GROUPE DE TRAVAIL
D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

DANIEL BARSKY

**Sur la norme de certaines séries d'Iwasawa (une démonstration analytique $p$-adique du théorème de Ferrero-Washington)**

*Groupe de travail d'analyse ultramétrique*, tome 10, nº 1 (1982-1983), exp. nº 13, p. 1-44
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1982-1983__10_1_A8_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
10e année, 1982/83, n° 13, 44 p. 
7, 14 et 21 mars 1983

# SUR LA NORME DE CERTAINES SÉRIES D'IWASAWA.

## (Une démonstration analytique p-adique du théorème de Ferrero-Washington).

par Daniel BARSKY (*)

Résumé. - En partant de la définition de KUBOTA et LEOPOLDT des fonctions L p-adiques, on donne une construction de la série d'Iwasawa associée. Cette construction est basée sur les propriétés de l'opérateur de convolution sur les entiers introduit par Y. AMICE. Les propriétés de cet opérateur donnent de nombreuses identités pour ces séries d'Iwasawa, dont certaines sont non classiques.

Comme application on donne une démonstration du théorème de Ferrero-Washington sur la nullité de l'invariant $\mu_p(K)$ d'Iwasawa pour les corps de nombres $K$ abéliens sur $\mathbb{Q}$. Cette démonstration est entièrement analytique p-adique, différente de celle de Ferrero-Washington, et conduit à une majoration de l'invariant $\lambda_p(K)$.

Notations et rappels. - On désigne par $p$ un nombre premier. On pose, si $p = 2$, $q = 4$, et, si $p \neq 2$, $q = p$. Les notations non définies sont celles d'AMICE [Am 1] ou IWASAWA [Iw 1]. On désigne par $\mathbb{C}_p$ le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, la valeur absolue sur $\mathbb{C}_p$, notée $|.|$, est normalisée par $|p| = p^{-1}$.

Dans toute la suite, $\theta$ désigne un caractère de Dirichlet primitif pair de conducteur $m$ ou $mq$ avec $(m, p) = 1$. On note $\mu_{p^n}$ le groupe des racines $p^n$-ièmes de l'unité et $\mu_{p^n}^*$ le groupe des racines primitives $p^n$-ièmes de l'unité.

Si $\zeta \in \mu_{p^n}^*$, on notera $\pi_\zeta$ (où $\pi$ si aucune confusion n'est à craindre) l'unique caractère de Dirichlet de conducteur $qp^n$ et d'ordre $p^n$ tel que $\pi(1 + mq) = \zeta^{-1}$, $\pi$ est un caractère de deuxième espèce au sens d'IWASAWA [Iw 1] et tout caractère de deuxième espèce est associée de manière unique à une racine primitive $p^n$-ième de l'unité pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On note $\omega$ le caractère de Teichmüller sur $\mathbb{Z}_p$ [Iw 1]. Tout caractère de Dirichlet (pair ou impair) $\chi$ de conducteur $mqp^n$ peut se mettre de manière unique sous l'une des formes : $\chi = \theta\pi$ ou bien $\chi\omega = \theta\pi$ (cf. Lemme 6 ci-après).

On note, si $a \in \mathbb{C}_p$ et $r \in \mathbb{R}_+$ :

$$D(a , r)^+ = \{x \in \mathbb{C}_p ; |x - a| \leq r\}$$

$$D(a , r)^- = \{x \in \mathbb{C}_p ; |x - a| < r\} .$$

---

(*) Daniel BARSKY, UER Math. et Inform., Univ. Paris-7, 2 place Jussieu, 75251 PARIS CEDEX 05.

On notera dans tout l'article :

$$K_\theta = \mathbb{Q}_p[\theta(1) , \theta(2) , \dots , \theta(mq - 1)] .$$

$\mathcal{O}_\theta$ l'anneau des entiers de $K_\theta$

$\mathcal{O}_p$ l'anneau des entiers de $\mathbb{C}_p$ .

On pose aussi $\rho_p = qp^{-1/(p-1)}$ , et on note pour $s \in D(1 , \rho_p)^-$ et pour $\chi = \theta\pi$, $L_p(s , \chi)$ la fonction L p-adique de Kubota-Leopoldt associée au caractère $\chi$ primitif pair de conducteur m ou $mqp^n$ ([Iw 1] ou [K-L 1]).

Rappelons que, par définition, la série d'Iwasawa $I_\theta(T)$ associée à $\theta$ est, si $\theta$ est non trivial, l'unique série de Taylor de $\mathcal{O}_\theta[[T]]$ telle que, pour tout $\zeta \in \bigcup_{n\geqslant 0} \mu_{p^n} = \mu_{p^\infty}$ , pour tout $s \in D(1 , \rho_p)^-$ ,

$$L_p(s , \theta \pi_\zeta) = I_\theta((1 + mq)^s \zeta - 1) ,$$

si $\theta = \varepsilon$ est le caractère trivial, $(T - q) I_\varepsilon(T)$ est l'unique série de Taylor de $\mathbb{Z}_p[[T]]$ telle que, pour tout $(s , \zeta) \in D(1 , \rho_p)^- \times \mu_{p^\infty} - \{1 , 1\}$ ,

$$L_p(s , \pi_\zeta) = I_\varepsilon((1 + mq)^s \zeta - 1) .$$

Nous donnons au paragraphe 3 une démonstration de l'existence de $I_\theta(T)$ à partir des formules de Kubota-Leopoldt, montrant ainsi que les deux méthodes exposées dans [Iw 1] sont en fait identiques.

Nous rappelons au paragraphe 1, quelques propriétés de l'opération de convolution qur les entiers, introduit par AMICE, opérateur qui semble central dans l'étude des fonctions L p-adiques et fonctions voisines ([Am 2], [C-N 2], D 1]) et qui, sous une autre forme, apparaissait déjà dans la thèse de 3e cycle de Pierrette CASSOU-NOGUÈS [C-N 1 et 2].

Soit K un corps de nombres abélien, de degré fini sur $\mathbb{Q}$ , soit $K_n = K[\zeta_n]$ , où $\zeta_n \in \mu^*_{p^n}$ , et soit $K_\infty = \bigcup_{n\geqslant 0} K_n$ . K. IWASAWA a montré que, si $h_n$ est le nombre de classe de $K_n$ et si $p^{e_n}$ est la plus grande puissance de p qui divise $h_n$ il existe des entiers $n_0 = n_0(K)$ , $\mu_p(K) = \mu_p$ , $\lambda_p(K) = \lambda_p$ , $\nu_p(K) = \nu_p$ tels que, si $n \geqslant n_0$ ,

$$e_n = \mu_p p^n + \lambda_p n + \nu_p .$$

Le théorème de Ferrero-Washington [F-W 1] affirme que $\mu_p(K) = 0$ si K est abélien sur $\mathbb{Q}$ . B. FERRERO [F 1] a montré que $\mu_p(K) = 0$ pour tout corps de nombres K , abélien sur K , équivaut à $\mu_p^-(K) = 0$ pour tout corps de nombres imaginaire abélien K de conducteur non divisible par pq , où $\mu_p^-(K)$ est défini de la manière suivante. On note $K_n^+$ le sous-corps totalement réel maximal contenu dans K , et $h_n^+$ son nombre de classe, on sait que $h_n^- = h_n/h_n^+$ est un entier [W 1]. Si K est abélien, totalement imaginaire, la formule analytique donnant $h_n^-$ ([Iw 1], [W 1], [Ha 2] au paragraphe 6) montre que si $e_n^-$ est l'exposant de la plus haute puissance de $p$ divisant $h_n^-$, il existe $n_0$, $\mu_p^-$, $\lambda_p^-$, $\nu_p^-$ entiers positifs ou nuls tels que si $n \geqslant n_0$,

$$e_n^- = \lambda_p^-.n + \mu_p^-.p^n + \nu_p^- .$$

Posons

$$p^{-\mu_\theta} = \sup_{|T|<1} \left|\tfrac{1}{2} I_\theta(T)\right| = \left\|\tfrac{1}{2} I_\theta\right\| ,$$

et notons $\lambda_\theta = \lambda(\theta)$ le nombre de zéros de $I_\theta(T)$ dans $D(0 , 1)^-$, nombre qui est fini car $I_\theta(T) \in \mathcal{O}_\theta[[T]]$. Si $K$ est abélien totalement imaginaire de conducteur $m$ ou $mq$, avec $(m , p) = 1$, la formule analytique, donnant $h_n^-$, montre que

$$\mu_p^- = \textstyle\sum_\theta \mu_\theta$$

où la somme est étendue à tous les caractères de Dirichlet primitifs **pairs** non triviaux $\theta$ tels que $\theta\,\omega^{-1} \in Ch^-(K)$ où $Ch^-(K)$ est l'ensemble des caractères de Dirichlet **impairs** associé au groupe de Galois de $K$ sur $\mathbb{Q}$.

Nous montrons, au paragraphe 4, que $\mu_\theta = 0$ si $p = 2$ ou $3$, pour tout $\theta$ non trivial ; au paragraphe 5, nous montrons que $\mu_\theta = 0$ pour tout $p \geqslant 5$ et tout $\theta$ non trivial. Au paragraphe 6, nous donnons une majoration de $\lambda_\theta$, ce qui donne une majoration de $\lambda_p^-$ et de $\lambda_p$, meilleure que celle de [F-W 1] et du même ordre que celle de [Me 1], pour des corps $K = \mathbb{Q}[\xi]$, où $\xi$ est une racine $m$-ième ou $mq$-ième primitive de l'unité.

Le principe de la démonstration est le suivant.

On montre, au paragraphe 4, qu'il y a toujours, pour tout caractère $\theta$, un entier $j$, $0 \leqslant 2j \leqslant p - 3$, tel que

$$\left\|\tfrac{1}{2} I_{\theta\omega^{-2j}}\right\| = 1 .$$

On écrit toute fonction analytique bornée sur $D(0 , 1)^-$, $F$, sous la forme (proposition 4)

$$F(T) = \textstyle\sum_{i\geqslant 0} ((1 + T)^{p^h} - 1)^i \, F_{h,i}(T)$$

où

$$F_{h,i}(T) = \textstyle\sum_{k=0}^{p^h-1} b_{k,h,i}(1 + T)^k \in \mathbb{C}_p[T]$$

$$\|F\| = \sup_{i\geqslant 0} \|F_{h,i}\| = \sup_{h\geqslant 0} \|F_{h,0}\| .$$

On emploie la notation suivante dans tout l'article :

$$\sup_{|T|<1} |F(T)| = \|F\| ,$$

si $F$ est une fonction analytique bornée sur $D(0\ ,\ 1)^-$. On écrit alors, comme ci-dessus :

$$I_\theta(T) = \sum_{i\geq 0} ((1+T)^{p^h} - 1)^i \, I_{\theta,h,i}(T) .$$

On suppose que $\mu_\theta > 0$ et $\mu_{\theta\omega^{-2}} = 0$, et on choisit $h$ de telle sorte que

$$\|I_{\theta\omega^{-2},h,0}\| = 1 .$$

On montre alors, à l'aide d'une formule qui se trouve implicitement chez DIAMOND [D 1] et WASHINGTON [W 2], qu'alors nécessairement il existe $i$ , $0 \leq i \leq 2$ , tel que

$$\|I_{\theta,h,i}\| = 1$$

ce qui entraine $\mu_\theta = 0$ .

Ceci démontre le théorème de Ferrero-Washington par une méthode différente de [F-W 1], qui avait été employée de manière indirecte pour $p = 5$ par FERRERO dans [F 1]. Par ailleurs, W. SINNOTT a donné une autre démonstration de ce théorème basée sur la construction de KATZ [Ka 1] des fonctions L p-adique, [S 1].

On pose

$$\langle a \rangle = \frac{a}{\omega(a)} , \text{ si } a \in \mathbb{Z}_p , \quad |a| = 1 .$$

## 1. Opérateur de convolution.

On note $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p , \mathbb{C}_p)$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{Z}_p$ à valeur dans $\mathbb{C}_p$ muni de la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{Z}_p$ ; on note $\mathcal{CU}_1(\mathbb{Z}_p , \mathbb{C}_p)$ l'espace des fonctions continûment et uniformément différentiables sur $\mathbb{Z}_p$ , [He 1]. On note aussi, si $r \in \mathbb{R}_+$ , $\mathcal{A}_r^+$ l'espace des fonctions analytiques sur $D(0\ ,\ r)^+$ , et $\mathcal{A}_r^-$ l'espace des fonctions analytiques sur $D(0\ ,\ r)^-$ .

DÉFINITION 1. - Soit $f$ une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}_p$ . On pose, si $n \in \mathbb{N}-\{0\}$:

$$(1 * g)(n) = g(0) + g(1) + \ldots + g(n-1) .$$

Cette définition, ainsi que les principales propriétés de l'opérateur de convolution $g \dashrightarrow (1 * g)$ , sont dues à AMICE, avec des conventions légèrement différentes [Am 2]. Une autre présentation de l'opérateur de convolution a été donnée par Pierrette CASSOU-NOGUÈS dans sa thèse de 3e cycle [CN 2] ; elle y étudie le problème suivant :

Soit $g \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p , \mathbb{C}_p)$ ; trouver $\tilde{g} \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p , \mathbb{C}_p)$ tel que $\tilde{g}(n) - \tilde{g}(n-1) = g(n-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ .

LEMME 1. - L'opérateur de convolution possède des propriétés suivantes :

(i) $1 * g \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{C}_p)$ si, et seulement si, $g \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{C}_p)$

(ii) si $g \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{C}_p)$ et si $g(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \binom{x}{n}$ , avec $\lim_{n \to +\infty} |a|_n = 0$ , alors :

$$(1 * g)(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \binom{x}{n+1}$$

et en particulier $(1 * g)(0) = 0$ .

On sait ([Ma 1] ou [An 2]) que $g \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{C}_p)$ si, et seulement si, il existe une suite $(a_k(g))_{k \geq 0}$ d'éléments de $\underset{\sim}{C}_p$ telle que $\lim_{k \to \infty} |a_k(g)| = 0$ et, pour tout $x \in \underset{\sim}{Z}_p$ ,

$$g(x) = \sum_{k \geq 0} a_k \binom{x}{k} .$$

Alors si $n \in \underset{\sim}{N} - \{0\}$ ,

$$(1 * g)(n) = \sum_{a=0}^{n-1} \sum_{k \geq 0} a_k \binom{a}{k} = \sum_{k \geq 0} a_k \binom{n}{k+1} .$$

La fonction

$$x \longrightarrow (1 * g)(x) = \sum_{k \geq 0} a_k \binom{x}{k+1}$$

est définie pour tout $x \in \underset{\sim}{Z}_p$ , et appartient à $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{C}_p)$ ; en outre, elle coincide avec $(1 * g)$ sur $\underset{\sim}{N} - \{0\}$ . Enfin $(1 * g)(0) = 0$ . La réciproque est évidente.

LEMME 2. - Soit $g \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{C}_p)$ , alors $g$ et $(1 * g)$ sont simultanément continument et uniformément différentiables sur $\underset{\sim}{Z}_p$ .

Rappelons que $g \in \mathcal{CU}_1(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{C}_p)$ si, et seulement si,

$$\Phi_g(x , m) = \frac{g(x + m) - g(x)}{m}$$

se prolonge en une fonction continue de $\underset{\sim}{Z}_p^2$ dans $\underset{\sim}{C}_p$ . D'après [He 1], on sait que $g \in \mathcal{CU}_1(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{C}_p)$ si, et seulement si :

$$g(x) = \sum_{k \geq 0} a_k \binom{x}{k} \quad \text{avec} \quad \lim_{k \to \infty} k \, |a_k| = 0 .$$

D'après le lemme précédent,

$$(1 * g)(x) = \sum_{k \geq 0} a_k \binom{x}{k+1} ,$$

et il est clair que

$$\lim_{k \to \infty} k \, |a_k| = 0 \iff \lim_{k \to \infty} (k + 1) \, |a_k| = 0 .$$

LEMME 3. - Soit $g \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{C}_p)$ , alors $g$ et $(1 * g)$ sont simultanément localement analytique sur $\underset{\sim}{Z}_p$ .

On sait, [Am 3], que $g \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p, \underset{\sim}{C}_p)$ est localement analytique sur $\underset{\sim}{Z}_p$, si, et seulement si,

$$g(x) = \sum_{k\geq 0} a_k \binom{x}{k} \quad \text{avec} \quad \lim |a_k|^{1/k} < 1 .$$

Nous allons préciser ce résultat lorsque $g$ est analytique sur $D(0, r)^-$ avec $r > 1$.

PROPOSITION 1. - Soit $r > 1$ et soit $g \in \mathfrak{A}_r^-$, alors :

(i) $(1 * g)$ est aussi analytique sur $D(0, r)^-$.

(ii) Si, sur $D(0, r)^-$, $g(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, et si, sur $D(0, r)^-$, $(1 * g)(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$, alors, pour $1 < \rho < r$,

$$\sup_{|t|<\rho} |(1 * g)(t)| \leq \sup_{n\geq 0} \rho^{n+1}\, p \left|\frac{a_n}{n+1}\right| ,$$

$$b_0 = 0 \quad \text{et} \quad |b_n| \leq \sup_{k\geq n-1} p \left|\frac{a_k}{k+1}\right|$$

(iii) Si l'on pose $g^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n} g$, on a :

$$(1 * g)'(0) = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{p^h} \sum_{a=0}^{p^h-1} g(a) ,$$

$$(1 * g)(x) = \sum_{n\geq 1} (1 * g^{(n-1)})'(0) \frac{x^n}{n!} ,$$

autrement dit :

$$b_n = \frac{1}{n!} (1 * g^{(n-1)})'(0) .$$

Définissons les polynômes de Bernoulli, $B_n(X)$, par :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} B_n(X) = \frac{t\, e^{tX}}{e^t - 1}$$

(cette définition diffère légèrement de celle de [Iw 1]).

Posons aussi $B_k(0) = B_k$ (donc $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, ... ).

Il est bien connu que l'on a :

$$\sum_{m=0}^{n-1} m^k = \frac{B_{k+1}(n) - B_{k+1}(0)}{k+1} .$$

Par définition, puisque $g \in \mathfrak{A}_r^-$ avec $r > 1$, on a :

$$(1 * g)(n) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k\geq 0} a_k\, m^k$$

$$= \sum_{k\geq 0} a_k \sum_{m=0}^{n-1} m^k$$

$$= \sum_{k\geq 0} a_k \frac{B_{k+1}(n) - B_{k+1}(0)}{k+1} .$$

Posons $P_{k+1}(X) = B_{k+1}(X) - B_{k+1}(0)$ , $P_{k+1}(X) \in \mathbb{Q}[X]$ , c'est un polynôme de degré $k+1$ au plus, et d'après le théorème de von Staudt-Clausen [Iw 1], si $X \in \mathbb{C}_p$ ,

$$|P_{k+1}(X)| \leq \sup \{p.|X|^{k+1} , p\} .$$

Posons :

$$(1 * g)(X) = \sum_{k\geq 0} a_k \frac{P_{k+1}(X)}{k+1} ,$$

d'après l'inégalité précédente, cette série converge sur $D(0 , r)^-$ , et uniformément sur toute boule $B(0 , \rho)^-$ avec $0 < \rho < r$ . Elle définit donc, [Am 1], une fonction analytique sur $D(0 , r)^-$ qui coincide pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ avec $(1 * g)$ . Si $0 < \rho < r$ , on a :

$$\sup_{|X|<\rho} |(1 * g)(X)| \leq \sup_{k\geq 0} (p|\frac{a_k}{k+1}| . \max(\rho^{k+1} , 1)) ,$$

et on a aussi :

$$|b_k| \leq \sup_{n\geq k-1} p \left|\frac{a_n}{n+1}\right| .$$

Calculons les coefficients $b_n$ . On sait que l'on a

$$b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dX^n} (1 * g)(0) .$$

On a vu au lemme 1 que $b_0 = 0 = (1 * g)(0)$ .

Calculons, pour $t \in D(0 , r)^-$ et $k \geq 1$ ,

$$\frac{d^k}{dt^k} (1 * g)(t) .$$

On a si $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ,

$$\frac{d}{dt} (1 * g)(n) = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{p^h} \{\sum_{m=0}^{p^h+n-1} g(m) - \sum_{m=0}^{n-1} g(m)\}$$

$$= \lim_{h\to\infty} \frac{1}{p^h} \sum_{m=0}^{p^h-1} g(m) + \lim_{h\to\infty} \frac{1}{p^h} \{\sum_{m=0}^{n-1} g(m + p^h) - g(m)\} .$$

Or par définition :

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{p^h} \sum_{n=0}^{p^h-1} g(n) = (1 * g)'(0) .$$

Il vient donc :

$$\frac{d}{dt}(1 * g)(n) = (1 * g)'(0) + (1 * g')(n) .$$

Par prolongement analytique à $D(0 , r)^-$ , il vient :

$$\frac{d}{dt}(1 * g)(t) = (1 * g)'(0) + (1 * g')(t) .$$

Par récurrence, on montre que, si $t \in D(0 , r)^-$ ,

$$\frac{d^k}{dt^k}(1 * g)(t) = (1 * g^{(k-1)})'(0) + (1 * g^{(k)})(t) .$$

COROLLAIRE 1. - <u>Si</u> $g \in \mathfrak{A}_r^-$ <u>avec</u> $r > 1$ , $g(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$ , <u>alors</u> $(1 * g) \in \mathfrak{A}_r^-$ <u>et</u>

$$(1 * g)(x) = \sum_{k\geq 0} a_k \frac{B_{k+1}(x) - B_{k+1}(0)}{k + 1} .$$

COROLLAIRE 2. - <u>Si</u> $g \in \mathcal{C}u_1(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{C}_p)$ , <u>si</u> $t \in \underset{\sim}{Z}_p$ , <u>on a</u> :

$$\frac{d}{dt}(1 * g)(t) = (1 * g)'(0) + (1 * g')(t) .$$

PROPOSITION 2. - <u>Soit</u> $g \in \mathfrak{A}_r^-$ , <u>avec</u> $r > 1$ . <u>Soit</u> $x \in D(0 , r)^-$ , <u>on pose</u> $g_x(t) = g(x + t)$ . <u>Si</u> $t \in D(0 , r)^-$ , <u>on a</u>

$$(1 * g_x)(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n\,!} (1 * g^{(n)})(t) .$$

On a $g(x + t) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n\,!} g^{(n)}(t)$ .

Les inégalités de la proposition 1 montrent que l'on peut écrire :

$$(1 * g_x)(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n\,!} (1 * g^{(n)})(t) .$$

PROPOSITION 3. - <u>Soit</u> $g \in \mathcal{C}u_1(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{C}_p)$ , $g(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \binom{x}{n}$ , <u>avec</u> $\lim_{n\to\infty} n|a_n| = 0$ .

<u>Soit</u> $(r_h)_{h\geq 0}$ , <u>une suite d'entiers strictement positifs tels que</u> $\lim_{h\to\infty} |r_h| = 0$ . <u>Alors</u> :

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{r_h} \sum_{a=0}^{r_h-1} g(a) = (1 * g)'(0) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} a_n .$$

Comme $(1 * g)(0) = 0$ , si $g \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{C}_p)$ , on a par définition,

$$(1 * g)'(0) = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{r_h} \sum_{a=0}^{r_h - 1} g(a) .$$

En outre, on a vu que $\sum_{a=0}^{r_h-1} g(a) = \sum_{n\geq 0} a_n \binom{r_h}{n+1}$ . Donc

$$\frac{1}{r_h} \sum_{a=0}^{r_h-1} g(a) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} \binom{r_h - 1}{n} .$$

Or

$$\lim_{h\to\infty} \binom{r_h - 1}{n} = (-1)^n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{n+1}\right| = 0 .$$

On prend souvent $r_h = rp^h$ , $r \in \underset{\sim}{N} - \{0\}$ .

## 2. Une représentation des fonctions analytiques bornées sur $D(0 , 1)^-$ .

Nous allons étudier un développement des fonctions analytiques bornées sur $D(0 , 1)^-$ , bien adapté à l'étude des séries d'Iwasawa associées aux caractères $\theta$ et qui généralise le développement de Taylor habituel. On notera $\mathcal{A}_{b,1}^-$ l'espace des fonctions analytiques bornées sur $D(0 , 1)^-$ .

PROPOSITION 4. - *Soit* $F \in \mathcal{A}_{b,1}^-$ . *Pour tout entier* $h \geq 0$ , *il existe une unique suite de polynômes* $(F_{i,h}(T))_{i\geq 0}$ , *tels que* :

(a) $F_{i,h}(T) \in \underset{\sim}{C}_p[T]$ , *degré* $F_{i,h} \leq p^h - 1$ .

(b) *On a uniformément, pour* $0 < \rho < 1$ , *sur* $D(0 , \rho)^+$ :

$$F(T) = \sum_{i\geq 0}((1 + T)^{p^h} - 1)^i F_{i,h}(T) .$$

(c) *En outre, on a alors*

$$\|F\| = \sup_{i\geq 0} \|F_{i,h}\| = \sup_{h\geq 0} \|F_{o,h}\| .$$

On sait ([Am 1] (lemme 4.4.2) ou [B 2]) que si $F \in \mathcal{A}_{b,1}^-$ , on peut écrire de manière unique :

$$F(T) = F_{0,h}(T) + ((1 + T)^{p^h} - 1) G_{1,h}(T)$$

où $F_{0,h}(T) \in \underset{\sim}{C}_p[T]$ , degré $F_{0,h}(T) \leq p^h - 1$ , et où $G_{1,h}(T) \in \mathcal{A}_{b,1}^-$ . En outre, on a :

$$\|F\| = \sup\{\|F_{0,h}\| , \|G_{1,h}\|\} .$$

On peut donc définir par récurrence une suite de polynômes $F_{i,h}(T) \in \underset{\sim}{C}_p[T]$ , de degré $p^h - 1$ au plus, et une suite de fonctions $G_{i+1,h}(T) \in \mathcal{A}_{b,1}^-$ , par

$$G_{i,h}(T) = F_{i,h}(T) + ((1 + T)^{p^h} - 1) G_{i+1,h}(T) ,$$

$$G_{0,h}(T) = F(T) ,$$

On montre facilement par récurrence :

$$\|F_{i,h}\| \leq \|G_{i,h}\| \leq \|F\|$$

$$\|G_{i+1,h}\| \leq \|G_{i,h}\| \leq \|F\| .$$

Par ailleurs, si $|T| = \rho < 1$ , on a :

$$|(1+T)^{p^h} - 1| \leq \sup_{0\leq j\leq h} (p^{-j} \rho^{p^{h-j}}) .$$

Donc la série $\sum_{i\geq 0} ((1+T)^{p^h} - 1)^i F_{i,h}(T)$ converge uniformément sur $D(0 , \rho)^+$, pour $0 < \rho < 1$ . Elle définit sur $D(0 , 1)^-$ une fonction analytique bornée $f(T)$ [Am 1]. On a, pour tout $\zeta \in \mu_{p^h}$ et pour tout $j \in \underline{N}$ ,

$$\frac{d^j}{dT^j} (f(T) - F(T))|_{T=\zeta} = 0 .$$

Donc $f(T) \equiv F(T)$ . Supposons que $p^{-1/(p-1)p^{h-1}} = r_{h-1} < \rho < 1$ , alors

$$\sup_{|T|<\rho} |(1+T)^{p^h} - 1| = \rho^{p^h} .$$

Donc :

$$\sup_{|T|<\rho} |F(T)| \leq \sup_{i\geq 0} \{\rho^{ip^h} \sup_{|T|<\rho} |F_{i,h}(T)|\} .$$

En faisant tendre $\rho$ vers $1$ , il vient

$$\|F\| \leq \sup_{i\geq 0} \|F_{i,h}\| ,$$

et comme par construction $\|F_{i,h}\| \leq \|F\|$ , on a donc bien :

$$\|F\| = \sup_{i\geq 0} \|F_{i,h}\| .$$

Si $0 < \rho < 1$ , on a :

$$\lim_{h\to\infty} |(1+T)^{p^h} - 1| = 0 .$$

Par conséquent :

$$\sup_{|T|<\rho} |F(T)| \leq \lim_{h\to\infty} \sup_{|T|<\rho} |F_{0,h}(T)| .$$

En faisant tendre $\rho$ vers $1$ , il vient

$$\|F\| \leq \lim_{h\to\infty} \|F_{0,h}\| ,$$

et par conséquent

$$\|F\| = \lim_{h\to\infty} \|F_{0,h}\| .$$

Nous poserons dans toute la suite de l'article

$$P_h(T) = (1+T)^{p^h} - 1 .$$

Nous allons généraliser le résultat précédent aux fonctions de $\mathfrak{a}_1^-$. Comme cette généralisation ne nous servira pas dans la suite, nous esquisserons seulement les démonstrations.

LEMME 4. - *Soit* $r_{h-1} = p^{-1/(p-1)p^{h-1}}$ *et soit* $\rho > r_{h-1}$. *Soit* $F \in \mathfrak{a}_1^-$, *supposons qu'il existe une suite de polynômes* $(F_{i,h}(T))_{i\geq 0}$ *de* $\underset{\sim}{C}_p[T]$ *de degré* $p^h - 1$ *au plus, tels que, sur* $D(0 , \rho)^-$, *on ait* :

$$F(T) = \sum_{i\geq 0} (P_h(T))^i F_{i,h}(T)$$

*au sens de la convergence simple sur* $D(0 , \rho)^-$. *Alors la suite* $(F_{i,h})_{i\geq 0}$ *est unique*.

Pour tout $\zeta \in \mu_{p^h}$, $F(\zeta) = F_{0,h}(\zeta)$, ce qui détermine $F_{0,h}$ de manière unique. Alors,

$$G_{1,h}(T) = \frac{F(T) - F_{0,h}(T)}{P_h(T)} \in \mathfrak{a}_1^- .$$

On a, sur $D(0 , \rho)^-$,

$$G_{1,h}(T) = \sum_{i\geq 1} (P_h(T))^{i-1} F_{i,h}(T) .$$

Par récurrence, le lemme est immédiat.

COROLLAIRE 3. - *Toute fonction* $F \in \mathfrak{a}_1^-$ *peut s'écrire de manière unique* :

$$F(T) = \sum_{i\geq 0} (P_h(T))^i F_{i,h}(T) ,$$

*où* $F_{i,h}(T) \in \underset{\sim}{C}_p[T]$, *et est de degré* $\leq p^h - 1$, $P_h(T) = (1+T)^{p^h} - 1$. *La convergence du second membre est uniforme sur* $D(0 , \rho)^+$ *pour* $0 < \rho < 1$.

L'unicité déroule du lemme 4. L'existence se démontre comme à la proposition 4, car dans la démonstration on n'utilise le fait que $F \in \mathfrak{a}_{b,1}^-$ que pour écrire les égalités de normes.

COROLLAIRE 4. - *Soit* $(a_\gamma)_{\gamma\in\mu_{p^\infty}}$ *une suite bornée d'éléments de* $\underset{\sim}{C}_p$. *Pour qu'il existe une fonction* $F \in \mathfrak{a}_{b,1}^-$ *telle que* $F(\gamma - 1) = a_\gamma$ *pour tout* $\gamma \in \mu_{p^\infty}$, *il faut et il suffit qu'il existe un réel* $M < +\infty$ *tel que, pour tout* $h \in \underset{\sim}{N}$, *pour tout entier* $k$, $0 \leq k \leq p^h - 1$, *on ait* :

$$\left|\frac{1}{p^h} \sum_{\gamma \in \mu_{p^h}} \gamma^{-k} a_\gamma\right| \leq M .$$

La nécessité est évidente, car

$$\frac{1}{p^h} \sum_{\gamma \in \mu_{p^h}} \gamma^{-k} a_\gamma = b_{k,h,0}$$

où

$$\sum_{k=0}^{p^h-1} (1+T)^k b_{k,h,0} = F_{0,h}(T)$$

avec les notations de la proposition 4, par conséquent

$$|b_{k,h,0}| \leq \|F\| .$$

Réciproquement, considérons les polynômes

$$F_{0,h}(T) = \sum_{k=0}^{p^h-1} (1+T)^k b_{k,h,0} ,$$

où $b_{k,h,0}$ a été défini ci-dessus, on a, par hypothèse, $\|F_{0,h}\| \leq M$ .

Par ailleurs, on a, par construction,

$$F_{0,h+1}(T) - F_{0,h}(T) = ((1+T)^{p^h} - 1)\, G_h(T) ,$$

avec $\|G_h\| \leq M$ . Donc, pour $|T| \leq \rho < 1$ , on a uniformément

$$\lim_{h\to\infty} |F_{0,h+1}(T) - F_{0,h}(T)| = 0 .$$

La suite de polynôme $F_{0,h}(T)$ définit donc par passage à la limite, [Am 1], une fonction analytique bornée sur $D(0\,,\,1)^-$ , $F$ , telle que $F(\gamma - 1) = a_\gamma$ pour tout $\gamma \in \mu_{p^\infty}$ .

COROLLAIRE 5. - Soit $F \in \mathfrak{a}^-_{b,1}$ . Pour $h \in \underset{\sim}{N}$ , on pose :

$$F(T) = \sum_{i\geq 0} (P_h(T))^i \sum_{k=0}^{p^h-1} b_{k,h,i} (1+T)^k .$$

Alors, si $0 \leq k \leq p^h - 1$ ,

$$b_{k,h,i} = \lim_{s\to\infty} \sum_{j=0}^{p^s-1} b_{k+jp^h,h+s,0} \binom{j}{i} .$$

On a, pour $s \in \underset{\sim}{N}$ ,

$$F(T) = \sum_{i\geq 0} ((1+T)^{p^{h+s}} - 1)^i \sum_{k=0}^{p^h-1} \sum_{j=0}^{p^s-1} b_{k+jp^h,h+s,i} (1+T)^{k+jp^h} .$$

Donc

$$F(T) = \lim_{s\to\infty} \sum_{k=0}^{p^h-1} \sum_{j=0}^{p^s-1} b_{k+jp^h,h+s,0} \; (1 + T)^{k+jp^h}$$

$$= \lim_{s\to\infty} \sum_{k=0}^{p^h-1} \sum_{j=0}^{p^s-1} b_{k+jp^h,h+s,0} \;\; ((1 + T)^{p^h} - 1) + 1)^j \; (1 + T)^k$$

$$= \sum_{i\geq 0} (P_h(T))^i \sum_{k=0}^{p^h-1} (1 + T)^k \lim_{s\to\infty} \sum_{j=0}^{p^s-1} b_{k+jp^h,h+s,0} \binom{j}{i}.$$

D'après l'unicité de ce type de développement, on a

$$b_{k,h,i} = \lim_{s\to\infty} \sum_{j=0}^{p^s-1} \binom{j}{i} b_{k+jp^h,h+s,0} \; .$$

COROLLAIRE 6. - Soit $F \in \mathcal{O}_{b,1}^{-}$ tel que $\|F\| \leqslant 1$ . On pose :

$$F(T) = \sum_{n\geq 0} b_n T^n = \sum_{i\geq 0} (P_h(T))^i \sum_{k=0}^{p^h-1} b_{k,h,i} \; (1 + T)^k \; .$$

On a

$$\sum_{n=0}^{ip^h-1} b_n T^n \equiv \sum_{\ell=0}^{i-1} (P_h(T))^{\ell} \sum_{k=0}^{p^h-1} b_{k,h,\ell} \; (1 + T)^k \bmod p \; \mathcal{O}_p[T] \; .$$

En particulier, si $\sup_{0\leqslant n\leqslant p^h-1} |b_n| = 1$ , alors

$$\sup_{0\leqslant k\leqslant p^{h}-1} |b_{k,h,0}| = 1 \; .$$

On a :

$$\sum_{\ell=0}^{i-1} (P_h(T))^{\ell} \sum_{k=0}^{p^h-1} b_{k,h,\ell} \; (1 + T)^k \equiv F(T) \bmod (P \; \mathcal{O}_p[[T]], \; T^{ip^h} \mathcal{O}_p[[T]]) \; .$$

## 3. Construction de la série d'Iwasawa attachée à un caractère de Dirichlet, $\theta$ .

Soit $\chi$ un caractère de Dirichlet de conducteur $f$ , on note $B_{n,\chi}$ les nombres de Bernoulli attachés à $\chi$ ([Iw 1], [K-L 1]) définis par

$$\sum_{n\geq 0} B_{n,\chi} \frac{X^n}{n\,!} = \sum_{a=1}^{f} \chi(a) \frac{X e^{aX}}{e^{fX} - 1} \; .$$

Rappelons le théorème de Kubota-Leopoldt.

THEORÈME 1 ([K-L 1], [Iw 1]). - Soit $\rho_p = qp^{-1/(p-1)}$ . Pour tout caractère de Dirichlet $\chi$ primitif, pair, de conducteur $f$ , il existe une unique fonction méromorphe sur $D(1 , \rho_p)^-$ , notée $L_p(s , \chi)$ telle que, si $n \in \underset{\sim}{N} - \{0\}$ ,

$$L_p(1 - n , \chi) = - (1 - \chi\omega^{-n}(p) \; p^{n-1}) \; \frac{B_{n,\chi\omega^{-n}}}{n} \; .$$

En outre $L_p(s , \chi)$ a au plus un pôle simple pour $s = 1$ de résidu

$$\begin{cases} 0 & \underline{\text{si}} \quad \chi \quad \underline{\text{est non trivial.}} \\ 1 - \frac{1}{p} & \underline{\text{si}} \quad \chi = \varepsilon \quad \underline{\text{est trivial.}} \end{cases}$$

<u>Enfin si</u> $s \in D(1 , \rho_p)^-$ , <u>on a</u>

$$s\, L_p(1 + s , \chi) = \lim_{h\to\infty} - \frac{1}{fp^h} \sum\nolimits'^{fp^h-1}_{a=0} \chi(a) \ \langle a \rangle^{-s} ,$$

<u>où</u> $\Sigma'$ <u>désigne une sommation sur les entiers premiers à</u> $p$ .

Tout d'abord $s \longrightarrow \langle a\rangle^{-s}$ est une fonction analytique sur $D(1 , \rho_p)^-$ ([Am 1] ou [Iw 1]).

Posons :

$$g_{\chi,s}(t) = - \sum\nolimits'^{fq-1}_{a=0} \chi(a) \ \langle a + tfq\rangle^{-s} .$$

Il est clair que $t \longrightarrow g_{\chi,s}(t)$ est, pour $s$ fixé, $s \in D(1 , \rho_p)^-$ , une fonction analytique de $t$ pour $t \in D(0 , \rho_p)^-$ . On a :

$$(1 * g_{\chi,s})(p^h) = - \sum\nolimits'^{fqp^h}_{a=0} \chi(a) \ \langle a\rangle^{-s} .$$

D'après la proposition 1 et le corollaire 1, on a :

$$(1 * g_{\chi,s})'(0) = \lim_{h\to\infty} - \frac{1}{p^h} \sum\nolimits'^{fqp^h-1}_{a=0} \chi(a) \ \langle a \rangle^{-s}$$

$$= - \sum_{n\geqslant 0} (fq)^{n-1} \binom{-s}{n} B_n \sum\nolimits'^{fq-1}_{a=0} \frac{\chi(a)}{a^n} \langle a\rangle^{-s} ;$$

on retrouve ainsi une formule due à WASHINGTON [W 2]. Il est clair, d'après le théorème de von Staudt-Clausen que le second membre converge pour $s \in D(1 , \rho_p)^-$ , et définit une fonction analytique sur ce disque. On a :

$$\sum\nolimits'^{fp-1}_{a=1} \chi(a) \frac{X\, e^{aX}}{e^{fX} - 1} = \sum^{fp-1}_{a=1} \chi(a) \frac{X\, e^{aX}}{e^{fpX} - 1} - \frac{\chi(p)}{p} \sum^{f-1}_{a=1} \frac{\chi(a)\ pXe^{apX}}{e^{fpX} - 1}$$

et pour tout entier $r \geqslant 1$ ,

$$\sum^{f-1}_{a=1} \chi(a) \frac{X\, e^{aX}}{e^{fX} - 1} = \sum^{rf-1}_{a=1} \chi(a) \frac{X\, e^{aX}}{e^{frX} - 1} .$$

On a donc, pour tout entier $h \geqslant 1$ ,

$$\sum_{n\geqslant 0} B_{n,\chi} \ (1 - p^{n-1} \ \chi(p)) \frac{X^n}{n\,!} = \sum\nolimits'^{fp^h-1}_{a=1} \chi(a) \frac{X\, e^{aX}}{e^{fp^n} - 1} .$$

Or, dans $\underset{\sim}{C}_p[[X]]$ , pour la topologie de la convergence simple des coefficients on a

$$\sum_{a=1}^{fp-1}{}' \chi(a) \frac{X e^{aX}}{e^{fpX} - 1} = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{fp^h} \sum_{a=1}^{fp^h-1}{}' \chi(a) e^{aX} ,$$

donc

$$B_{n,\chi}(1 - p^{n-1} \chi(p)) = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{p^h f} \sum_{a=1}^{fp^h-1}{}' \chi(a) a^n .$$

Rappelons les lemmes suivants qui se trouvent dans [Iw 1], on note $(\underset{\sim}{Z}/f\underset{\sim}{Z})^*$ l'ensemble des éléments inversibles de $\underset{\sim}{Z}/f\underset{\sim}{Z}$ .

LEMME 5. - <u>Pour tout entier</u> $h \geqslant 0$ , <u>pour tout entier</u> $m \geqslant 1$ , $(m , p) = 1$ , <u>on a</u>

$$(\underset{\sim}{Z}/mqp^h \underset{\sim}{Z})^* \simeq (\underset{\sim}{Z}/m\underset{\sim}{Z})^* \times (\underset{\sim}{Z}/q\underset{\sim}{Z})^* \times \frac{1 + q\underset{\sim}{Z}}{1 + qp^h \underset{\sim}{Z}} .$$

$$(\underset{\sim}{Z}/mqp^h \underset{\sim}{Z})^* \simeq (\underset{\sim}{Z}/m\underset{\sim}{Z})^* \times (\underset{\sim}{Z}/qp^h \underset{\sim}{Z})^* .$$

Or tout élément $x \in (\underset{\sim}{Z}/qp^h \underset{\sim}{Z})^*$ s'écrit de manière unique $x = \omega(x) \langle x\rangle_h$ , où $\omega(x) \in (\underset{\sim}{Z}/q\underset{\sim}{Z})^*$ et où $\langle x\rangle_h \in (1 + q\underset{\sim}{Z})/(1 + qp^h \underset{\sim}{Z})$ ([Iw 1] ou [Ha 1]).

LEMME 6. - <u>Tout caractère</u> $\chi$ <u>sur</u> $(\underset{\sim}{Z}/mqp^h \underset{\sim}{Z})^*$ <u>se factorise de manière unique comme produit d'un caractère</u> $\chi_1$ <u>sur</u> $(\underset{\sim}{Z}/mq\underset{\sim}{Z})^*$ <u>et d'un caractère</u> $\chi_2$ <u>sur</u> $(1 + q\underset{\sim}{Z})/(1 + qp^h \underset{\sim}{Z})$ , <u>appelés respectivement caractère de première espèce et de deuxième espèce, tels que</u> :

$$\chi_2(1 + mq) = \chi(1 + mq) .$$

<u>En particulier,</u> $\chi_1$ <u>est de conducteur</u> $m$ <u>ou</u> $mq$ , <u>et</u> $\chi_2$ <u>est de conducteur</u> $qp^h$ <u>et d'ordre</u> $p^h$ .

C'est clair à partir du lemme 5 ([Iw 1] ou [Ha 1]). En particulier, les valeurs de $\chi_2$ sont prises dans $\underset{\sim}{\mu}_{p^h}$ .

LEMME 7. - <u>Soit</u> $\zeta \in \underset{\sim}{\mu}^*_{p^h}$ , <u>soit</u> $m \geqslant 1$ . <u>Soit</u> $\pi_\zeta = \pi$ <u>l'unique caractère de deuxième espèce d'ordre</u> $p^h$ <u>et de conducteur</u> $qp^h$ <u>tel que</u> $\pi(1 + mq) = \zeta^{-1}$ . <u>Soit</u> log , <u>le logarithme</u> p-<u>adique</u> ([Am 1] ou [Iw 1]). <u>Alors si, pour</u> $a \in \underset{\sim}{Z} - p\underset{\sim}{Z}$ , <u>on pose</u> :

$$\psi(a) = - \frac{\log\langle a\rangle}{\log(1 + mq)} ,$$

on a, pour tout $a \in \underset{\sim}{Z} - p\underset{\sim}{Z}$ , $\pi(a) = \zeta^{\psi(a)}$ .

Le logarithme p-adique est défini, pour $|T| < 1$ , $T \in \underset{\sim}{C}_p$ , par :

$$\log(1 + T) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{T^{n+1}}{n+1} .$$

Par définition,

$$\zeta^{\psi(a)} = \sum_{k\geq 0} (\zeta - 1)^k \binom{\psi(a)}{k} .$$

La série du second membre converge p-adiquement, car $\psi(a) \in \underset{\sim}{Z}_p$ , donc

$$\left|\binom{\psi(a)}{k}\right| \leq 1 ,$$

et il est bien connu que, si $\zeta \in \mu_{p^h}$ , $|\zeta - 1| = r_{h-1} = p^{-1/(p-1)p^{h-1}}$ , ([Am 1], [Iw 1]). On sait que $\langle a \rangle \in 1 + q\underset{\sim}{Z}_p^p$ et, si a et $b \in \underset{\sim}{Z} - p\underset{\sim}{Z}$ ,

$$|\psi(a) - \psi(b)| = \left|\frac{\langle a \rangle - \langle b \rangle}{\log(1 + mq)}\right| .$$

Donc, si $|a - b| \leq q^{-1} p^{-h}$ , on a :

$$|\psi(a) - \psi(b)| \leq p^{-h} .$$

Par conséquent,

$$|a - b| \leq q^{-1} p^{-h} \text{ implique } \zeta^{\psi(a)} = \zeta^{\psi(b)} .$$

Si a et $b \in \underset{\sim}{Z} - p\underset{\sim}{Z}$ , on a $\psi(ab) = \psi(a) + \psi(b)$ , $\zeta^{\psi(ab)} = \zeta^{\psi(a)} \zeta^{\psi(b)}$ et enfin $\zeta^{\psi(1+mq)} = \zeta^{-1}$ .

Ceci suffit à prouver que, si l'on pose par convention $\zeta^{\psi(a)} = 0$ pour $a \in p\underset{\sim}{Z}$ , on a $\pi(a) = \zeta^{\psi(a)}$ .

LEMME 8. - Soit $r_h = p^{-1/(p-1)p^h}$ , $h \in \underset{\sim}{N}$ . Si $T \in \underset{\sim}{C}_p$ , $|T| = \rho < r_h$ , on a

$$|\log(1 + T)| \leq p^h p^{-1/(p-1)} .$$

C'est bien connu ([Am 1], [Iw 1]).

PROPOSITION 5. - Soit un caractère de Dirichlet $\theta$ . Il existe une unique fonction analytique sur $D(0, 1)^-$ , $G_\theta(T) \in K_\theta[[T]]$ , telle que $\forall n \geq 0$ , $\forall \zeta \in \mu_{p^n}$ , $\forall s \in D(1 , \rho_p)^-$ , on a :

$$G_\theta((1 + mq)^s \zeta - 1) = s L_p(s + 1 , \theta\pi) ,$$

où $\pi = \pi_\zeta$ est le caractère de deuxième espèce associé à $\zeta$ par $\pi(1 + mq) = \zeta^{-1}$ .

<u>En outre, si</u> $T \in D(0\,,\,1)^-$ ,

$$G_\theta(T) = \lim_{h\to\infty} \frac{-1}{mqp^h} \sum\nolimits'^{mqp^h-1}_{a=0} \theta(a)\ (1+T)^{\psi(a)}$$

où

$$\psi(a) = -\frac{\log\langle a\rangle}{\log(1+mq)}\ .$$

Nous adopterons comme notation dans toute la suite

$$\psi(a) = -\frac{\log\langle a\rangle}{\log(1+mq)}\ ,\quad a \in \underset{\sim}{Z}_p - p\,\underset{\sim}{Z}_p\ ,$$

et, si $|T| < 1$ ,

$$\psi(1+T) = -\frac{\log(1+T)}{\log(1+mq)}\ .$$

Notons pour $T \in D(0\,,\,1)^-$ , $n \in \underset{\sim}{N}$ , $t \in \underset{\sim}{Z}_p$ :

$$g_{\theta,n,T}(t) = \frac{1}{mqp^n} \sum\nolimits'^{mqp^n-1}_{a=0} \theta(a)(1+T)^{\psi(a+tmqp^n)}\ .$$

Pour $T \in D(0\,,\,1)^-$ , fixé, $t \dashrightarrow g_{\theta,n,T}(t)$ est une fonction continue sur $\underset{\sim}{Z}_p$ et même continument et uniformément différentiable sur $\underset{\sim}{Z}_p$ . En outre si $|T| \leq \rho < r_n$ , $g_{\theta,n,T}(t)$ est une fonction analytique de $t$ sur

$$D(0\ ,\ \rho^{-p^n}\ p^{-1/(p-1)})^- \supset D(0\ ,\ 1)^+\ .$$

En effet on a :

$$g_{\theta,n,T}(t) = -\sum\nolimits_{k\geq 0} t(mqp^n\ t)^{k-1} \binom{\psi(1+T)}{k} \sum\nolimits'^{mqp^n-1}_{a=0} \frac{\theta(a)}{a^k} (1+T)^{\psi(a)}\ ,$$

d'après le lemme 8, cette série converge en $t$ sur $D(0\ ,\ \rho^{-p^n}\ p^{-1/(p-1)})^-$ si $|T| \leq \rho < r_n$ . Il est clair que $\rho^{-p^n}\ p^{-1/(p-1)} > 1$ si $0 < \rho < r_n$ . Donc si $|T| \leq \rho < r_n$ ,

$$(1 * g_{\theta,n,T})'(0) = \lim_{h\to\infty} -\frac{1}{mqp^{h+n}} \sum\nolimits'^{mqp^{h+n}-1}_{a=0} \theta(a)(1+T)^{\psi(a)}$$

existe et la limite est uniforme en $|T| \leq \rho < r_n$ , elle définit donc une fonction analytique de $T$ sur $D(0\ ,\ r_n)^-$ , notée $G_{\theta,n}(T)$ . Il est clair que $G_{\theta,n}(T) = G_{\theta,n'}(T)$ si $T \in D(0\ ,\ r_n)^- \cap D(0\ ,\ r_{n'})^-$ . On peut voir ceci autrement. D'après la proposition 1 et le corollaire 1, si $T \in D(0\ ,\ r_n)^-$ ,

$$(1 * g_{\theta,n,T})'(0) = -\sum\nolimits_{k\geq 0}(mqp^h)^{k-1}\ B_k \binom{\psi(1+T)}{k} \sum\nolimits'^{mqp^n-1}_{a=0} \frac{\theta(a)}{a^k} (1+T)^{\psi(a)}\ .$$

La série du second membre converge uniformément pour $|T| \leq \rho < r_n$ , d'après le lemme 8, elle définit donc une fonction analytique, $G_{\theta,n}(T)$ , sur $D(0\ ,\ r_n)^-$ , telle que :

$$G_{\theta,n}(T) = \lim_{h\to\infty} -\frac{1}{mqp^h} \sum_{a=0}^{mqp^h-1}{}' \theta(a)(1+T)^{\psi(a)} ,$$

donc $G_{\theta,n}(T) = G_{\theta,n'}(T)$ si $T \in D(0 , r_n)^- \cap D(0 , r_{n'})^-$ .

Comme $\bigcup_{n\geq 0} D(0 , r_n)^- = D(0 , 1)^-$ . Il existe sur $D(0 , 1)^-$ une unique fonction analytique, $G_\theta(T)$ , telle que, pour $T \in D(0 , 1)^-$ :

$$G_\theta(T) = \lim_{h\to\infty} \frac{-1}{mqp^h} \sum_{a=0}^{mqp^h-1}{}' \theta(a)(1+T)^{\psi(a)} .$$

Si $T = (1+mq)^s \zeta - 1$ avec $s \in D(1 , \rho_p)^-$ , $\zeta \in \mu_{p^n}^*$ , on a :

$$G_\theta((1+mq)^s \zeta - 1) = \lim_{h\to\infty} \frac{-1}{mqp^h} \sum_{a=0}^{mqp^h-1}{}' \theta(a)\ \zeta^{\psi(a)}(1+mq)^{s\psi(a)}$$

$$= \lim_{h\to\infty} \frac{-1}{mqp^h} \sum_{a=0}^{mqp^h-1}{}' \theta(a)\ \pi_\zeta(a)\ \langle a\rangle^s = s\ L_p(s+1 , \theta\pi_\zeta) .$$

d'après le théorème 1.

PROPOSITION 6. - <u>Si</u> $\theta$ <u>est non trivial</u>

$$G_\theta(T) = \frac{\log(1+T)}{\log(1+mq)} I_\theta((1+mq)(1+T)-1) ,$$

<u>où</u> $I_\theta(T) \in G_\theta[[T]]$ .

<u>Si</u> $\theta = \epsilon$ <u>est trivial</u>

$$G_\epsilon(T) = \frac{\log(1+T)}{\log(1+q)} I_\epsilon((1+q)(1+T)-1) ,$$

<u>où</u> $(T-q)\ I_\epsilon(T) \in \mathbb{Z}_p[[T]]$ .

Si $\theta$ est non trivial, on a clairement :

$$G_\theta(\zeta - 1) = 0 \quad \text{pour tout} \quad \zeta \in \mu_{p^\infty} .$$

Si $\theta = \epsilon$ est trivial, on a clairement

$$G_\epsilon(\zeta - 1) = 0 \quad \text{pour tout} \quad \zeta \in \mu_{p^\infty} - \{1\} .$$

Posons

$$F_{\theta,h}(T) = \sum_{a=0}^{mqp^h-1}{}' \theta(a)(1+T)^{\psi(a)} .$$

Si $\theta$ est non trivial, on a

$$F_{\theta,h}(\zeta - 1) = 0 \quad \text{pour tout} \quad \zeta \in \mu_{p^h} ,$$

si $\theta = \varepsilon$ est trivial, on a

$$F_{\theta,h}(\zeta - 1) = 0 \quad \text{pour tout} \quad \zeta \in \mu_{p^h} - \{1\} .$$

Donc, si $\theta$ est non trivial,

$$F_{\theta,h}(T) = ((1 + T)^{p^h} - 1)\, J_{\theta,h}(T) \quad \text{où} \quad J_{\theta,h} \in \mathcal{O}_\theta[[T]] ,$$

d'après le lemme de Hensel ou le théorème de préparation de Weierstrass p-adique . [Am 1].

Si $\theta = \varepsilon$,

$$F_{\varepsilon,h}(T) = \frac{(1 + T)^{p^h} - 1}{T}\, J_{\varepsilon,h}(T) \quad \text{où} \quad J_{\varepsilon,h}(T) \in \mathbb{Z}_p[[T]] .$$

On sait que

$$\lim_{h\to\infty} \frac{(1 + T)^{p^h} - 1}{p^h} = \log(1 + T) \quad \text{si} \quad |T| < 1 \qquad ([\text{Am } 1], [\text{Lc } 1]) .$$

Donc, comme

$$\lim_{h\to\infty} \frac{-1}{mqp^h}\, F_{\theta,h}(T) = G_\theta(T) ,$$

on en déduit que, $\lim_{h\to\infty} J_{\theta,h}(T)$ existe pour $|T| < 1$ . On pose

$$\lim_{h\to\infty} J_{\theta,h}(T) = J_\theta(T) \in \mathcal{O}_\theta[[T]] .$$

On a donc, si $\theta$ non trivial,

$$G_\theta(T) = \frac{\log(1 + T)}{mq}\, J_\theta(T) \quad \text{où} \quad J_\theta(T) \in \mathcal{O}_\theta[[T]] .$$

De même,

$$G_\varepsilon(T) = \frac{1}{T}\,\frac{\log(1 + T)}{q}\, J_\varepsilon(T) , \quad \text{où} \quad J_\varepsilon(T) \in \mathbb{Z}_p[[T]] .$$

Posons, si $\theta$ non trivial :

$$\frac{\log(1 + mq)}{mq}\, J_\theta(T) = I_\theta((1 + mq)(1 + T) - 1) \quad \text{avec} \quad I_\theta(T) \in \mathcal{O}_\theta[[T]] ;$$

si $\theta = \varepsilon$ est trivial

$$\frac{\log(1 + q)}{q}\, J_\varepsilon(T) = (T - q)\, I_\varepsilon((1 + q)(1 + T) - 1) \in \mathbb{Z}_p[[T]] .$$

PROPOSITION 7 [Iw 1]. - <u>Pour tout caractère de Dirichlet</u> $\theta$ , <u>il existe une unique série de Taylor</u> $I_\theta(T) \in \mathcal{O}_\theta[[T]]$ , <u>si</u> $\theta$ <u>non trivial</u> (<u>resp</u>. $I_\varepsilon(T).(T-q)$ $\mathbb{Z}_p[[T]]$)

<u>si</u> $\epsilon$ <u>est trivial</u>, <u>telle que</u>, <u>si</u> $\theta$ <u>non trivial</u> $\forall\ n \geq 0$ , $\forall\ s \in D(1\ ,\ \rho_p)^-$ , $\forall\ \zeta \in \mu^*_{p^n}$

$$I_\theta((1 + mq)^s\ \zeta - 1) = L_p(s\ ,\ \theta\pi_\zeta)$$

(<u>resp.</u> <u>si</u> $\theta = \epsilon$ <u>est trivial</u>, $\forall (s\ ,\ \zeta) \in (D(1\ ,\ \rho_p)^- \times \mu_{p^\infty}) - \{1\ ,\ 1\}$ , $I_\epsilon((1 + mq)^s\ \zeta - 1) = L_p(s\ ,\ \pi_\zeta)$)

$$\lim_{T\to q}(T - q)\ I_\epsilon(T) = \frac{(1 + q)(1 - p)}{p}\ \log(1 + q)\ .$$

Si $\theta$ est non trivial, d'après la proposition 6, on a :

$$G_\theta(T) = \frac{\log(1 + T)}{\log(1 + mq)}\ I_\theta((1 + mq)(1 + T) - 1)\ .$$

D'après la proposition 5, si

$$(1 + T) = (1 + mq)^s\ \zeta \quad \text{où} \quad (s\ ,\ \zeta) \in D(1\ ,\ \rho_p)^- \times \mu_{p^\infty}\ ,$$

$$G_\theta((1 + mq)^s\ \zeta - 1) = s\ L_p(s + 1\ ,\ \theta\pi_\zeta)\ ,$$

donc

$$I_\theta((1 + mq)^{s+1}\ \zeta - 1) = L_p(s + 1\ ,\ \theta\pi_\zeta)\ .$$

Si $\theta = \epsilon$ est trivial,

$$G_\epsilon(T) = \frac{\log(1 + T)}{\log(1 + q)}\ I_\epsilon((1 + q)(1 + T) - 1)$$

d'après la proposition 5, si

$$(1 + T) = (1 + q)^s\ \zeta \quad \text{avec} \quad (s\ ,\ \zeta) \in D(1\ ,\ \rho_p)^- \times \mu_{p^\infty}\ ,$$

$$G_\epsilon((1 + q)^s\ \zeta - 1) = s\ L_p(s + 1\ ,\ \pi_\zeta)$$

donc

$$I_\epsilon((1 + q)^{s+1}\ \zeta - 1) = L_p(s + 1\ ,\ \pi_\zeta)$$

et, d'après le théorème 1,

$$\begin{aligned}\lim_{T\to q}\ (T - q)\ I_\epsilon(T) &= \lim_{s\to 0}\ ((1 + q)^{s+1} - 1 - q)\ L_p(s + 1\ ,\ \epsilon) \\ &= \lim_{s\to 0}\ \frac{(1 + q)^{s+1} - 1 - q}{s}\ s\ L_p(s + 1\ ,\ \epsilon) \\ &= (1 + q)\ \log(1 + q)(1 - \tfrac{1}{p})\ .\end{aligned}$$

Nous allons donner maintenant des expressions relativement explicites de $I_\theta(T)$ .
On notera $\Phi$ l'indicatrice d'Euler, donc si $a \in \underset{\sim}{N} - \{0\}$ , $\Phi(a)$ est le cardinal de $(\underset{\sim}{Z}/a\underset{\sim}{Z})^*$ .

LEMME 8. - Pour tout entier $h \geq 0$ et tout entier $k$ , $0 \leq k \leq p^h - 1$ , il existe un unique $\varphi(mq)$-uplet de nombres entiers (premiers à $m$ et à $p$ ), tels que, si $a$ est un élément de $\Phi(mq)$-uplet, on ait :

(i) $0 \leq a \leq mqp^h - 1$ , $(a , mp) = 1$ ,

(ii) $|\psi(a) - k| \leq p^{-h}$ .

En outre ce $\Phi(mq)$-uplet associé à $k$ et à $h$ est un système complet de représentant de $(\underset{\sim}{Z}/mq\underset{\sim}{Z})^*$ .

Les affirmations (i) et (ii) découlent immédiatement de l'isomorphisme :

$$(\underset{\sim}{Z}/mqp^h \underset{\sim}{Z})^* \simeq (\underset{\sim}{Z}/mq\underset{\sim}{Z})^* \times \frac{1 + q\underset{\sim}{Z}}{1 + qp^h \underset{\sim}{Z}}$$

et du fait que $a \longrightarrow \psi(a)$ est un isomorphisme isométrique (pour la distance $p$-adique) du groupe multiplicatif $1 + q\underset{\sim}{Z}_p$ sur le groupe additif $\underset{\sim}{Z}_p$ . La dernière affirmation du lemme est une conséquence de ce dernier isomorphisme.

DEFINITION 2. - Soit $h \in \underset{\sim}{N}$ , $k$ un entier, $0 \leq k \leq p^h - 1$ et soit $S$ un sous-ensemble de $\underset{\sim}{Z}$ . On définit alors $\sum_{a\in S}^{(m,k,h)}$ comme étant une sommation sur les entiers $a \in S$ tels que $(a , p) = 1$ et $|\psi(a) - k| \leq p^{-h}$ . Si $S$ n'est pas spécifié, on suppose que $S = [0 , 1 , \ldots , mqp^h - 1]$

PROPOSITION 8. - Posons, pour tout caractère $\theta$ et pour tout $i \in \underset{\sim}{N}$ :

$$\varphi_i(k , h , \theta) = \sum_a^{(m,k,h)} \theta(a) \binom{\frac{\psi(a) - k}{p^h}}{i} .$$

On a $|\varphi_i(k , h , \theta)| \leq 1$ .

Si $\theta$ est non trivial,

$$I_\theta(T) = \lim_{h\to\infty} \frac{\log(1 + mq)}{mq} \sum_{k=0}^{p^h-1} \varphi_1(k , h , \theta)\left(\frac{1 + T}{1 + mq}\right)^k .$$

Si $\theta = \epsilon$ est trivial et si l'on pose $\alpha(p , \epsilon) = \dfrac{(1 + q)(p - 1) q}{p}$ , on a :

$$I_\epsilon(T) = \frac{\log(1 + q)}{q} \left\{\frac{\alpha(p , \epsilon)}{T - q} - \lim_{h\to\infty} \sum_{k=0}^{p^h-1} \varphi_1(k,h,\epsilon) \left(\frac{1 + T}{1 + q}\right)^k\right. .$$

Au langage près, cette proposition se trouve dans [F-W 1].

Par définition de $\sum_a^{(m,k,h)}$ , on a

$$\frac{\psi(a) - k}{p^h} \in \underset{\sim}{Z}_p ,$$

donc

$$|\varphi_i(k\ ,\ h\ ,\ \theta)| \leqslant 1 \quad \text{pour tout} \quad i \in \underset{\sim}{N}\ .$$

D'après le lemme 8, on a

$$F_{\theta,h}(T) = \sum_{a=0}^{mqp^h-1} \theta(a)\ (1 + T)^{\psi(a)}$$

$$= \sum_{k=0}^{p^h-1} (1 + T)^k \sum_a^{(m,k,h)} \theta(a)(1 + T)^{p^h.(\psi(a)-k)/p^h}$$

$$= \sum_{i\geqslant 0} ((1 + T)^{p^h} - 1)^i \sum_{k=0}^{p^h-1} (1 + T)^k \varphi_i(k\ ,\ h\ ,\theta)$$

cette dernière série converge simplement sur $D(0\ ,\ 1)^-$ .

Si $\theta$ est non trivial, $\varphi_0(k\ ,\ h\ ,\ \theta) = 0$ et, dans ce cas,

$$\frac{1}{mqp^h}\ F_{\theta,h}(T) = \frac{(1 + T)^{p^h} - 1}{mqp^h} \sum_{i\geqslant 1} (P_h(T))^{i-1} \sum_{k=0}^{p^h-1} (1 + T)^k \varphi_i(k\ ,\ h\ ,\ \theta)$$

d'où le résultat si $\theta$ est non trivial, compte tenu de ce que

$$\lim_{h\to\infty} |P_h(T)| = 0 \quad \text{si} \quad |T| < 1\ .$$

Si $\theta = \varepsilon$ est trivial, $\varphi_0(k\ ,\ h\ ,\ \varepsilon) = ((p - 1)q)/p$ , pour tout $h \geqslant 0$ et $0 \leqslant k \leqslant p^h - 1$ .

Donc

$$F_{\theta,h}(T) = ((1 + T)^{p^h} - 1)\ \{\frac{(p - 1)\ q}{p\ T} + \sum_{i\geqslant 1} (P_h(T))^{i-1} \sum_{k=0}^{p^h-1} (1 + T)^k \varphi_i(k\ ,\ h\ ,\ \theta)$$

La proposition est démontrée.

PROPOSITION 9. - <u>On a</u>

(i) <u>Si</u> $\theta$ <u>est non trivial</u>

$$I_\theta(T) = \lim_{h\to\infty} \sum_{k=0}^{p^h-1} (1 + T)^k \sum_a^{(m,k,h)} \theta(a)\ \frac{\langle a\rangle - (1 + mq)^{-k}}{mqp^h}\ .$$

(ii) <u>Si</u> $\theta = \varepsilon$ <u>est trivial</u>

$$I_\varepsilon(T) = \frac{\log(1 + q)}{p}\ \frac{(1 + q)(1 - p)}{T - q}$$

$$+ \lim_{h\to\infty} \sum_{k=0}^{p^h-1} (1 + T)^k \sum_a^{(1,k,h)} \frac{\langle a\rangle - (1 + q)^{-k}}{qp^h}\ .$$

Posons

$$\alpha(p\ ,\ \theta) = \begin{cases} 0\ , & \text{si } \theta \text{ non trivial} \\ \dfrac{(1+q)(1-p)\log(1+q)}{p} & \text{si } \theta = \varepsilon \text{ est trivial}\ . \end{cases}$$

On a montré, à la proposition 7 qu'il existe une unique fonction analytique bornée sur $D(0\ ,\ 1)^-$

$$I_\theta^*(T) = I_\theta(T) - \frac{\alpha(p\ ,\ \theta)}{T-q}\ ,$$

telle que, pour tout $(s\ ,\ \zeta) \in D(1\ ,\ \rho_p)^- \times \mu_{p^\infty}$

$$I_\theta^*((1+mq)^s\ \zeta - 1) = L_p(s\ ,\ \theta\pi_\zeta) - \frac{\alpha(p\ ,\ \theta)}{(1+mq)^s\ \zeta - 1 - q}\ .$$

Posons alors :

$$I_{\theta,h}^*(T) = -\sum_{k=0}^{p^h-1} (1+T)^k \sum_a^{(m,k,h)} \theta(a) \frac{\langle a\rangle - (1+mq)^{-k}}{mqp^h}$$

Par définition de $\sum_a^{(m,k,h)}$ , on a :

$$\Big|\sum_a^{(m,k,h)} \theta(a) \frac{\langle a\rangle - (1+mq)^{-k}}{mqp^h}\Big| \leq 1\ .$$

D'après le théorème 1, on a :

Si $\theta$ est non trivial, pour tout $\zeta \in \mu_{p^h}$

$$I_{\theta,h}^*(\zeta - 1) = L_p(0\ ,\ \theta\pi_\zeta) = I_\theta^*(\zeta - 1)\ ,$$

si $\theta = \varepsilon$ est trivial, pour tout $\zeta \in \mu_{p^h}$ ,

$$I_{\theta,h}^*(\zeta - 1) = L_p(0\ ,\ \pi_\zeta) - \frac{(p-1)(1+q)}{(\zeta - 1 - q)\ p} \frac{1}{p^h} \left(1 - \left(\frac{1}{1+q}\right)^{p^h}\right)$$

$$= I_\varepsilon^*(\zeta - 1) + \frac{1}{\zeta - 1 - q} \left(\alpha(p\ ,\ \varepsilon) - \frac{(p-1)(1+q)}{p} \frac{1}{p^h}\left(1 - \frac{1}{(1+q)^{p^h}}\right)\right).$$

Par conséquent ([Am 1] ou [B 2]), si $\theta$ est non trivial

$$I_\theta^*(T) = I_{\theta,h}^* + ((1+T)^{p^h} - 1)\, \mathfrak{J}_{\theta,h}(T)\ ,$$

resp. si $\theta = \varepsilon$ est trivial :

$$I_\epsilon^*(T) = I^*_{\epsilon,h}(T) + P_h(T)\ \mathfrak{I}_{\epsilon,h}(T) \bmod \{\log(1+q) - (1 - \frac{1}{(1+q)^{p^h}})\ \frac{1}{p^h}\}$$

$$\times \frac{1}{p}\frac{1}{\xi - 1 - q}\ \mathcal{O}_p[[T]] ,$$

avec $\|\mathfrak{I}_{\theta,h}\| \leqslant \|I^*_\theta\|$ et $\mathfrak{I}_{\theta,h}(T) \in K_\theta[[T]]$ .

Cette proposition se trouve déjà au langage près dans [F-W 1].

Le lemme suivant équivaut au fait bien connu que $L_p(s , \chi) \equiv 0$ si $\chi$ est impair

LEMME 9. - <u>Soit</u> $\chi$ <u>un caractère de Dirichlet impair primitif de conducteur</u> $f$ , <u>alors, si</u> $T \in D(0 , 1)^-$ ,

$$G_\chi(T) = \lim_{h\to\infty} \frac{-1}{mqp^h} \sum_{a=0}^{fp^h-1}{}' \chi(a)(1+T)^{\psi(a)}$$

<u>est identiquement nulle</u>.

On peut supposer sans nuire à la généralité (lemmes 6 et 7) que $f$ est de la forme $m$ ou $mq$ . Comme $\chi$ est impair, il est non trivial. On a :

$$G_\chi(T) = \lim_{h\to\infty} \frac{-1}{mqp^h}\ P_h(T) \sum_{i\geqslant 1} (P_h(T))^{i-1} \sum_{k=0}^{p^h-1} (1+T)^k\ \varphi_i(k , h , \chi)$$

et donc

$$G_\chi(T) = \lim_{h\to\infty} \frac{-1}{mqp^h}\ P_h(T) \sum_{k=0}^{p^h-1} (1+T)^k\ \varphi_1(k , h , \chi)$$

(proposition 8). Or on remarque que, si $(a , p) = 1$ , $0 \leqslant a \leqslant mqp^h - 1$ et $|\psi(a) - k| \leqslant p^{-h}$ , alors

$$0 \leqslant mqp^h - a \leqslant mqp^h - 1 \quad \text{et} \quad |\psi(mqp^h - a) - k| \leqslant p^{-h} .$$

Donc :

$$2\ \varphi_1(k , h , \chi) = \sum_a^{(m,k,h)} \chi(a)\ \frac{\psi(a) - k}{p^h}$$

$$+ \sum_a^{(m,k,h)} \chi(mqp^h - a)\ \frac{\psi(mqp^h - a) - k}{p^h}$$

$$= \sum_a^{(m,k,h)} \chi(a)\ \frac{\psi(a) - \psi(mqp^h - a)}{p^h} .$$

Donc $|2\ \varphi_1(k , h , \chi)| \leqslant |\frac{q^2 p^h}{2}|$ ce qui entraîne $G_\chi(T) \equiv 0$ .

On est donc amené à introduire la notation suivante $I_\chi(T) \equiv 0$ si $\chi$ est impair, sinon $I_\chi(T)$ comme la proposition 6.

La proposition suivante se trouve implicitement avec un langage un peu différent dans [W 2] et [D 1].

PROPOSITION 10. - Soit $\chi$ un caractère de Dirichlet de conducteur m ou mq . Soit $h \in \underset{\sim}{N}$ , $r_h = p^{-1/(p-1)p^h}$ , on pose, si $n \in \underset{\sim}{N}$ , $T_n = (1+mq)^n(1+T) - 1$. Alors, si $T \in D(0\ ,\ r_h)^-$

$$\sum\nolimits_{a=0}^{\prime\, mqp^h-1} \chi(a)(1+T)^{\psi(a)} = \sum_{n\geq 0} (mqp^h)^n \binom{\psi(1+T)}{n} I_{\chi\omega^{-n+1}}(T_n) \ .$$

C'est une application de la proposition 1. Posons

$$g_{\chi,h,T}(t) = \sum\nolimits_{a=0}^{\prime\, mqp^h-1} \chi(a)(1+T)^{\psi(a+tmqp^h)} \ .$$

Si $|T| \leq \rho < r_h$ , $g_{\chi,h,T}(t)$ est une fonction analytique de $t$ sur $D(0\ ,\ \rho^{-p^h}\ p^{-1/(p-1)})^- \supset D(0\ ,\ 1)^+$ .

D'après la proposition 1, on a, sur $D(0\ ,\ \rho^{-p^h}\ p^{-1/(p-1)})^-$ ,

$$(1 * g_{\chi,h,T})(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n\ !} (1 * g_{\chi,h,T}^{(n-1)})'(0) \ .$$

Or

$$\frac{d}{dt} g_{\chi,h,T}(t) = mqp^h\ \psi(1+T) \sum\nolimits_{a=0}^{\prime\, mqp^h-1} \frac{\chi(a)}{a+tmqp^h} (1+T)^{\psi(a+tmqp^h)} \ .$$

Or

$$\frac{1}{a+tmqp^h} = \omega(a)^{-1}\ (1+mq)^{\psi(a+tmqp^h)} \ ,$$

donc

$$\frac{d}{dt} g_{\chi,h,T}(t) = mqp^h\ \psi(1+T) \sum\nolimits_{a=0}^{\prime\, mqp^h-1} \chi\omega^{-1}(a)(1+T_1)^{\psi(a+tmqp^h)} \ .$$

Par récurrence, il vient :

$$\frac{1}{(k-1)\ !} \frac{d^{(k-1)}}{dt^{k-1}} g_{\chi,h,T}(t) =$$

$$= (mqp^h)^{k-1} \binom{\psi(1+T)}{k-1} \sum\nolimits_{a=0}^{\prime\, mqp^h-1} \chi\omega^{-k+1}(a)(1+T_{k-1})^{\psi(a+tmqp^h)} \ .$$

D'après les propositions 6 et 9 :

$$\frac{1}{k\ !} (1 * g_{\chi,h,T}^{(k-1)})'(0) = (mqp^h) \binom{\psi(1+T)}{k} I_{\chi\omega^{-k+1}}(T_k)$$

où $I_{\chi\omega^{-k+1}}(T) \equiv 0$ si $\chi\omega^{-k+1}$ est impair.

En particulier, si $t = 1$,

$$(1 * g_{\chi,h,T})(1) = g_{\chi,h,T}(0) = \sum\nolimits_{a=0}^{\prime\, mqp^h-1} \chi(a)(1+T)^{\psi(a)}$$

$$= \sum_{n\geq 1} (mqp^h)^n \binom{\psi(1+T)}{n} I_{\chi\omega^{-n+1}}(T_n) .$$

Il est clair, comme prévu a priori, que cette dernière série converge pour $|T| < r_h$.

COROLLAIRE 7. - Soit $\chi$ un caractère de Dirichlet primitif de conducteur $m$ ou $mq$.

Si $n \in \underset{\sim}{Z}$, on pose :

$$I_\chi(T_{n+1}) = \sum_{i\geq 0} (P_h(T))^i \sum_{k=0}^{p^h-1} b_{k,h,i}^{(n)}(\chi)(1+T)^k .$$

On a, mod $qp^h \mathcal{O}_\chi$,

$$\begin{cases} b_{k,h,0}(\chi) \\ \quad \equiv \lim_{s\to\infty} \dfrac{-\log(1+mq)}{mqp^s} \sum_a^{(m,k,h)} \chi(a)\left(\dfrac{\omega(a)}{a}\right)^n \sum_{t=0}^{p^s-1} \dfrac{\psi(a+tmqp^h)-k}{p^h} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} b_{k,h,0}^{(n)}(\chi) + b_{k,h,1}^{(n)}(\chi) \\ \quad \equiv \lim_{s\to\infty} \dfrac{-\log(1+mq)}{mqp^s} \sum_a^{(m,k,h)} \chi(a)\left(\dfrac{\omega(a)}{a}\right)^n \sum_{t=0}^{p^s-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\psi(a+tmqp^h)-k}{p^h} \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3} b_{k,h,0}^{(n)}(\chi) - \frac{1}{2} b_{k,h,1}^{(n)}(\chi) + b_{k,h,2}^{(n)}(\chi) \\ \quad \equiv \lim_{s\to\infty} \dfrac{-\log(1+mq)}{mqp^s} \sum_a^{(m,k,h)} \chi(a)\left(\dfrac{\omega(a)}{a}\right)^n \sum_{t=0}^{p^s-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\psi(a+tmqp^h)-k}{p^h} \\ 3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

On a en effet :

$$G_\chi(T_n) = \psi(1+T_n)\, I_\chi(T_{n+1}) = (\psi(1+T)-n)\, I_\chi(T_{n+1})$$

$$= \lim_{s\to\infty} \frac{-1}{mqp^{s+h}} \sum\nolimits_{a=0}^{\prime\, mqp^{h+s}} \chi(a)(1+T)^{\psi(a)} (1+mq)^{n\psi(a)}$$

$$= \lim_{s\to\infty} \frac{-1}{mqp^h} \sum\nolimits_{a=0}^{\prime\, mqp^{h+s}-1} \chi(a)\left(\frac{\omega(a)}{a}\right)^n (1+T)^{\psi(a)} .$$

Donc :

$$p^h \log(1+T)\, I_\chi(T_{n+1}) + n \log(1+mq)\, p^h\, I_\chi(T_{n+1})$$

$$= \lim_{s\to\infty} \frac{\log(1+mq)}{mqp^s} \sum_{k=0}^{p^h-1} \sum_a^{(m,k,h)} \sum_{t=0}^{p^s-1} \chi(a) \left(\frac{\omega(a)}{a+tmqp^h}\right)^n (1+T)^{\psi(a+tmqp^h)}$$

et donc mod $qp^h\, \mathcal{O}_\chi[[T]]$

$$p^h \log(1+T)\, I_\chi(T_{n+1})$$

$$\equiv \lim_{s\to\infty} \frac{\log(1+mq)}{mqp^s} \sum_{k=0}^{p^h-1} \sum_a^{(m,k,h)} \sum_{t=0}^{p^s-1} \chi(a)\left(\frac{\omega(a)}{a+tmqp^h}\right)^n (1+T)^k$$

$$\times\ (1+T)^{p^h(\psi(a+tmqp^h)-k)/p^h}\ .$$

En utilisant le fait que

$$p^h \log(1+T) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} \left((1+T)^{p^h}-1\right)^{n+1}$$

et que

$$(1+T)^{p^h(\psi(a+tmqp^h)-k)/p^h} = \sum_{i\geq 0} \binom{\frac{\psi(a+tmqp^h)-k}{p^h}}{i} \left((1+T)^{p^h}-1\right)^i$$

sur $D(0\ ,\ 1)^-$ , le résultat est immédiat en développant les deux membres en série de puissance de $P_h(T)$ , comme à la proposition 4, et en utilisant l'unicité d'un tel développement sur $D(0\ ,\ 1)^-$ (lemme 4). On remarque en outre que

$$\left(\frac{\omega(a)}{a+tmqp^h}\right)^n \equiv \left(\frac{\omega(a)}{a}\right)^n \mod qp^h\, \mathcal{O}_\chi\ .$$

D'où le résultat.

4. Premières applications.

Le but de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant : Pour tout caractère $\theta$ , il existe au moins un entier $j$ , $0 \leqslant 2j \leqslant p-2$ , tel que

$$\left\|\frac{1}{2}\ I_{\theta\omega^{-2j}}\right\| = 1\ .$$

Ce résultat aura pour corollaire la nullité de $\mu_2$ et $\mu_3$ pour tout corps abélien sur $\mathbb{Q}$ (voir aussi [F 1], [F W 1], [S 1]).

LEMME 10. - <u>Soit</u> $\beta_i \in \mathbb{Z}_p$ <u>pour</u> $1 \leqslant i \leqslant n$ , <u>et soit</u> $\alpha_i \in \mathbb{C}_p$ <u>pour</u> $1 \leqslant i \leqslant n$ . <u>Alors, si</u> $F(T) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (1 + T)^{\beta_i}$ , $F(T) \in \mathfrak{A}^-_{b,1}$ , <u>et si les</u> $\beta_i$ <u>sont tous distincts</u> :

$$\|F\| = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |\alpha_i| .$$

Si $\beta_i \in \mathbb{Z}_p$ , il est bien connu que $(1 + T)^{\beta_i} \in \mathfrak{A}^-_{b,1}$ . On peut supposer sans nuire à la généralité que $1 = |\alpha_1| = |\alpha_2| = \ldots = |\alpha_n| = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |\alpha_i|$ . On va raisonner par recurrence sur $n$ .

Si $n = 1$ , il est clair que $\sup_{|T|<1} |(1 + T)^{\beta_i}| = 1$ .

Si $n > 1$ . Alors, pour $m \geqslant 1$ ,

$$\frac{1}{m\,!} \frac{d^m}{dT^m} ((1 + T)^{-\beta_1} F(T)) = \sum_{2\leqslant i\leqslant n} \binom{\beta_i - \beta_1}{m} \alpha_i (1 + T)^{\beta_i-\beta_1-m} .$$

Comme les $\beta_i$ sont supposés tous distincts, on peut toujours trouver un indice $i$ et un entier $m$ tels que

$$|\binom{\beta_i - \beta_1}{m}| = 1 .$$

D'après l'hypothèse de récurrence,

$$\sup_{|T|<1} |\sum_{1\leqslant 2\leqslant 1} \binom{\beta_i - \beta_1}{m} \alpha_i (1 + T)^{\beta_i-\beta_1-m}| = 1 .$$

Or

$$\sup_{|T|<1} |\frac{1}{m\,!} \frac{d^m}{dT^m} ((1 + T)^{-\beta_1} F(T))| \leqslant \|F\| ,$$

donc $\|F\| = 1 = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |\alpha_i|$ .

PROPOSITION 11. - <u>Pour tout caractère</u> $\theta$ , <u>il existe toujours au moins un entier</u> $j$ , $0 \leqslant 2 \leqslant q - 3$ , <u>tel que</u> :

(i) $\theta\, \omega^{-2j}$ <u>est non trivial</u>

(ii) $\|\frac{1}{2} I_{\theta\omega^{-2j}}\| = 1$ .

Soit $m$ ou $mq$ le conducteur de $\theta$ , avec $(m , p) = 1$ (conformément à la convention faite dans les notations). Si $m > 1$ , $\theta\omega^{-2j}$ est non trivial pour tout entier $j$ .

Considérons le cas $m = 1$ , ce qui implique que $p \geqslant 5$ (car $\theta$ est pair). Dans ce cas, $\theta = \omega^{2j}$ , $0 \leqslant 2j \leqslant p - 3$ , et on a

$$L_p(- 1 , \omega^2) = - (1 - p) \frac{B_2}{2} = - \frac{1 - p}{12} ,$$

et comme $p \geq 5$ , on a $|L_p(-1, \omega^2)| = 1$ ce qui entraîne $\|I_{\omega^2}\| = 1$ .

On peut donc supposer maintenant $m > 1$ .

Posons, pour $1 \leq s \leq q-1$ ,

$$I_{\theta,s}(T) = \sum_{j=1}^{q-1} \omega^j(s)\, I_{\theta\omega^{-j}}(T) .$$

On a :

$$I_{\theta\omega^{-n},s}(T) = \sum_{j=1}^{q-1} \omega^j(s)\, I_{\theta\omega^{-j-n}}(T) =$$

$$= \sum_{j=1}^{q-1} \omega^{j-n}(s)\, I_{\theta\omega^{-j}}(T) = \omega^{-n}(s)\, I_{\theta,s}(T) .$$

On pose :

$$F_{\theta,h,s}(T) = \sum_{j=1}^{q-1} \omega^j(s)\, F_{\theta\omega^{-j},h}(T) = (p-1)\frac{q}{p} \sum_{\substack{a=0 \\ a\equiv s(p)}}^{mqp^h-1} \theta(a)(1+T)^{\varphi(a)} .$$

Donc, d'après la proposition 10, pour $|T| < r_h$ ,

$$F_{\theta,h,s}(T) = \sum_{n\geq 1} (mqp^h)^n \binom{\psi(1+T)}{n} I_{\theta\omega^{-n+1},s}(T_n)$$

$$= \sum_{n\geq 1} \omega(s) \left(\frac{mqp^h}{\omega(s)}\right)^n \binom{\psi(1+T)}{n} I_{\theta,s}(T_n) .$$

Or on a, si $|T| < 1$ ,

$$I_{\theta,s}(T_n) = \sum_{k\geq 0} (1+T)^k ((1+mq)^n - 1)^k \frac{1}{k\,!} I_{\theta,s}^{(k)}(T) ,$$

où $I_{\theta,s}^{(k)}(T) = (d^k/dT^k)\, I_{\theta,s}(T)$ . Donc si $|T| < r_h$ ,

$$F_{\theta,h,s}(T) = \sum_{k\geq 0} \omega(s) \frac{(1+T)^k}{k\,!} I_{\theta,s}^{(k)}(T) \sum_{n\geq 1} \left(\frac{mqp^h}{\omega(s)}\right)^n \binom{\psi(1+T)}{n} ((1+mq)^n - 1)^k .$$

Or

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{mqp^h}{\omega(s)}\right)^n \binom{\psi(1+T)}{n} ((1+mq)^n - 1)^k$$

$$= \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} \left\{\left(1 + (1+mq)^\ell \frac{mqp^h}{\omega(s)}\right)^{\psi(1+T)} - 1\right\} .$$

Posons $\psi\left(1 + (1+mq)^\ell \frac{mqp^h}{\omega(s)}\right) = \beta(\ell) \in \mathbb{Z}_p$ .

Si $|T| < r_h$ , on a :

$$(1 + (1 + mq)^{\ell} \frac{mqp^h}{\omega(s)})^{\psi(1+T)} = (1 + T)^{\beta(\ell)} \in \mathfrak{a}^-_{b,1} .$$

Donc si $T \in D(0 , 1)^-$

$$\begin{cases} F_{\theta,h,s}(T) \\ \quad = \sum_{k\geq 0} \frac{(1 + T)^k}{k\,!} \; I^{(k)}_{\theta,s}(T) \; \omega(s) \; \sum_{\ell=0}^{k} (- 1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} \; ((1 + T)^{\beta(\ell)} - 1) . \end{cases}$$

La série du second membre converge si $|T| < 1$ , car $\|\frac{1}{k\,!} I^{(k)}_{\theta,s}\| \leq \|I_{\theta,s}\|$ et, d'après le théorème de Mahler, ([Ma ] ou [Am ]),

$$\lim_{k\to\infty} |\sum_{\ell=0}^{k} (- 1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} ((1 + T)^{\beta(\ell)} - 1)| = 0 ,$$

puisque $\ell \dashrightarrow (1 + T)^{\beta(\ell)} \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p , \mathbb{C}_p)$ si $|T| < 1$ .

Si l'on avait $\|I_{\theta,s}\| = \rho < 1$ , on aurait alors $\|F_{\theta,h,s}\| \leq \rho < 1$ , ce qui contredit le lemme 10. On a donc nécessairement $\|I_{\theta,s}\| = 1$ (ce résultat est à rapprocher de [Gr 1]). Par ailleurs, il est facile de voir que, si $\|\frac{1}{2} I_{\theta\omega^{-j}}\| < 1$ pour $1 \leq j \leq q - 1$ , on aurait $\|I_{\theta,s}\| < 1$ ce qui contredit le résultat précédent, **d'où la proposition, compte tenu de ce que** $I_{\theta\omega^{-j}}(T) \equiv 0$ si $j$ est impair.

Comme corollaire de cette proposition, on obtient immédiatement le théorème de Ferrero-Washington pour $p = 2$ et $3$ ([F 1], [F-W 1], [S 1]).

THÉORÈME 2. - Si $p = 2 , 3$ et si $K$ est un corps abélien sur $\mathbb{Q}$ , l'invariant $\mu_p$ d'Iwasawa associé à $K$ est nul.

On sait, [F-W 1], que si $K$ est abélien sur $\mathbb{Q}$ , la nullité de $\mu_p(K)$ équivaut à $\|\frac{1}{2} I_\theta\| = 1$ pour tous les caractères de Dirichlet primitifs pairs, non triviaux, de conducteur $m$ ou $mq$ , avec $(m , p) = 1$ , associés au groupe de Galois de $K$ sur $\mathbb{Q}$ . Si $p = 2$ ou $3$ , $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^* \simeq \{+ 1 , - 1\}$ et $\omega^2 = \varepsilon$ . Donc $I_\theta = I_{\theta\omega^2}$ et $I_{\theta\omega} \equiv 0$ .

La proposition 11 donne le résultat.

## 5. Le théorème de Ferrero-Washington.

Au paragraphe 4, nous avons démontré le théorème de Ferrero-Washington pour $p = 2$ ou $3$ . Dans ce paragraphe, nous le démontrons pour $p \geq 5$ , Le principe de la démonstration est d'utiliser la proposition 11, donc de supposer que $\|\frac{1}{2} I_{\theta\omega^{-2}}\| = 1$ et de montrer que ceci entraîne que $\|\frac{1}{2} I_\theta\| = 1$ , cette méthode avait été utilisée déjà pour $p = 5$ avec une technique différente dans [F 1]. Une démonstration différente, basée sur une formule de Katz pour $I_\theta$ , a été donnée par SINNOTT [S 1].

PROPOSITION 12. - *Soit* $\chi$ *un caractère de Dirichlet primitif de conducteur* $m$ *ou* $mq$ , $(m , p) = 1$ . *Soit* $h \in \mathbb{N}$ , *soit* $\gamma \in \mu_\infty$ . *On suppose que* $\frac{1+T}{1+mq} = \gamma(1+V)$ *avec* $|V| < r_h = p^{-1/(p-1)p^h}$ . *Avec les notations de la proposition 10, on a, alors :*

$$\sum_{n\geq 1} (mqp^h)^n \binom{\psi(1+T)}{n} I_{\chi\omega^{-n+1}}(T_n)$$

$$= \lim_{\ell\to\infty} \frac{-1}{mqp^\ell} \frac{\log(1+mq)}{\log(1+V)}$$

$$\times \sum\nolimits'^{mqp^\ell-1}_{a=0} \chi\omega(a)\ \gamma^{\psi(a)} \{(1+V)^{\psi(a+mqp^h)} - (1+V)^{\psi(a)}\} .$$

Remarquons que les deux membres ont un sens, compte tenu des hypothèses faites sur $T$ et $V$ . En effet avec ces hypothèses $|\psi(1+T)| < qp^h\ p^{-1/(p-1)}$ et le membre de gauche a donc un sens, le membre de droite existe lui pour $V \in D(0 , 1)^-$ d'après le lemme 3 (cf. aussi la proposition 5).

Supposons donc que $\gamma \in \mu^*_{p^s}$ ,et posons

$$g_{\chi,\gamma,V,h}(t) = \frac{-1}{mqp^s} \sum\nolimits'^{mqp^s-1}_{a=0} \chi\omega(a)\ \gamma^{\psi(a)} (1+V)^{\psi(a+tmqp^h+tmqp^s)}$$

et

$$g_{\chi,\gamma,V}(t) = \frac{-1}{mqp^s} \sum\nolimits'^{mqp^s-1}_{a=0} \chi\omega(a)\ \gamma^{\psi(a)} (1+V)^{\psi(a+tmqp^s)} .$$

De la proposition 2, on tire immédiatement, en prenant la dérivée en zéro des deux membres,

$$(1 * g_x)'(0) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n\,!} (1 * g^{(n)})'(0)$$

(avec les notations de la proposition 2).

Il vient donc ici :

$$(1 * g_{\chi,\gamma,V,h})'(0) = \sum_{n\geq 0} \frac{(mqp^h)^n}{n\,!} (1 * g^{(n)}_{\chi,\gamma,V})'(0) .$$

Or, par définition de $I_{\chi\omega^{-n+1}}$ , on a :

$$\frac{1}{n\,!} (1 * g^{(n)}_{\chi,\gamma,V})'(0) =$$

$$= \psi(1+V) \binom{\psi((1+V)(1+mq))}{n} I_{\chi\omega^{-n+1}}((1+mq)^{n+1}(1+V)\gamma - 1) ,$$

or $\psi((1+V)(1+mq)) = \psi(1+T)$ ,

$$I_{\chi\omega^{-n+1}}((1+mq)^{n+1}(1+V)\gamma - 1) = I_{\chi\omega^{-n+1}}(T_n) .$$

Et par définition

$$(1 * g_{\chi,\gamma,V,h})'(0) = \lim_{\ell\to\infty} \frac{-1}{mqp^{\ell}} \sum_{a=0}^{'mqp^{\ell}-1} \chi\omega(a)\ \gamma^{\psi(a)}(1+V)^{\psi(a+mqp^{h})} ,$$

$$(1 * g_{\chi,\gamma,V})'(0) = \lim_{\ell\to\infty} \frac{-1}{mqp^{\ell}} \sum_{a=0}^{'mqp^{\ell}-1} \chi\omega(a)\ \gamma^{\psi(a)}(1+V)^{\psi(a)} .$$

D'où le résultat.

COROLLAIRE 8. - <u>Si</u> $h \in \underset{\sim}{N}$ , $\gamma \in \mu_{p^{\infty}}$ , $\frac{1+T}{1+mq} = \gamma(1+V)$ <u>avec</u> $|V| < r_h$ , <u>on a</u> :

$$\sum_{n\geqslant 1}(mqp^{h})^{n} \binom{\psi(1+T)}{n} I_{\theta\omega^{-n+1}}(T_n)$$

$$= \lim_{\ell\to\infty} \frac{-1}{mqp^{\ell}} \frac{\log(1+mq)}{\log(1+V)} \sum_{a=0}^{'mqp^{\ell}-1} \theta\omega(a)\ \gamma^{\psi(a)} \times (1+V)^{\psi(a+mqp^{h})} .$$

On applique la proposition 12 avec $\chi = \theta$ , et on remarque que $\theta\omega$ est impair, donc d'après le lemme 9 , on a

$$\lim_{\ell\to\infty} \frac{-1}{mqp^{\ell}} \sum_{a=0}^{'mqp^{\ell}-1} \theta\omega(a)\ \gamma^{\psi(a)}(1+V)^{\psi(a)} = 0 .$$

LEMME 11. - <u>Soit</u> $\gamma \in \mu_{p^{\infty}}$ , $h \in \underset{\sim}{N}$ , <u>alors</u> :

$$\lim_{\ell\to\infty} \frac{-1}{mqp^{\ell}} \frac{\log(1+mq)}{\log(1+V)} \sum_{a=0}^{'mqp^{\ell}-1} \theta\omega(a)\ \gamma^{\psi(a)}(1+V)^{\psi(a+mqp^{h})} ,$$

<u>définit une fonction analytique bornée sur</u> $D(0\ ,\ 1)^{-}$ , <u>notée</u> $H_{\theta,h,\gamma}(V)$ , <u>telle que</u> $\|H_{\theta,h,\gamma}\| \leqslant 1$ .

Supposons que $\gamma \in \mu^{*}_{p^{s}}$ , on choisit $\ell > s$ , $\ell > h$ . Montrons que $\sum_{a=0}^{'mqp^{\ell}-1} \theta\omega(a)\ \gamma^{\psi(a)}(1+V)^{\psi(a+mqp^{h})}$ s'annule pour $1+V = \zeta \in \mu_{p^{\ell}}$ .

$$\sum_{a=0}^{'mqp^{\ell}-1} \theta\omega(a)\ \gamma^{\psi(a)}\ \zeta^{\psi(a+mqp^{h})} = \sum_{a=0}^{'mqp^{s}-1} \theta\omega(a)\ \gamma^{\psi(a)} \sum_{t=0}^{p^{\ell-s}-1} \zeta^{\psi(a+mqp^{h}+tmqp^{s})} .$$

**Ou bien** $\zeta \in \mu_{p^{\ell}} - \mu_{p^{s}}$ , et alors

$$\sum_{t=0}^{p^{\ell-s}-1} \zeta^{\psi(a+mqp^{h}+tmqp^{s})} = 0$$

(car $\psi(a+mqp^{h}+tmqp^{s})$ , pour $0 \leqslant t \leqslant p^{\ell-s}-1$ parcourt un système complet de représentant de $(1+qp^{s}\underset{\sim}{Z})/(1+qp^{\ell}\underset{\sim}{Z})$ ).

Ou bien $\zeta \in \mu_{p^{s}}$ , et alors

$$\sum_{t=0}^{p^{\ell-s}-1} \zeta^{\psi(a+mqp^h+tmqp^s)} = p^{\ell-s}\,\zeta^{\psi(a+mqp^h)} \;;$$

si $s \leqslant h$ ,

$$\sum_{a=0}^{\prime\, mqp^s-1} \theta\omega(a)\ \gamma^{\psi(a)}\ \zeta^{\psi(a+mqp^h)} = \sum_{a=0}^{\prime\, mqp^s-1} \theta\omega(a)(\gamma\zeta)^{\psi(a)} = 0 \,,$$

si $s > h$ ,

$$\sum_{a=0}^{\prime\, mqp^s-1} \theta\omega(a)\ \gamma^{\psi(a)}\ \zeta^{\psi(a+mqp^h)}$$

$$= \sum_{a=0}^{\prime\, mqp^{s-h}} \theta\omega(a) \sum_{t=0}^{p^h-1} \gamma^{\psi(a+tmqp^{s-h})}\ \gamma^{\psi(a+mqp^h+tmqp^{s-h})}$$

$$= \sum_{a=0}^{\prime\, mqp^{s-h}} \theta\omega(a)\ \ p^h-1\ (\gamma\ \zeta)^{\psi(a+tmqp^{s-h})}\ \zeta^{\psi(1+(mqp^h/(a+tmqp^{s-h}))} \;;$$

Or pour $a$ fixé, $\zeta^{\psi(1+(mqp^h/(a+tmqp^{s-h})}$ est indépendant de $t$ , donc, dans ce cas,

$$\sum_{t=0}^{p^h-1} (\gamma\ \zeta)^{\psi(a+tmqp^{s-h})} = 0$$

et, dans tous les cas,

$$\sum_{a=0}^{\prime\, mqp^s-1} \theta\omega(a)\ \gamma^{\psi(a)}\ \zeta^{\psi(a+mqp^h)} = 0 \,.$$

On peut donc écrire

$$-\frac{\log(1+mq)}{mq} \sum_{a=0}^{\prime\, mqp^\ell-1} \theta\omega(a)\ \gamma^{\psi(a)}(1+V)^{\psi(a+mqp^h)} = ((1+V)^{p^\ell}-1)\ H_{\theta,h,\gamma,\ell}(V)$$

où $H_{\theta,h,\gamma,\ell}(V) \in \mathcal{O}_p[[V]]$ , d'après le lemme de préparation de Weierstrass p-adique [Am 1].

Comme

$$\lim_{\ell\to\infty} \frac{(1+V)^{p^\ell}-1}{p^\ell} H_{\theta,h,\gamma,\ell}(V) \quad \text{existe pour tout} \quad V \in D(0\ ,\ 1)^-$$

et que

$$\lim_{\ell\to\infty} \frac{(1+V)^{p^\ell}-1}{p^\ell} = \log(1+V) \quad \text{si} \quad |V| < 1 \,,$$

on en déduit que

$$\lim_{\ell\to\infty} H_{\theta,h,\gamma,\ell}(V) = H_{\theta,h,\gamma}(V) \in \mathcal{O}_p[[V]] \,.$$

COROLLAIRE 9. - <u>Soit</u> $V \in D(0\ ,\ 1)^-$ <u>fixé. Il existe sur</u> $D(0\ ,\ 1)^-$ <u>une unique fonction analytique bornée de</u> $T$ , $K_{\theta,h,V}(T)$ , <u>telle que, pour tout</u> $\gamma \in \mu_{p^\infty}$ , <u>on ait</u>

$$K_{\theta,h,V}(\gamma - 1) = H_{\theta,h,\gamma}(V) .$$

D'après le corollaire 4, il suffit de montrer : Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k$, $0 \leqslant k \leqslant p^n - 1$, on a

$$\left|\frac{1}{p^n} \sum_{\gamma \in \mu_{p^n}} \gamma^{-k} H_{\theta,h,\gamma}(V)\right| \leqslant M .$$

Or on a

$$\frac{1}{p^n} \sum_{\gamma \in \mu_{p^n}} \gamma^{-k} H_{\theta,h,\gamma}(V)$$

$$= \lim_{\ell\to\infty} \frac{-1}{mqp^\ell} \frac{\log(1+mq)}{\log(1+V)} \sum_{a<mqp^\ell}^{(m,k,n)} \theta\omega(a)(1+V)^{\psi(a+mqp^h)} .$$

Si $\zeta = 1 + V \in \mu_{p^\infty}$, on montre, comme au lemme 11, que, pour $\ell$ assez grand,

$$\sum_{a<mqp^\ell}^{(m,k,n)} \theta\omega(a)\, \zeta^{\psi(a+mqp^h)} = 0 ,$$

et on en déduit donc, comme au lemme 11, que

$$\lim_{\ell\to\infty} \frac{-1}{mqp^\ell} \frac{\log(1+mq)}{\log(1+V)} \sum_{a<mqp^\ell}^{(m,k,n)} \theta\omega(a)(1+V)^{\psi(a+mqp^h)}$$

$$= b_{k,n,0}(V) \in \mathcal{O}_p[[V]] .$$

LEMME 12. - <u>On a, pour</u> $h \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mu_{p^\infty}$, $V \in D(0, 1)^-$ :

$$H_{\theta,h,\gamma}(V) = \sum_{k=0}^{p^h-1} b_{k,h,0}(V)\, \gamma^k$$

$$+ (\gamma^{p^h} - 1) \sum_{k=0}^{p^h-1} b_{k,h,1}(V)\, \gamma^k + (\gamma^{p^h} - 1)^2 H_{2,V}(\gamma) ,$$

<u>où</u> $|H_{2,V}(\gamma)| \leqslant 1$, <u>et où</u>

$$b_{k,h,0}(V) = \lim_{\ell\to\infty} \frac{-1}{mqp^\ell} \frac{\log(1+mq)}{\log(1+V)} \sum_{a<mqp^\ell}^{(m,k,h)} \theta\omega(a)(1+V)^{\psi(a+mqp^h)} \in \mathcal{O}_p[[V]]$$

$$b_{k,h,1}(V) = \lim_{n\to\infty} \sum_{a<mqp^n}^{(m,k,h)} \theta\omega(a) \frac{\psi(a) - k}{p^h}$$

$$\times \lim_{\ell\to\infty} \frac{-1}{mqp^\ell} \frac{\log(1+mq)}{\log(1+V)} \sum_{t=0}^{p^{\ell-n}-1} (1+V)^{\psi(a+tmqp^n+mqp^h)} \in \mathcal{O}_p[[V]].$$

L'existence des fonctions $b_{k,h,0}(V)$, $b_{k,h,1}(V)$ et $H_{2,V}(\gamma)$, appartenant à $\mathcal{O}_p[[V]]$, provient du fait que $|K_{\theta,h,V}(\gamma)| \leqslant 1$, si $V \in D(0, 1)^-$, $\gamma \in \mu_{p^\infty}$, de la proposition 4 et du corollaire 8. Le calcul de $b_{k,h,0}(V)$ a déjà été effectué dans la démonstration du corollaire 8. D'après le corollaire 6, on a

$$b_{k,h,1}(V) = \lim_{s\to\infty} \sum_{j=0}^{p^s-1} j\, b_{k+jp^h,h+s,0}(V) .$$

Si $0 \leqslant k \leqslant p^h - 1$ ,

$b_{k+jp^h,h+s,0}(V)$

$$= \lim_{\ell\to\infty} \frac{-1}{mqp^\ell} \frac{\log(1+mq)}{\log(1+V)} \sum_{a<mqp^\ell}^{(m,k+jp^h,h+s)} \theta\omega(a)(1+V)^{\psi(a+mqp^h)}$$

$$= \lim_{\ell\to\infty} \frac{-1}{mqp^\ell} \frac{\log(1+mq)}{\log(1+V)} \sum_{a}^{(m,k+jp^h,h+s)} \theta\omega(a) \times \sum_{t=0}^{p^{\ell-h-s}-1} (1+V)^{\psi(a+tmqp^{h+s}+mqp^h)}.$$

Si $0 \leqslant a \leqslant mqp^{h+1} - 1$ , $|\psi(a) - (k + jp^h)| \leqslant p^{-h-s}$ , on a $j \equiv \frac{\psi(a) - b}{p^h} \bmod p^s \underset{\sim}{Z}_p$ d'où le résultat en posant $h + s = n$ et en remarquant que, si $0 \leqslant j \leqslant p^s - 1$ , alors $0 \leqslant a \leqslant mqp^{h+1} - 1$ et $|(\psi(a) - k)/p^h| \leqslant 1$ .

LEMME 13. - <u>On a</u>

$$b_{k,h,0}(V) = (1+V)^k \sum_{i\geqslant 0} ((1+V)^{p^h} - 1)^i\, c_{k,h,i}$$

$$b_{k,h,1}(V) = (1+V)^k \sum_{i\geqslant 0} ((1+V)^{p^h} - 1)^i\, d_{k,h,i} .$$

<u>En outre, si</u> $I_\theta(T_{n+1}) = \sum_{i\geqslant 0}(P_h(T))^i \sum_{k=0}^{p^h-1} b_{k,h,i}^{(n)}(\vartheta)(1+T)^k$ , <u>on a,</u> mod $qp^h\, \mathcal{O}_\theta$ ,

$$c_{k,h,2} \equiv \frac{mq}{\log(1+mq)} \{\tfrac{1}{2} b_{k,h,0}^{(1)}(\theta) - b_{k,h,1}^{(1)}(\theta)\}$$

$$d_{k,h,2} \equiv \frac{-mq}{\log(1+mq)} \{\tfrac{1}{4} b_{k,h,0}^{(1)}(\theta) + \tfrac{5}{2} b_{k,h,1}^{(1)}(\theta) + 3\, b_{k,h,2}^{(1)}(\theta) + \tfrac{1}{6} b_{k,h,0}^{(3)}(\theta\omega^{-2})\} .$$

D'après le lemme 12, $b_{k,h,0}(V) \in \mathcal{O}_p[[V]]$ et $b_{k,h,1}(V) \in \mathcal{O}_p[[V]]$ , donc, d'après la proposition 4, on peut écrire :

$$b_{k,h,0}(V) = \sum_{i\geqslant 0} (P_h(V))^i \sum_{\ell=0}^{p^h-1} c_{\ell,h,i}(1+V)^\ell$$

$$b_{k,h,1}(V) = \sum_{i\geqslant 0} (P_h(V))^i \sum_{\ell=0}^{p^h-1} d_{\ell,h,i}(1+V)^\ell .$$

Les expressions de $b_{k,h,0}(V)$ et $b_{k,h,1}(V)$ données au lemme 12 montrent immédiatement que $c_{\ell,h,i} = d_{\ell,h,i} = 0$ si $\ell \neq k$, et ceci pour tout $i \in \mathbb{N}$.

On a, si $|V| < r_h$,

$$\frac{(1+V)^{p^h}-1}{p^h \log(1+V)} = 1 + \frac{1}{2}((1+V)^{p^h}-1) - \frac{1}{12}((1+V)^{p^h}-1)^2 + \sum_{i\geq 2} \alpha_i (P_h(V))^i .$$

En utilisant l'expression de $b_{k,h,0}(V)$ donnée au lemme 12, et l'unicité du développement, il vient :

$$c_{k,h,0} = \lim_{\ell\to\infty} \frac{-\log(1+mq)}{mqp^{\ell-h}} \sum_{a<mqp^\ell}^{(m,k,h)} \theta\omega(a) \frac{\psi(a+mqp^h)-k}{p^h}$$

$$\equiv \lim_{\ell\to\infty} \frac{-\log(1+mq)}{mqp^{\ell-h}} \sum_{a<mqp^\ell}^{(m,k,h)} \theta\omega(a) \frac{\psi(a)-k}{p^h}$$

$$+ \lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{p^{\ell-h}} \sum_{a<mqp^\ell}^{(m,k,h)} \theta(a) \frac{\omega(a)}{a} \mod qp^h \, \mathcal{O}_\theta ,$$

D'après le lemme 9 et la proposition 9, $|c_{k,h,0}| \leq |qp^h|$. De même, il vient

$$c_{k,h,1} = \frac{1}{2} c_{k,h,0} - \lim_{\ell\to\infty} \frac{\log(1+mq)}{mqp^{\ell-h}} \sum_{a<mqp^\ell}^{(m,k,h)} \theta\omega(a) \binom{\frac{\psi(a+mqp^h)-k}{p^h}}{2}$$

donc

$$c_{k,h,1} \equiv \lim_{\ell\to\infty} \frac{\log(1+mq)}{mqp^{\ell-h}} \sum_{a<mqp^\ell}^{(m,k,h)} \theta\omega(a) \binom{\frac{\psi(a)-k}{p^h}}{2}$$

$$+ \lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{p^{\ell-h}} \sum_{a<mqp^\ell}^{(m,k,h)} \theta(a) \frac{\omega(a)}{a} \frac{\psi(a)-k}{p^h} \mod qp^h \, \mathcal{O}_\theta .$$

D'après le lemme 9 et le corollaire 7,

$$c_{k,h,1} \equiv \frac{-mq}{\log(1+mq)} b^{(1)}_{k,h,0}(\theta) \mod qp^h \, \mathcal{O}_\theta .$$

De même, on a

$$c_{k,h,2} \equiv -\frac{1}{3} c_{k,h,0} + \frac{1}{2} c_{k,h,1}$$

$$- \lim_{\ell\to\infty} \frac{\log(1+mq)}{mqp^{\ell-h}} \sum_{a<mqp^\ell}^{(m,k,h)} \theta\omega(a) \binom{\frac{\psi(a+mqp^h)-k}{p^h}}{3}$$

d'après le lemme 9, le corollaire 7 et la proposition 9,

$$c_{k,h,2} \equiv \frac{1}{2} c_{k,h,1} + \lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{p^{\ell-h}} \sum_{a<mqp^\ell}^{(m,k,h)} \frac{\theta\omega(a)}{a} \binom{\frac{\psi(a)-k}{p^h}}{2}$$

$$- \frac{1}{2} \lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{p^{\ell-h}} \sum_{a<mqp^\ell}^{(m,k,h)} \frac{\theta\omega(a)}{a} \frac{\psi(a)-k}{p^h} \mod qp^h \, \mathcal{O}_\theta .$$

Donc finalement :

$$c_{k,h,2} \equiv \frac{mq}{\log(1+mq)} \{\frac{1}{2} \quad b^{(1)}_{k,h,0}(\theta) - b^{(1)}_{k,h,1}(\theta)\} \bmod qp^h \, \mathcal{O}_\theta .$$

De même,

$$d_{k,h,0} = \lim_{n\to\infty} \sum^{(m,k,h)}_{a<mqp^n} \theta\omega(a) \frac{\psi(a) - k}{p^h}$$

$$\times \lim_{\ell\to\infty} \frac{-\log(1+mq)}{mqp^{\ell-h}} \sum_{t=0}^{p^{\ell-n}-1} \frac{\psi(a + tmqp^n + mqp^h) - k}{p^h}$$

$$\equiv \lim_{n\to\infty} \sum^{(m,k,h)}_{a<mqp^n} \theta\omega(a) \frac{\psi(a) - k}{p^h}$$

$$\times \lim_{\ell\to\infty} \frac{-\log(1+mq)}{mqp^{\ell-h}} \sum_{t=0}^{p^{\ell-n}-1} \{\frac{\psi(a) - k}{p^h} - \frac{mq}{\log(1+mq)} \frac{tp^{n-h} + 1}{a}\} \bmod qp^h \, \mathcal{O}_\theta .$$

On obtient donc

$$d_{k,h,0} \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^{n-h}} \sum^{(m,k,h)}_{a<mqp^n} \frac{\theta\omega(a)}{a} \frac{\psi(a) - k}{p^h} \bmod qp^h \, \mathcal{O}_\theta$$

$$\equiv \frac{-mq}{\log(1+mq)} \quad b^{(1)}_{k,h,0}(\theta) \bmod qp^h \, \mathcal{O}_\theta .$$

De même,

$$d_{k,h,1} = \frac{1}{2} \quad d_{k,h,0} + \lim_{n\to\infty} \sum^{(m,k,h)}_{a<mqp^n} \theta\omega(a) \frac{\psi(a) - k}{p^h}$$

$$\times \lim_{\ell\to\infty} \frac{-\log(1+mq)}{mqp^{\ell-h}} \sum_{t=0}^{p^{\ell-n}-1} \left(\frac{\psi(a + tmqp^n + mqp^h) - k}{p^h} \atop 2\right)$$

$$d_{k,h,1} \equiv \frac{1}{2} \quad d_{k,h,0}$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \sum^{(m,k,h)}_{a<mqp^n} \frac{\theta\omega(a)}{a} \frac{\psi(a) - k}{p^h} \times \lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{p^{\ell-h}} \sum_{t=0}^{p^{\ell-n}-1} \frac{1}{a} \frac{\psi(a) - k}{p^h} \bmod qp^h \, \mathcal{O}_\theta$$

Donc

$$d_{k,h,1} \equiv \frac{1}{2} \quad d_{k,h,0} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^{n-h}} \sum^{(m,k,h)}_{a<mqp^n} \frac{\theta\omega(a)}{a} \left(\frac{\psi(a) - k}{p^h}\right)^2 \bmod qp^h \, \mathcal{O}_\theta ,$$

donc, $\bmod qp^h \, \mathcal{O}_\theta$ ,

$$d_{k,h,1} \equiv \frac{-mq}{2\log(1+mq)} \quad b^{(1)}_{k,h,0}(\theta) - \frac{2mq}{\log(1+mq)} \, b^{(1)}_{k,h,1}(\theta) .$$

Enfin,

$$d_{k,h,2} = \frac{1}{2} d_{k,h,1} - \frac{1}{3} d_{k,h,0}$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \sum_{a<mqp^n}^{(m,k,h)} \theta\omega(a) \frac{\psi(a) - k}{p^h} \times \lim_{\ell\to\infty} \frac{-\log(1+mq)}{mqp^{\ell-h}} \sum_{t=0}^{p^{\ell-n}-1} \binom{\frac{\psi(a + tmqp^n + mqp^h) - k}{p^h}}{3}$$

donc, $\bmod qp^h \mathcal{O}_\theta$

$$d_{k,h,2} \equiv \frac{1}{2} d_{k,h,1} - \frac{1}{3} d_{k,h,0}$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \sum_{a<mqp^n}^{(m,k,h)} \frac{\theta\omega(a)}{p^{n-h}} \frac{\psi(a) - k}{p^h} \left\{\frac{1}{a} \binom{\frac{\psi(a) - k}{p^h}}{2} - \binom{-\frac{1}{a}}{2} \frac{\psi(a) - k}{p^h} - \binom{-\frac{1}{a}}{3}\right\}$$

donc, $\bmod qp^h \mathcal{O}_\theta$

$$d_{k,h,2} \equiv \frac{1}{2} d_{k,h,1} - \frac{1}{3} d_{k,h,0}$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^{n-h}} \sum_{a<mqp^n}^{(m,k,h)} \frac{\theta\omega(a)}{a} \left\{3 \binom{\frac{\psi(a) - k}{p^h}}{3} + 2 \binom{\frac{\psi(a) - k}{p^h}}{2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\psi(a) - k}{p^h}\right)^2 + \frac{1}{3} \frac{\psi(a) - k}{p^h}\right\}$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^{n-h}} \sum_{a<mqp^n}^{(m,k,h)} \frac{\theta\omega(a)}{6a^3} \frac{\psi(a) - k}{p^h} .$$

C'est-à-dire finalement, grâce au corollaire 7 et aux calculs précédents, $\bmod qp^h \mathcal{O}_\theta$ ,

$$d_{k,h,2} \equiv -\frac{1}{4} \frac{mq}{\log(1+mq)} b^{(1)}_{k,h,0}(\theta) - \frac{5\, mq}{2 \log(1+mq)} b^{(1)}_{k,h,1}(\theta)$$

$$- 3 \frac{mq}{\log(1+mq)} b^{(1)}_{k,h,2}(\theta) - \frac{1}{6} \frac{mq}{\log(1+mq)} b^{(3)}_{k,h,0}(\theta\omega^{-2}) .$$

Ce qui termine le lemme.

L'importance de ce lemme vient de ce que dans l'expression de $d_{k,h,2}$ figurent à la fois des coefficients de $I_\theta$ et de $I_{\theta\omega^{-2}}$.

LEMME 14. - <u>On pose, si</u> $\gamma \in \mu_{p^\infty}$ , $n \in \underset{\sim}{Z}$ ,

$$I_\theta((1+mq)^{n+1} \gamma(1+T) - 1) = \sum_{i\geq 0} (P_h(T))^i \sum_{k=0}^{p^h-1} b^{(n)}_{k,h,i}(\theta\gamma)(1+T)^k$$

$$\sum_{n\geq 1}(mqp^h)^n \binom{\psi(1+V)}{n} I_{\theta\omega^{-n+1}}((1+mq)^n \gamma(1+V)-1)$$

$$=\sum_{i\geq 0} (P_h(V))^i \sum_{k=0}^{p^h-i} a_{k,h,i} (1+V)^k .$$

Alors, $\bmod qp^h \mathcal{O}_p$, si $p \geq 5$, on a

$$a_{k,h,2} \equiv \frac{mq}{\log(1+mq)} \{\frac{1}{2} b^{(0)}_{k,h,0}(\theta\gamma) - b^{(0)}_{k,h,1}(\theta\gamma)\} .$$

La deuxième égalité existe, en vertu de la proposition 12 et du lemme 11, donc en particulier $|a_{k,h,i}| \leq 1$.

Remarquons que, si $n \geq 2$, $p \geq 5$, on a

$$(mqp^h)^n \binom{\psi(1+V)}{n} I_{\theta\omega^{-n+1}}((1+mq)^n \gamma(1+V)-1) \equiv 0$$

$$\bmod\{((1+V)^{p^h}-1)^2 \underset{\sim}{C}_p[[V]] ,\ qp^h \mathcal{O}_p[[V]]\} .$$

En utilisant l'unicité du développement suivant les puissances de $P_h(V)$, il vient, $\bmod qp^h \mathcal{O}_p$,

$$a_{k,h,2} \equiv \frac{-mq}{\log(1+mq)} b^{(0)}_{k,h,1}(\theta\gamma) + \frac{1}{2}\frac{mq}{\log(1+mq)} b^{(0)}_{k,h,0}(\theta\gamma) .$$

THÉORÈME 3. - Pour tout caractère de Dirichlet $\theta$ primitif, pair, de conducteur $m$ ou $mq$, on a $\|\frac{1}{2} I_\theta\| = 1$.

On va raisonner par l'absurde, on peut supposer que $p \geq 5$, le cas $p = 2 , 3$ ayant été réglé à la proposition 11. Supposons que $\|\frac{1}{2} I_\theta\| = p^{-\mu_\theta}$ avec $\mu_\theta > 0$.

D'après la proposition 11, on peut supposer que : $\|\frac{1}{2} I_{\theta\omega^{-2}}\| = 1$, $\theta\omega^{-2}$ non trivial, donc $\mu_{\theta\omega^{-2}} = 0$.

D'après la proposition 4, on a, avec les notations des lemmes 13 et 14,

$|b^{(n)}_{k,h,i}(\theta\gamma)| \leq p^{-\mu_\theta}$, pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, $h \in \underset{\sim}{N}$, $i \in \underset{\sim}{N}$, $0 \leq k \leq p^h - 1$, $\gamma \in \underset{\sim}{\mu}_{p^\infty}$.

Soit $\lambda_\theta$ le nombre de zéros de $I_\theta$ dans $D(0, 1)^-$, $\lambda_\theta$ est fini, car $I_\theta(T) \in \mathcal{O}_\theta[[T]]$, et $\mathcal{O}_\theta$ est une extension finie de $\underset{\sim}{Q}_p$. Choisissons $h$ de telle sorte que $\lambda_{\theta\omega^{-2}} \leq p^h - 1$. Alors, d'après le corollaire 6, il existe $k$, $0 \leq k \leq p^h - 1$, tel que $|b^{(3)}_{k,h,0}(\theta\omega^{-2})| = 1$, on choisira $k$ vérifiant cette condition. Choisissons $\gamma \in \underset{\sim}{\mu}_{p^\infty}$ de telle sorte que $|\gamma^{p^h} - 1| > p^{-\mu_\theta}$, ce qui est toujours possible.

D'après l'unicité du développement en série de puissance de $P_h(V)$, on a avec les notations des lemmes 13 et 14, d'après le corollaire 9 et le lemme 12,

$$\gamma^k\{c_{k,h,2} + (\gamma^{p^h} - 1)\, d_{k,h,2}\} \equiv a_{k,h,2} \mod (\gamma^{p^h} - 1)^2\, \mathcal{O}_p .$$

Donc, d'après les expressions de $c_{k,h,2}$, $d_{k,h,2}$ et $a_{k,h,2}$, d'après les choix de $k$, $h$ et $\gamma$ indiqués ci-dessus, il vient, puisque $p \geq 5$,

$$|c_{k,h,2} + (\gamma^{p^h} - 1)\, d_{k,h,2}| = |\gamma^{p^h} - 1| \quad \text{(lemme 13)}$$

$$|a_{k,h,2}| \leq p^{-\mu_\theta} \quad \text{(lemme 14).}$$

On a donc une contradiction, car la congruence écrite ci-dessus implique que

$$|a_{k,h,2}| = |\gamma^{p^h} - 1| > p^{-\mu_\theta} \quad \text{d'après le choix de } \gamma .$$

D'où le théorème.

COROLLAIRE 10. - <u>Soit</u> $\lambda_\theta$ <u>le nombre de zéros de</u> $I_\theta$ <u>dans</u> $D(0\ ,\ 1)^-$. <u>Alors si</u>

$$\lambda_{\theta\omega^{-2}} \leq p^h - 1 \quad \text{et} \quad \|\tfrac{1}{2}\, I_{\theta\omega^{-2}}\| = 1 ,$$

<u>on a</u>

$$\lambda_\theta \leq 3\, p^h - 1 \quad \text{et} \quad \|\tfrac{1}{2}\, I_\theta\| = 1 .$$

La démonstration du théorème 3 montre en effet que, si $\lambda_{\theta\omega^{-2}} \leq p^h - 1$ et $\|\frac{1}{2}\, I_{\theta\omega^{-2}}\| = 1$, alors nécessairement il existe $k$, $0 \leq k \leq p^{\theta\omega^{-h}-1}$ tel que si $p \geq 5$, ou bien $|b^{(1)}_{k,h,0}(\theta)| = 1$, ou bien $|b^{(1)}_{k,h,1}(\theta)| = 1$ ou bien $b^{(1)}_{k,h,2}(\theta) = 1$, ce qui entraîne, d'après le corollaire 6, $\lambda_\theta < 3p^h - 1$.

THÉORÈME 4 ([F-W 1], [S 1]). - <u>Pour tout corps de nombre</u> $K$ <u>abélien sur</u> $\mathbb{Q}$, <u>pour tout nombre premier</u> $p$, <u>l'invariant</u> $\mu_p$ <u>d'Iwasawa est nul.</u>

Soit $K$ un corps de nombre abélien sur $\mathbb{Q}$. Soit $F$ un corps cyclotomique contenant $K$, $F = \mathbb{Q}[\zeta]$, où $\zeta$ est une racine $mqp^n$-ième de l'unité, primitive, avec $(m\ ,\ p) = 1$. On sait, d'après Ferrero [F 1], que $\mu_p(K) \leq \mu_p(F)$, et que $\mu_p(F) = 0$ équivaut à $\mu_\theta = 0$ pour tout caractère de Dirichlet $\theta$, primitif, pair, non trivial, de conducteur divisant $mq$. Le théorème 3 donne le résultat.

Le théorème 4 est le théorème de Ferrero-Washington, cette démonstration est différente de celle de [F-W 1] ainsi que de celle de [S 1], qui est basée sur d'autres formules donnant $I_\theta$ et qui parait plus simple.

## 6. Majoration de $\lambda$ pour les corps abéliens imaginaires.

Soit $K$ un corps de nombres abélien sur $\mathbb{Q}$, imaginaire. Soit $K^+$ le sous-corps totalement réel maximal de $K$. On suppose que le conducteur de $K$ n'est pas divisible par $pq$, i. e. $K$ peut être plongé dans un corps cyclotomique engendré par une racine de l'unité d'ordre $m$ ou $mq$, avec $(m, p) = 1$.

Soit $K_n = K[\zeta_n]$, où $\zeta \in \mu^*_{p^n}$, et soit $K_n^+$ son sous-corps totalement réel maximal. Soit $h_n$ le nombre de classe de $K_n$, et $h_n^+$ celui de $K_n^+$.

On sait ([Ha 2] ou [Iw 1]) que $h_n^- = h_n/h_n^+$ est un entier. On pose $K_0 = K$, $K_0^+ = K^+$.

Notons $CH^-(K)$ le groupe des caractères primitifs impairs de $K$, i. e. les caractères de Dirichlet primitifs, impairs, de conducteur divisant $m$ ou $mq$. On a alors la formule analytique pour $h_n^-$ ([Ha 2], [F 1]) :

$$h_n^- = h_0^- \, p^n \prod_{\chi \in CH^-(K)} \prod_{\zeta \in \mu_{p^n} - \{1\}} \left(- \frac{1}{2} B_1(\chi \pi_\zeta)\right) .$$

Posons $\chi\omega = \upsilon$. Donc, par définition de $I_\upsilon$,

$$- B_1(\theta\omega^{-1} \pi_\zeta) = I_\theta(\zeta - 1) .$$

Si $\theta = \epsilon$ est trivial, alors $|\frac{1}{2} I_\epsilon(\zeta - 1)| = |\frac{1}{\zeta - 1}|$, donc

$$h_n^- = h_0^- \, p^n \prod_{\zeta \in \mu_{p^n} - \{1\}} \left(\frac{1}{2} I_\epsilon(\zeta - 1)\right) \prod_{\substack{\theta\omega^{-1} \in CH^-(K) \\ \theta \neq \epsilon}} \prod_{\zeta \in \mu_{p^n} - \{1\}} \left(\frac{1}{2} I_\theta(\zeta - 1)\right)$$

et par conséquent

$$|h_n^-| = |h_0^-| \, p^{p^n \mu^- + n\lambda^- + \nu^-} , \text{ pour } n \geq n_0$$

avec

$$\mu^- = \sum_{\substack{\theta\omega^{-1} \in CH^-(K) \\ \theta \neq \epsilon}} \mu_\theta \quad \text{et} \quad \lambda^- = \sum_{\substack{\theta\omega^{-1} \in CH^-(K) \\ \theta \neq \epsilon}} \lambda_\theta ,$$

où $\mu_\theta$ est défini par $\|\frac{1}{2} I_\theta\| = p^{-\mu_\theta}$, et $\lambda_\theta$ est le nombre de zéros de $I_\theta$ dans $D(0, 1)^-$.

LEMME 15. - <u>Le nombre de zéros de</u> $F_{\theta,0}(T) = \sum_{a=0}^{'mq-1} \theta(a)(1 + T)^{\psi(a)}$ <u>dans</u> $D(0,1)^-$ <u>est majoré par</u> $p^h - 1$ <u>si</u>

$$p^{h-1} \leq \frac{(mq - 1)^{p-1}}{q} \leq p^h - 1 .$$

Si $a$ et $b$ sont des entiers positifs distincts inférieurs à $M$, alors $|a - b| \geq \frac{1}{M}$. Donc si $a$ et $b$ sont des entiers positifs distincts premiers à $p$, inférieurs ou égaux à $mq - 1$, on a

$$|\psi(a) - \psi(b)| \geq \frac{1}{(mq - 1)^{p-1}} .$$

En effet :

$$|\psi(a) - \psi(b)| = |\psi(a^{p-1}) - \psi(b^{p-1})| = q|a^{p-1} - b^{p-1}| \geq q/(mq - 1)^{p-1} .$$

Donc a fortiori $|a - b| \geq q/(mq - 1)^{p-1}$ .

Soit $h \in \underset{\sim}{N}$ tel que $p^{h-1} \leqslant (mq - 1)^{p-1}/q \leqslant p^h - 1$ .

Notons $\psi_h(a)$ l'entier positif ou nul tel que $0 \leqslant \psi_h(a) \leqslant p^h - 1$ et $|\psi_h(a) - \psi(a)| \leqslant p^{-h}$ . Soit $a_0$ l'entier premier à $p$ et à $m$ tel que $0 \leqslant a_0 \leqslant mq - 1$ et

$$\sup_{1 \leqslant a \leqslant mq-1} \psi_h(a) = \psi_h(a_0) ,$$

d'après ce qui précède, $a_0$ est unique. Posons

$$\psi_h(a_0) = N_h \quad \text{et} \quad F_{\theta,0}(T) = \sum_{n \geq 0} a_n T^n .$$

On a

$$a_n = \sum_{a=0}^{mq-1} \theta(a) \binom{\psi(a)}{n} ,$$

et en particulier, on a

$$a_{N_k} \equiv \theta(a_0) \mod p\, \mathcal{O}_\theta$$

et $\theta(a_0) \neq 0$ , car $a_0$ premier à $m$ et à $p$ , et $\theta$ est primitif. Donc $|a_{N_k}|=1$.

LEMME 16. - <u>On a, si</u> $p \geq 3$ ,

$$\sum_{j=0}^{(p-3)/2} \lambda_{\theta\omega^{-2j}} \leqslant p^h \frac{p^{(p-1)/2} - 1}{p - 1}$$

<u>où</u> $p^h$ <u>est comme au lemme</u> 15.

La démonstration de la proposition 11, montre qu'il existe toujours un entier $j$ , $0 \leqslant 2j \leqslant p - 3$ , tel que $\lambda_{\theta\omega^{-2j}} \leqslant p^h - 1$ .

D'après le corollaire 10, si $\lambda_{\theta\omega^{-2}} \leqslant p^h - 1$ , alors $\lambda_\theta \leqslant 3\, p^h - 1 \leqslant p^{h+1} - 1$ .

THÉORÈME 5. - <u>Soit</u> $K$ <u>un corps abélien sur</u> $\underset{\sim}{Q}$ <u>totalement imaginaire, soit</u> $\lambda_p(K)$ <u>l'invariant d'Iwasawa attaché à ce corps. Soit</u> $m$ <u>ou</u> $mq$ <u>le conducteur de ce corps, alors</u> :

$$\lambda_p(K) \leqslant 2\, \Phi(m)\, p^h \frac{p^{(p-1)/2} - 1}{p - 1}$$

<u>où</u> $\Phi$ <u>est l'indicatrice d'Euler, où</u>

$$h = \left[ (p - 1) \frac{\ln(mq - 1)}{\ln(p)} - 1 \right] + 1$$

( $\ln$ <u>est le logarithme népérien et</u> $[\ ]$ <u>est la partie entière</u>).

C'est clair car la cardinal de $CH^-(K) \leq \Phi(mq)$ , et

$$\lambda_p(K) \leq 2\ \lambda_p^-(K) \leq 2\ \Phi(m) \sup_{\substack{\theta \in CH^-(K) \\ \theta \bmod \omega}} \left(\sum_{j=0}^{(p-3)/2} \lambda_{\theta\omega^{-2j}}\right), \quad [F-W\ 1].$$

Cette majoration est du même ordre que celle de [Me 1].

COROLLAIRE 11. - <u>Si</u> $K = \underline{Q}(\zeta)$ , <u>où</u> $\zeta$ <u>est une racine primitive</u> p-<u>ième de l'unité avec</u> $p \geq 5$ , <u>on a</u> :

$$\lambda_p(K) \leq 2\ p^{3/2(p-1)} .$$

C'est clair.

Cette majoration est du même ordre que celle de [Me 1].

<u>Conclusions</u>. Je remercie John COATES de l'intérêt qu'il a manifesté pendant l'élaboration de cet article. Je remercie aussi Yvette AMICE pour les nombreuses remarques et corrections qu'elle m'a signalées [Am 4].

Simultanément W. SINNOTT [S 1], a donné une autre démonstration du théorème de Ferrero-Washington basée sur les formules de Katz, [Ka 1], donnant $I_\theta$ , qui est plus simple techniquement parlant.

Le principe de la démonstration qui est présentée ici est simple, on montre que :

(i) $\|\frac{1}{2} I_{\theta\omega^{-2}}\| = 1$ implique $\|\frac{1}{2} I_\theta\| = 1$ (théorème 3)

(ii) on peut toujours supposer que $\|\frac{1}{2} I_{\theta\omega^{-2}}\| = 1$ (proposition 11).

BIBLIOGRAPHIE

[Am 1] AMICE (Y.). - Les nombres p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1973 (Collection SUP, Le Mathématicien, 14).

[Am 2] AMICE (Y.). - Prolongement analytique des sommes de Gauss I et II, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 9e année, 1981/82, n° 13, 9 p., et J1, 14 p.

[Am 3] AMICE (Y.). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180.

[Am 4] AMICE (Y.). - Théorème de Ferrero-Washington, d'après Barsky, Séminaire de théorie des nombres, Delange-Pisot-Poitou, 1982/83.

[B 1] BARSKY (D.). - Sur la série d'Iwasawa attachée à un caractère de Dirichlet, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 9e année, 1981/82, n° 14, 18 p.

[B 2] BARSKY (D.). - Mesures p-adiques et éléments analytiques, J. für die reine und angew. Math., t. 291, 1977, p. 204-219.

[CN 1] CASSOU-NOGUÈS (P.). - Formes linéaires p-adiques et prolongement analytique, Thèse 3e cycle, Université Bordeaux I, 1971.

[CN 2] CASSOU-NOGUÈS (P.). - Formes linéaires p-adiques et prolongement analytique "Thèse de 3e cycle, Université de Bordeaux I, 1971.

[CN 3] CASSOU-NOGUES (P.). - Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zéta et fonctions zéta p-adiques, Ivent. Math., t. 51, 1979, p. 29-59.

[D 1] DIAMOND (J.). - On the value of p-adic L functions at positive integers, Acta arithmetica, Warszawa, t. 35, 1979, p. 223-237.

[F 1] FERRERO (B.). - Iwasawa invariant of abelian number fields, Math. Annalen, t. 234, 1978, p. 9-24.

[F-W 1] FERRERO (B.) and WASHINGTON (L. C.). - The Iwasawa invariant $\mu_p$ vanishes for abelian number fields, Annals of Math., Series 2, t. 109, 1979, p. 377-395.

[Ha 1] HASSE (H.). - Number theory. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag 1980, (Grundelhren der mathematischen Wissenschaften, 229).

[Ha 2] HASSE (H.). - Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper. - Berlin, Akademie Verlag, 1952 (Mathematische Lehrbücher und Monographien. Abteilung 2 Band 1).

[He 1] HELSMOORTEL (E.). - Comportement local des fonctions continues sur un compact régulier d'un corps local, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, 1970, série A, p. 546-548.

[Iw 1] IWASAWA (K.). - Lectures on p-adic L functions. - Princeton, Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1972 (Annals of Mathematic Studies, 74).

[Iw 2] IWASAWA (K.). - On the theory of cyclotomic fields, Annals of Math., Series 2, t. 70, 1959, p. 530-561.

[Iw 3] IWASAWA (K.). - On $\underset{\sim}{Z}_\ell$-extensions of algebraic number fields, Annals of Math., Series 2, t. 98, 1973, p. 246-326.

[Ka 1] KATZ (N. M.). - p-adic L functions via moduli of elliptic curves, "Algebraic geometrie [1974. Arcata], p. 479-506. - Providence, American mathematical Society, 1975 (Proceedings of Symposia in pure Mathematics, 21).

[K-L 1] KUBOTA (T.) und LEOPOLDT (H. W.). - Eine p-adische Theorie der Zetawerte I : Einfuhrung der p-adische Dirichletschen L Functionen, J. für die reine und angew. Math., t. 214-215, 1964, p. 328-339.

[La 1] LANG (S.). - Cyclotomic fields. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1978 (Graduate Texts in Mathematics, 59).

[Le 1] LEOPOLDT (H. W.). - Zur approximation des p-adischen Logarithmus, Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, t. 25, 1961, p. 77-81.

[Ma 1] MAHLER (K.). - An interpolation series for continuous functions of a p-adic variable, J. für die reine und angew. Math., t. 199, 1958, p. 23-34.

[Me 1] METSANKYLA (T.). - An upper bound for the λ-invariant of imaginary abelian fields, Math. Annalen, t. 263, 1983, p. 5-8.

[S 1] SINNOTT (W.). - Proof of the Ferrero-Washington theorem, manuscrit mai 1983.

[W 1] WASHINGTON (L. C.). - Introduction to cyclotomic fields. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1982 (Graduate Texts in Mathematics, 83).

[W 2] WASHINGTON (L. C.). - A note on p-adic L functions, J. of number theory, t. 8, 1976, p. 245-250.