alpha^*_{a,\lambda}\ \omega^*_{a',\lambda^p} = A_a(\lambda)\ \omega^*_{a,\lambda}$, avec $A_a(\lambda)$ matrice analytique dans $\mathcal{U}$, et un pôle à l'infini et holomorphe à 0 .

En fait, $A_a(\lambda) \in M_{2,2}(\mathcal{D}'_0)$, où $\mathcal{D}'_0$ = complétion dans la norme de Gauss $|\ |_{\text{Gauss}}$, de $\mathcal{D}_0 = \{\xi \in \mathcal{D} ;\ |\xi|_{\text{Gauss}} \leq 1\}$, et $A_a(\lambda)$ est effectivement calculable modulo $p\,\mathcal{D}'_0$, sous certaines hypothèses sur a , b , c . De plus, le diagramme (où $z \in \mathcal{D}$, $|\lambda - z| < |z| \min(1\ ,\ |z-1|)$)

$$\begin{tikzcd}
K_{a,z} \arrow[r, dashed, "T_{a;z,\lambda}"] & K_{a,\lambda} \\
K_{a',z^p} \arrow[u, "\alpha^*_{a,z}"] \arrow[r, dashed, "T_{a';z^p,\lambda^p}"] & K_{a',\lambda^p} \arrow[u, "\alpha^*_{a,\lambda}"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif, d'où

$$U_{a',z^p}(\lambda^p)\ A_a(\lambda) = A_a(z)\ U_{a,z}(\lambda) \ . \tag{2.2}$$

En dérivant, on obtient :

$$E_\lambda(A_a(\lambda)) = A_a(\lambda)\ G_a(\lambda) - p\ G_{a'}(\lambda)^p\ A_a(\lambda) \ . \tag{2.2'}$$

On a encore le diagramme commutatif (pour $\lambda \in \mathcal{U}$)

$$\begin{tikzcd}
K_{a,\lambda} \arrow[r, dashed, "\hat{D}_{a,\lambda}"] & W_{1-a,\lambda} \arrow[d, "\alpha_{1-a,\lambda}"] \\
K_{a',\lambda^p} \arrow[u, "\alpha^*_{a',\lambda}"] \arrow[r, dashed, "p\hat{D}_{a',\lambda^p}"] & W_{1-a',\lambda^p}
\end{tikzcd}$$

qui donne

$$A_a(\lambda)\ \Delta_a(\lambda)\ {}^tA_{1-a}(\lambda) = p\ \Delta_{a'}(\lambda^p) \tag{2.3}$$

et

$$A_{1-a}(\lambda)\ \Delta_a(\lambda)\ {}^tA_a(\lambda) = p\ \Delta_{a'}(\lambda^p) \ ; \tag{2.3'}$$

finalement on a un dernier diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
K_{a,\lambda} \arrow[r, dashed, "\hat{D}_{a,\lambda}"] & W_{1-a,\lambda} \\
K_{a,z} \arrow[u, "T_{a;z,\lambda}"] \arrow[r, dashed, "\hat{D}_{a,z}"] & W_{1-a,z} \arrow[u, "T^*_{1-a;\lambda,z}"']
\end{tikzcd}$$

(ici $T^{*}_{1-a;\lambda,z}$ est l'application transposée de $T_{1-a;\lambda,z} : K_{1-a,\lambda} \longrightarrow K_{1-a,z}$)
d'où :

(2.4) $$U_{a,z}(\lambda)\ \Delta_a(\lambda)\ {}^tU_{1-a,z}(\lambda) = \Delta_a(z)$$

et

(2.4)' $$U_{1-a,z}(\lambda)\ \Delta_a(\lambda)\ {}^tU_{a,z}(\lambda) = \Delta_a(z)\ .$$

On sait comment une formule du genre de (2.2) peut servir à déterminer la croissance p-adique de $U_{a,z}(\lambda)$ pour $|\lambda - z| \uparrow |z| \min(1\ ,\ |z-1|)$, dès qu'on a une connaissance suffisante, du point de vue de la similitude semi-linéaire (théorie de DIEUDONNÉ), de $A_a(\lambda)$. On veut donc construire une théorie similaire pour ${}_3F_2$ en utilisant la formule (1.1) et les propriétés qu'on vient d'énoncer de ${}_2F_1$. En fait, le procédé est tout à fait semblable à celui utilisé par DWORK pour construire la théorie relative à ${}_2F_1\left({a,b \atop c};\lambda\right)$, en partant de celle, élémentaire, de ${}_1F_0(a\ ;\ \lambda) = (1-\lambda)^{-a}$, puisque

$${}_2F_1\left({a\ ,\ b \atop c}\ ;\ \lambda\right) = \mathrm{Cte} \int x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}\ (1-x\lambda)^{-a}\ dx\ .$$

Il est possible de construire inductivement une théorie cohomologique pour ${}_{n+1}F_n$, en utilisant la formule :

$${}_{n+1}F_n\left({a,b_1,\dots,b_n \atop c_1,\dots,c_n};\lambda\right) = \mathrm{Cte} \int x^{b_1-1}(1-x)^{c_1-b_1-1}\ {}_nF_{n-1}\left({a,b_2,\dots,b_n \atop c_2,\dots,c_n};x\lambda\right) dx\ .$$

3. - Soit $S = \{0\ ,\ 1\ ,\ 1/\lambda\ ,\ \infty\}$, $T_0 = x$, $T_1 = 1-x$, $T_{1/\lambda} = 1 - x\lambda$, $T_\infty = 1/x$, et, pour $\nu \in S$, soit $R'_\nu = \mathfrak{Q}((T_\nu))$ (séries formelles à queue négative finie) et $R_\nu = \mathfrak{Q}[[T_\nu]]$, si $\nu \neq \infty$, $R_\infty = T_\infty\ \mathfrak{Q}[[T_\infty]]$.

Considérons le plongement diagonal

$$\mathfrak{L} \hookrightarrow R' = \oplus_{\nu\in S} R'_\nu$$

et soit $\gamma_+ : R' \longrightarrow \mathfrak{L}$,

$$\gamma_+((\xi_\nu)_{\nu\in S}) = \sum_{\nu\in S} P_\nu(\xi_\nu)\ ,$$

où P_ν note la partie principale à ν . On a donc aussi :

$$\gamma_- : R' \longrightarrow R = \oplus_{\nu\in S} R_\nu\ ,$$

$$\gamma_- = id_{R'} - \gamma_+\ .$$

Or, il existe une forme $\mathfrak{Q}$-bilinéaire : $\langle\ ,\ \rangle : R' \times R' \longrightarrow \mathfrak{Q}$,

$$\langle(\xi_\nu)_{\nu\in S}\ ,\ (\eta_\nu)_{\nu\in S}\rangle = \sum_{\nu\in S} \mathrm{Res}_\nu(\xi_\nu\ \eta_\nu)\ ,$$

qui introduit une forme $\mathfrak{D}$-bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle$ sur $R \times \mathfrak{L}$ à noyaux à gauche et à droite nuls, telle que tout élément de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{L}\ ,\ \mathfrak{D})$ soit de la forme $\eta \longmapsto \langle\xi\ ,\ \eta\rangle$, pour un ξ convenable dans R . On en déduit une forme $\mathfrak{D}$-bilinéaire :

$$\langle\ ,\ \rangle : R^2 \times \mathfrak{L}^2 \longrightarrow \mathfrak{L}$$

$$\left(\binom{\xi_1}{\xi_2}\ ,\ \binom{\eta_1}{\eta_2}\right) \longmapsto \langle\xi_1\ ,\ \eta_1\rangle + \langle\xi_2\ ,\ \eta_2\rangle\ .$$

On calcule facilement le transposé de $D_a : \mathfrak{L}^2 \longrightarrow \mathfrak{L}^2$; c'est

$$D_a^* = -\ \gamma_-(x\frac{\partial}{\partial x} + 1 - {}^tG_a(x\ ,\ \lambda) - c_1 - \frac{b_1 - c_1}{1 - x}) = -\ \gamma_-\ \Delta_a^{-1}(x\lambda)\ D_{1-a}\ \Delta_a(x\lambda)\ ,$$

grâce à (2.1)'. Soit

$$K_a = \mathrm{Ker}_{R^2}\ D_a^* = \{(\xi_\nu)_{\nu\in S} \in R^2\ ;\ D_a^*((\xi_\nu)_{\nu\in S}) = 0\}\ .$$

On vérifie que $(\xi_\nu)_{\nu\in S} = \xi$, $\xi_\nu \in R_\nu^2$, est dans K_a si, et seulement si, pour tout $\nu \in S$, on a :

(3.0) $$D_{1-a}\ \Delta_a\ \xi_\nu = [(c_1-c_2)\ \langle\xi\ ,\ \tbinom{1}{0}\rangle + (c_2-b_2)\ \langle\xi\ ,\ \tbinom{0}{1}\rangle]\ (a-c_2)\ \lambda\ \tbinom{1}{0}$$

$$+\ (b_2-c_2)\ [(c_2-a)\ \langle\xi\ ,\ \tbinom{1}{0}\rangle + (a+b_2-c_1-c_2)\ \langle\xi\ ,\ \tbinom{0}{1}\rangle]\ \lambda\ \tbinom{0}{1}$$

$$+\ (b_1-c_1)(a-c_2)\ \langle\xi\ ,\begin{pmatrix}\frac{1}{1-x}\\ 0\end{pmatrix}\rangle\ \lambda\begin{pmatrix}\frac{1}{1-x}\\ 0\end{pmatrix} + (b_1-c_1)(b_2-c_2)\ \langle\xi\ ,\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{1-x}\end{pmatrix}\rangle\ (1-\lambda)\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{1-x}\end{pmatrix}.$$

Un calcul explicite montre que K_a a alors la dimension 4 sur $\mathfrak{D}$ et donc que $\langle\ ,\ \rangle$ induit une $\mathfrak{D}$-dualité entre $W_a = \mathfrak{L}^2/D_a\ \mathfrak{L}^2$ et $K_a = \mathrm{Ker}_{R^2}\ D_a^*$. De plus, si $\xi \in V_a^\perp$ = l'orthogonal de V_a dans K_a , on a

$$\langle\xi\ ,\ \tbinom{1}{0}\rangle = \langle\xi\ ,\ \tbinom{0}{1}\rangle = \langle\xi\ ,\ \begin{pmatrix}\frac{1}{1-x}\\ 0\end{pmatrix}\rangle = \langle\xi\ ,\ \begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{1-x}\end{pmatrix}\rangle = 0$$

et le système (3.0) se réduit donc au système homogène :

(3.1) $$D_{1-a}\ \Delta_a\ \xi_\nu = 0\ ,\quad \nu \in S\ ,\quad \xi_\nu \in R_\nu^2$$

qui admet la solution non nulle $\xi = \bar{\xi}_a = (0\ ,\ 0\ ,\ \bar{\xi}_{1/\lambda}\ ,\ 0)$, où

$$(3.2)\quad \bar{\xi}_{1/\lambda} = \begin{pmatrix} (a + b_2 - c_2)\, x^{b_1-c_2-1}\, (1 - x)^{c_1-b_1}\ {}_2F_1\left({a - c_2\ ,\ b_2 - c_2 \atop a + b_2 - c_2}\ ;\ 1 - x\lambda\right) \\ \\ (a - c_2)\, \lambda x^{b_1-c_2}\, (1 - x)^{c_1-b_1}\ {}_2F_1\left({a + 1 - c_2\ ,\ b_2 + 1 - c_2 \atop a + b_2 + 1 - c_2}\ ;\ 1 - x\lambda\right) \end{pmatrix} .$$

Soit $H_a = V_a^{\perp}$ = sous-$\mathcal{D}$-module de K_a engendré par $\bar{\xi}_a$, et soit

$$(3.3)\qquad \hat{D}_a : K_a \dashrightarrow W_{1-a}$$
$$\xi \longmapsto [D_{1-a}\ \Delta_a(x\lambda)\ \xi]$$

ou [ ] note la "classe modulo $D_{1-a}\ \mathcal{E}^2$ ". Remarquons que $\hat{D}_a\, K_a = V_{1-a}$ et que la suite de $\mathcal{D}$-modules

$$(3.4)\qquad 0 \dashrightarrow H_a \hookrightarrow K_a \xrightarrow{\hat{D}_a} V_{1-a} \dashrightarrow 0$$

est exacte. Or K_a est le $\mathcal{D}/\underset{\sim}{Q}$-module différentiel dual de W_a , en posant

$$\nabla_a^*(E_\lambda) = \gamma\_(E_\lambda - {}^tG_{a,b_2,c_2}(x\lambda)) .$$

Démontrons que $\hat{D}_a : K_a \dashrightarrow W_{1-a}$ est un morphisme de $\mathcal{D}/\underset{\sim}{Q}$ -modules différentiels, ce qui prouve aussi que H_a est sous-$\mathcal{D}/\underset{\sim}{Q}$-module différentiel de K_a et fournit la démonstration "raisonnée" du fait que V_{1-a} est stable dans W_{1-a} par l'action de $\nabla_{1-a}(E_\lambda)$. En fait, pour ξ dans K_a :

$$\hat{D}_a\ \nabla_a^*(E_\lambda)\ \xi = [D_{1-a}\ \Delta_a(x\lambda)\ \gamma\_(E_\lambda - {}^tG_a(x\lambda))\ \xi]$$

$$= [D_{1-a}\ \Delta_a(x\lambda)(E_\lambda - {}^tG_a(x\lambda))\ \xi] = [D_{1-a}(E_\lambda\ \Delta_a - E_\lambda(\Delta_a) - \Delta_a\ {}^tG_a)\ \xi]$$

$$= [D_{1-a}(E_\lambda + G_{1-a}(x\lambda)\ \Delta_a(x\lambda)\ \xi] = \nabla_{1-a}(E_\lambda)\ \hat{D}_a\ \xi\ , \quad (\text{par } (2.1)') ,$$

où a signifie $(a\ ,\ b_2\ ,\ c_2)$ dans G_a , Δ_a et $(a\ ,\ b_1\ ,\ b_2\ ,\ c_1\ ,\ c_2)$ dans D_a , $\hat{D}_a$, ∇_a , et de même pour $1 - a$.

Considérons la table :

(3.5)

ν	0	1	$1/\lambda$	∞
t_ν	λ	$1/\lambda-1$	$1/1-\lambda$	$1/\lambda$

On a le théorème suivant :

THÉORÈME 3.6. - Soit

$$\xi = (\xi_\nu)_{\nu\in S} \quad K_a \ , \quad \xi_\nu = \binom{\xi_{\nu 1}}{\xi_{\nu 2}} \ , \ \text{pour} \quad \nu \in S \ .$$

Pour tout $\nu \in S$, $i = 1 , 2$, il existe des $\alpha_{\nu,i} \in \mathfrak{Z}$ tels que

$$\alpha_{\nu i}\, \xi_{\nu i} = \sum_{h=0}^{\infty} C_h(t_\nu)\, T_\nu^h \ ,$$

où $C_h(t_\nu) \in \mathbb{Q}[t_\nu]$ est un polynôme (dépendant de ν , i) de degré $\leqslant h$, à coefficients bornés par h^3 .

4. - Le théorème 3.6 suggère de poser, pour $\lambda \in \Omega$, $\lambda \neq 0 , 1$,

(4.1)

ν	0	1	$1/\lambda$	∞
Γ_ν	$\min(1, \frac{1}{\lvert\lambda\rvert})$	$\min(1, \lvert\frac{\lambda-1}{\lambda}\rvert)$	$\min(1, \lvert\lambda-1\rvert)$	$\min(1, \lvert\lambda\rvert)$

,

et implique que si, dans $\xi \in K_a$, on spécialise λ à une valeur $\neq 0 , 1$ de Ω , les séries $\xi_{\nu,i}$ convergent pour $|T_\nu| < \Gamma_\nu$, avec $\nu \in S$, $i = 1 , 2$. Définissons alors, pour $\lambda \in \Omega$, $\lambda \neq 0 , 1$,

L_λ = {fonctions analytiques pour $|T_\nu| > \epsilon_\nu$, où, pour $\nu \in S$, $0 < \epsilon_\nu < \Gamma_\nu$, ϵ_ν indéterminé} ,

$R'_\nu(\lambda)$ = {séries dans $\Omega((T_\nu))$ qui convergent pour $\epsilon_\nu < |T_\nu| < \Gamma_\nu$, $0 < \epsilon_\nu < \Gamma_\nu$, ϵ_ν indéterminé} ,

$R_\nu(\lambda) = \{\xi \in R'_\nu(\lambda)$; ξ est holomorphe pour $T_\nu = 0\}$, si $\nu \neq \infty$,

$R_\infty(\lambda) = \{\xi \in R'_\infty(\lambda)$; ξ s'annule pour $T_\infty = 0\}$,

$R'(\lambda) = \oplus_{\nu\in S} R'_\nu(\lambda)$ et $R(\lambda) = \oplus_{\nu\in S} R_\nu(\lambda)$.

Comme dans le cas formel, on a une forme Ω-bilinéaire à noyaux à gauche et à droite nuls, et des applications γ_+ et γ_- . L'indice λ ($\in \Omega$, $\neq 0 , 1$) note dorénavant la spécialisation, pour λ , de variable à nombre p-adique de l'objet déjà défini pour λ générique. Un théorème de ADOLPHSON garantit que $W_{a,\lambda} = L_\lambda^2/D_{a,\lambda}\, L_{\lambda_*}^2$ est un Ω-espace vectoriel de base $e_{a,\lambda}$. De plus, $K_{a,\lambda} = \mathrm{Ker}_{R(\lambda)^2}\, D_{a,\lambda}$ admet la base $e^*_{a,\lambda}$, et est dual de $W_{a,\lambda}$. Remarquons que si $x_0 \in \Omega \setminus \{0 , 1\}$ et $f_{b,c,x_0}(x)$ note une branche de $x^b(1 - x)^{c-b}$ pour x

près de x_0 , on a, en tant qu'opérateurs agissant sur un espace de fonctions de x analytiques près de x_0 ,

(4.2) $D_{a,\lambda} = f^{-1}_{b_1,c_1,x_0}(x)\ U^{-1}_{a,b_2,c_2,x_0\lambda}(x\lambda)\ E_x\ U_{a,b_2,c_2,x_0\lambda}(x\lambda)\ f_{b_1,c_1,x_0}(x)$.

Soient maintenant λ , $z \in \Omega$, $z \neq 0$, 1 , $|\lambda - z| < |z| \min(1 , |z - 1|)$; dans ce cas, $|\lambda| = |z|$, $|\lambda - 1| = |z - 1|$, $L_\lambda = L_z$, $R(\lambda) = R(z)$.

Soit alors :

(4.3)
$$T_{a;z,\lambda} : R(z)^2 \longrightarrow R(\lambda)^2$$
$$\xi \longmapsto \gamma_-\ {}^tU_{a,b_2,c_2,xz}(x\lambda)\ .$$

On sait que ${}^tU_{a,b_2,c_2,xz}(x\lambda)$ converge pour $|x\lambda - xz| < |xz| \min(1 , |1 - xz|)$, et donc pour $|1 - xz| > |\lambda - z|/|z|$; mais $|\lambda - z|/|z| < \min(1 , |z - 1|) = \Gamma_{1/z}$ d'où ${}^tU_{a,b_2,c_2,xz}(x\lambda) \in M_{2,2}(L_z)$.

Vérifions que

(4.4)
$$D^*_{a,\lambda}\ T_{a;z,\lambda} = T_{a;z,\lambda}\ D^*_{a,z}$$

c'est-à-dire que :

$$\gamma_-\ \Delta^{-1}(x\lambda)\ D_{1-a,\lambda}\ \Delta_a(x\lambda)\ {}^tU_{a,xz}(x\lambda) = \gamma_-\ {}^tU_{a,xz}(x\lambda)\ \Delta^{-1}(xz)\ D_{1-a,z}\ \Delta_a(xz)\ .$$

Grâce à (2.4)', la formule précédente équivaut à

$$\gamma_-\ \Delta^{-1}_a(x\lambda)\ D_{1-a,\lambda}\ U_{1-a,x\lambda}(xz)\ \Delta_a(xz) = \gamma_-\ \Delta^{-1}_a(x\lambda)\ U_{1-a,x\lambda}(xz)\ D_{1-a,z}\ \Delta_a(xz)\ .$$

Si $x_0 \in \Omega \setminus \{0 , 1\}$, on a :

$$D_{1-a,\lambda}\ U_{1-a,x\lambda}(xz) = D_{1-a,\lambda}\ U^{-1}_{1-a,x_0\lambda}(xz)\ U_{1-a,x_0\lambda}(xz)$$

$$= f^{-1}_{1-b_1,1-c_1,x_0}(x)\ U^{-1}_{1-a,x_0\lambda}(x\lambda)\ E_x\ U_{1-a,x_0 z}(xz)\ f_{1-b_1,1-c_1,x_0}(x)$$

$$= U^{-1}_{1-a,x_0\lambda}(x\lambda)\ U_{1-a,x_0}(xz)\ f^{-1}_{1-b_1,1-c_1,x_0}(x)\ U^{-1}_{1-a,x_0}(xz)$$
$$E_x\ U_{1-a,x_0\lambda}(xz)\ f_{1-b_1,1-c_1,x_0}(x)$$

$$= U_{1-a,x\lambda}(xz)\ D_{1-a,z}\ ,$$

d'où (4.4).

On obtient donc une application (Ω-isomorphisme, puisque elle est inversible par l'échange de λ et z) :

(4.5) $$T_{a;z,\lambda} : K_{a,z} \longrightarrow K_{a,\lambda} .$$

Le calcul explicite de

$$\langle T_{a;z,\lambda}\, e^{(i)*}_{a,z} \,,\, e^{(j)}_{a,\lambda}\rangle = \langle {}^tU_{a,xz}(x\lambda)\, e^{(i)*}_{a,z} \,,\, e^{(j)}_{a,\lambda}\rangle$$

montre que la matrice $C_{a,z}(\lambda)$ telle que $T_{a;z,\lambda}\, e^{*}_{a,z} = C_{a,z}(\lambda)\, e^{*}_{a,\lambda}$ est analytique dans $\mathcal{E}_z = \{\lambda \in \Omega \,;\; |\lambda - z| < |z| \min(1 \,,\, |z-1|)\}$.

Le fibré vectoriel (banal) sur $\Omega \setminus \{0 \,,\, 1\}$ de base globale $\{e^{*}_{a,\lambda}\}_{\lambda\in\Omega\setminus\{0,1\}}$ s'identifie, par l'identification de $e^{(i)*}_{a}$ à la section globale $\lambda \dashrightarrow e^{(i)*}_{a,\lambda}$, au fibré vectoriel (à connexion) $\underset{\sim}{K}_a$ canoniquement associé au $\mathcal{D}/\underset{\sim}{Q}$-module différentiel K_a . La dérivée covariante d'une section ξ de $\underset{\sim}{K}_a$ sur un ouvert U se calcule, dans l'identification précédente, par la formule

(4.6) $$\nabla^{*}_a(E_\lambda)\; \xi = \gamma_-(\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda} - {}^tG_a(x\lambda))\; \xi ,$$

où ξ est considérée comme fonction analytique de x et de λ . Vérifions que $T_{a;z,\lambda}$ est le transport parallèle de $K_{a,z}$ à $K_{a,\lambda}$. En effet :

$$\nabla^{*}_a(E_\lambda)\; T_{a;z,\lambda}\; e^{*}_{a,z} = \gamma_-(\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda} - {}^tG_a(x\lambda))\; \gamma_-\; U_{a,xz}(x\lambda)\; e^{*}_{a,z}$$

$$= \gamma_-(\lambda \frac{\partial}{\partial\lambda} - {}^tG_a(x\lambda))\; U_{a,xz}(x\lambda)\; e^{*}_{a,z} = \gamma_-\; U_{a,xz}(x\lambda)\; \lambda \frac{\partial}{\partial\lambda}\; e^{*}_{a,z} = 0.$$

Il s'en suit en particulier que les solutions de L_{a,b_1,b_2,c_1,c_2} convergent p-adiquement jusqu'à la plus proche singularité.

Rappelons qu'on a posé $\mathcal{U} = \{\lambda \in \Omega \setminus \{0\} \;;\; |\lambda - 1| > p^{-1/(p-1)}\}$.

On posera

(4.7) $$\chi_{b_1,c_1}(x) = x^{-\mu_{b_1}}(1-x)^{\mu_{b_1}-\mu_{c_1}} \left(\frac{(1-x)^p}{1-x^p}\right)^{c_1'-b_1'} \in L_\lambda .$$

Soient $z_1 , \ldots , z_p$ les p racines p-ièmes de $x_0 \in \mathcal{U}$; on a alors :

(4.8) $$f_{b_1',c_1',x_0}(z^p)\; \chi_{b_1,c_1}(z) = \chi_{b_1,c_1}(z_i)\; f_{b_1,c_1,z_i}(z) \;,\quad i = 1 , \ldots , p$$

et, de même :

(4.9) $$U_{a_1',b_2',c_2',x_0\lambda^p}(z^p\lambda^p)\; A_{a,b_2,c_2}(z\lambda)$$

$$= A_{a,b_2,c_2}(z_i\,\lambda)\; U_{a,b_2,c_2,z_i\lambda}(z\lambda) \;,\quad i = 1 , \ldots , p .$$

En partant de ces considérations, on prouve facilement que, si l'on pose

$$(4.10)\qquad \begin{aligned} \alpha_{a,\lambda} : L^2_\lambda &\longrightarrow L^2_{\lambda^p} \\ \xi &\longmapsto \psi(\chi_{b_1,c_1}(x)\, A_{a,b_1,c_2}(x\lambda)\, \xi) , \end{aligned}$$

ψ étant l'application de Dwork, on a

$$(4.11)\qquad \alpha_{a,\lambda}\, D_{a,\lambda} = p\, D_{a',\lambda^p}\, \alpha_{a,\lambda} .$$

On obtient donc une application

$$(4.12)\qquad \alpha_{a,\lambda} : W_{a,\lambda} \longrightarrow W_{a',\lambda^p}$$

qui est en effet un Ω-isomorphisme. Par dualité

$$(4.13)\qquad \begin{aligned} \alpha^*_{a,\lambda} : R(\lambda^p)^2 &\longrightarrow R(\lambda)^2 \\ \xi &\longmapsto \gamma\_(x^{p-1}\, \chi_{b_1,c_1}(x)\, {}^tA_{a,b_2,c_2}(x\lambda)\, \varphi\, \xi) \end{aligned}$$

où $(\varphi\xi)(x) = \xi(x^p)$, satisfait

$$(4.14)\qquad D^*_{a,\lambda}\, \alpha^*_{a,\lambda} = p\, \alpha^*_{a,\lambda}\, D^*_{a',\lambda^p}$$

et donne un isomorphisme :

$$(4.15)\qquad \alpha_{a,\lambda} : K_{a',\lambda^p} \longrightarrow K_{a,\lambda}$$

Soit $B_a(\lambda)$ la matrice de $\alpha^*_{a,\lambda}$,

$$\alpha^*_{a,\lambda}\, e^*_{a',\lambda^p} = B_a(\lambda)\, e^*_{a,\lambda} .$$

On peut démontrer que, comme dans le cas de ${}_2F_1\left({a,b \atop c};\lambda\right)$, $B_a(\lambda)$ est analytique dans $\mathfrak{U}$, avec des singularités polaires à 0 et ∞ .

Nous allons montrer que le diagramme

$$(4.20)\qquad \begin{array}{ccc} K_{a,z} & \xrightarrow{T_{a;z,\lambda}} & K_{a,\lambda} \\ {\scriptstyle \alpha^*_{a,z}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \alpha^*_{a,\lambda}} \\ K_{a',z^p} & \xrightarrow{T_{a';z^p,\lambda^p}} & K_{a',z^p} \end{array}$$

est commutatif. En effet,

$$\alpha^*_{a,\lambda}\, T_{a';z^p,\lambda^p} = \gamma_-\, x^{p-1}\, \chi_{b_1,c_1}(x)\; {}^tA_a(x\lambda)\; \varphi\; \gamma_-\; {}^tU_{a',xz}(x\lambda^p) =$$

$$= \gamma_-\, x^{p-1}\, \chi_{b_1,c_1}(x)\; {}^tA_a(x\lambda)\; \varphi\; {}^tU_{a',xz^p}(x\lambda^p)$$

$$= \gamma_-\, x^{p-1}\, \chi_{b_1,c_1}(x)\; {}^tA_a(x\lambda)\; {}^tU_{a',x^pz^p}(x^p\lambda^p)\; \varphi$$

$$= \gamma_-\, x^{p-1}\, \chi_{b_1,c_1}(x)\; {}^tU_{a,xz}(x\lambda)\; {}^tA_a(xz)\; \varphi$$

$$= \gamma_-\; {}^tU_{a,xz}(x\lambda)\; \gamma_-\, x^{p-1}\, \chi_{b_1,c_1}(x)\; {}^tA_a(xz)\; \varphi = T_{a;z,\lambda}\, \alpha^*_{a,z}\,.$$

On prouve encore facilement que le diagramme :

(4.21)
$$\begin{array}{ccc} K_{a,\lambda} & \xrightarrow{\hat D_{a,\lambda}} & W_{1-a,\lambda} \\ \uparrow{\scriptstyle \alpha^*_{a,\lambda}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{1-a,\lambda}} \\ K_{a',\lambda^p} & \xrightarrow{p^2\, \hat D_{a',\lambda^p}} & W_{1-a',\lambda^p} \end{array}$$

est commutatif. Comme $\hat D_{a,\lambda}\, K_{a,\lambda} = V_{1-a,\lambda}$, on conclut que $\alpha_{a,\lambda}\, V_{a,\lambda} = V_{a',\lambda^p}$.

On a ainsi démontré que le fibré vectoriel à connexion $\underset{\sim}{V}_a$, associé au $\mathcal{D}/\underset{\sim}{Q}$-module différentiel V_a, et donc à L_{a,b_1,b_2,c_1,c_2} et à ${}_3F_2\left(\begin{matrix}a,b_1,b_2\\c_1,c_2\end{matrix};\lambda\right)$ est muni d'un morphisme horizontal

(4.22)
$$\bar{\underset{\sim}{\alpha}}_a : \underset{\sim}{V}_a|\mathcal{U} \dashrightarrow \varphi^*\, \underset{\sim}{V}_{a'}|\mathcal{U}\,.$$

Si $\underset{\sim}{H}_a$ note le fibré vectoriel à connexion associé à H_a, on a également un morphisme horizontal :

(4.23)
$$\tilde{\underset{\sim}{\alpha}}^*_a : \varphi^*\, \underset{\sim}{H}_{a'}|\mathcal{U} \dashrightarrow \underset{\sim}{H}_a|\mathcal{U}$$

induit par

$$\underset{\sim}{\alpha}^*_a : \varphi^*\, \underset{\sim}{K}_{a'}|\mathcal{U} \dashrightarrow \underset{\sim}{K}_a|\mathcal{U}\ ,$$

où $\underset{\sim}{K}_a$ est le fibré vectoriel associé à K_a. On a le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$(4.24)\qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \underset{\sim}{H}_a|\mathcal{U} \arrow[r, hook] & \underset{\sim}{K}_a|\mathcal{U} \arrow[r, "\hat{D}_a|\mathcal{U}"] & \underset{\sim}{V}_{1-a}|\mathcal{U} \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \varphi^* \underset{\sim}{H}_{a'}|\mathcal{U} \arrow[r, hook] \arrow[u, "\tilde{\underset{\sim}{\alpha}}^*_a"] & \varphi^* \underset{\sim}{K}_{a'}|\mathcal{U} \arrow[r, "\varphi^* \hat{D}_{a'}|\mathcal{U}"] \arrow[u, "\underset{\sim}{\alpha}^*_a"] & \varphi^* \underset{\sim}{V}_{1-a'}|\mathcal{U} \arrow[r] \arrow[u, "p^2\, \bar{\underset{\sim}{\alpha}}^{-1}_{1-a}"'] & 0 \end{tikzcd}$$

Remarquons encore que l'application

$$(4.25)\qquad \begin{aligned} [\ ,\ ] : V_{1-a} \times V_a &\longrightarrow \mathfrak{Q} \\ (v\ ,\ w) &\longmapsto \langle \xi\ ,\ w \rangle\ , \end{aligned}$$

où $\hat{D}_a\, \xi = v$, $\xi \in K_a$, est bien définie puisque $H_a = V_a$, et que c'est une dualité de $\mathfrak{Q}/\underset{\sim}{Q}$-modules différentiels. De plus, on a, pour la dualité spécialisée avec $\lambda \in \mathfrak{Q}$,

$$[\ ,\ ]_\lambda : V_{1-a,\lambda} \times V_{a,\lambda} \longrightarrow \Omega\ ,$$

$$(4.26)\qquad [\alpha_{1-a,\lambda}\, v\ ,\ \alpha_{a,\lambda}\, w]_{\lambda^p} = p^2 [v\ ,\ w]_\lambda\ .$$

Soit en effet $\eta \in K_{a',\lambda^p}$ tel que $\hat{D}_{a',\lambda^p}\, \eta = \alpha_{1-a,\lambda}\, v$; soit $\alpha^*_{a,\lambda}\, \eta = p^2\, \xi \in K_{a,\lambda}$. On a alors

$$p^2\, \hat{D}_{a,\lambda}\, \xi = \hat{D}_{a,\lambda}\, \alpha^*_{a,\lambda}\, \eta = (\text{grâce à } (4.21))\ \ p^2\, \alpha^{-1}_{1-a,\lambda}\, \hat{D}_{a',\lambda^p}\, \eta = p^2\, v\ ;$$

donc $\hat{D}_{a,\lambda}\, \xi = v$ et

$$[\alpha_{1-a,\lambda}\, v\ ,\ \alpha_{a,\lambda}\, w]_{\lambda^p} = \langle \eta\ ,\ \alpha_{a,\lambda}\, w \rangle_{\lambda^p} = \langle \alpha^*_{a,\lambda}\, \eta\ ,\ w \rangle_\lambda = p^2\, \langle \xi\ ,\ w \rangle_\lambda = p^2 [v\ ,\ w]_\lambda\ .$$

Si on emploie donc toujours la base $e^1_{a,\lambda}$ dans $V_{a,\lambda}$, puisque le déterminant de la matrice de $[\ ,\ ]_\lambda$ a, en général, l'ordre p-adique 0 , on obtient :

$$(4.27)\qquad \operatorname{ord} \det \alpha_{a,\lambda} + \operatorname{ord} \det \alpha_{1-a,\lambda} = 6\ .$$

Pour obtenir des renseignements sur la croissance des solutions de L_a au bord du disque de convergence il faudrait encore étudier la matrice de $\alpha_{a,\lambda}$ du point de vue de la théorie de DIEUDONNÉ. La formule (4.27) nous indique qu'il sera en particulier nécessaire de calculer la matrice $B_a(\lambda) \in M_{3,3}(\mathfrak{Q}_0')$ modulo $\varphi^3\, \mathfrak{Q}_0'$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DWORK (B.). - Lectures on p-adic differential equations. - New York, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1982 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 253).