GROUPE DE TRAVAIL
D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

PHILIPPE ROBBA

Cohomologies de Dwork, I

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 10, n° 1 (1982-1983), exp. n° 3, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1982-1983__10_1_A2_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
10e année, 1982/83, n° 3, 10 p.

8 et 29 novembre 1982

COHOMOLOGIES DE DWORK, I

par Philippe ROBBA (*)

La démonstration originelle de DWORK de la rationalité de la fonction zêta pour les variétés [D1] semblait de nature non cohomologique. En fait, une théorie cohomologique p-adique était sous-jacente à cette démonstration ainsi que le montrait l'article [D2], où DWORK déterminait le degré de la fonction zêta associée à une hypersurface sous des hypothèses de non-singularité.

Inspirés par les résultats de DWORK, MONSKY et WASHNITZER ont développé une théorie cohomologique p-adique formelle ([MW], [M1], [M2]) d'inspiration plus géométrique, le rapport entre la théorie de Dwork et celle de Monsky-Washnitzer étant souligné par KATZ dans sa thèse [K].

Notons par ailleurs que dès le début, SERRE avait observé que les méthodes de Dwork s'appliquaient à l'étude des fonctions L .

Bien entendu, pour la vérification des autres conjectures de Weil, une théorie cohomologique complète était indispensable. Un échec majeur des théories de Dwork et Monsky-Washnitzer était de ne pouvoir démontrer en général la finitude des cohomologies (MONSKY démontre la finitude dans le cas des courbes [M2]).

Parallèlement se sont développées avec le succès que l'on connait les théories de cohomologie ℓ-adique et cristalline.

Néanmoins, la théorie de Dwork a, sur ses concurrentes, l'avantage de la simplicité, de son caractère explicite, et du point de vue "surconvergent". (Dans [Be], BERTHELOT explique comment il compte introduire le point de vue "surconvergent" dans la théorie cristalline). Ceci explique que cette théorie a continuée à rendre de grands services comme par exemple dans l'estimation du degré des fonctions L ([Bo], [AS 1]), l'étude p-adique des fonctions hypergéométriques [D5] ou des fonctions de Bessel ([D4], [AS 2]) grâce à la théorie de la déformation, l'estimation de la valuation p-adique des racines des fonctions L ([S], [R5]), la formule de Gross-Koblitz [GK] pour les sommes de Gauss et sa généralisation [D6].

Dans cet exposé nous présentons le formalisme de la théorie de Dwork en tenant compte des améliorations apportées par MONSKY et WASHNITZER (utilisation des espaces poignards, relèvement arbitraire de Frobenius par $\tau(x)$ au lieu de x^p). Nous nous limitons au cas d'une variable, le cas de plusieurs variables sera considéré dans un exposé ultérieur.

Insistons sur le fait que dans cet exposé la seule originalité est la démonstration proposée de la finitude de la cohomologie de Dwork avec la méthode pour calculer

(*) Philippe ROBBA, 138 rue Nationale, 75013 PARIS.

la dimension de cette cohomologie.

1. Généralités.

Soit F une "fonction", et $\mathcal{H}$ une algèbre de fonctions analytiques. On pose $\Omega^0 = F\mathcal{H}$, $\Omega^1 = F\mathcal{H}\,dx$. La cohomologie de Dwork est la cohomologie associée au complexe de De Rham

$$0 \dashrightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \longrightarrow 0$$

où d désigne la différentiation.

On a les espaces de cohomologie

$$H^0 = \ker d \ , \quad H^1 = \Omega^1/d\,\Omega^0 \ .$$

Considérons les isomorphismes canoniques

$$\mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \Omega^0 \qquad \xi \longrightarrow F\,\xi$$

$$\mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \Omega^1 \qquad \xi \longrightarrow F\,\xi\,dx \ .$$

Alors à la différentiation d, correspond par les isomorphismes canoniques l'application

$$D : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \ , \quad D = \frac{d}{dx} + F'/F \ .$$

Par conséquent si $F'/F \in \mathcal{H}$, D définit bien une application de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ et la différentiation d est bien définie.

Pour définir une cohomologie de Dwork, on prendra donc pour F une "solution" (formelle) d'une équation différentielle $F'/F = \eta$ avec $\eta \in \mathcal{H}$. Il est clair que le complexe (et donc la cohomologie) ne dépendent pas de la solution choisie mais seulement de η.

Si u est un élément inversible de $\mathcal{H}$ (c'est-à-dire $u \in \mathcal{H}$ et $u^{-1} \in \mathcal{H}$) alors $Fu\mathcal{H} = F\mathcal{H}$, donc Fu et F définissent le même complexe (et la même cohomologie).

Définissons la relation d'équivalence dans $\mathcal{H}$:

$$\eta_1 \sim \eta_2 \ \text{ si, et seulement si, } \ \eta_1 - \eta_2 = u'/u \ \text{ avec } \ u \in \mathcal{H}, \ u^{-1} \in \mathcal{H} \ .$$

Alors si $\eta_1 \sim \eta_2$, η_1 et η_2 définissent la même cohomologie. On dira qu'on a la cohomologie triviale si $\eta \sim 0$, c'est-à-dire si $\eta = u'/u$ avec $u \in \mathcal{H}$, $u^{-1} \in \mathcal{H}$. Alors si K = corps des constantes de $\mathcal{H}$, $\ker d = K = H^0$.

Si la cohomologie n'est pas triviale, $\ker d = \{0\} = H^0$.

On dira que la cohomologie est finie si $\dim_K H' < +\infty$. Lorsque la cohomologie est finie, on considère la caractéristique d'Euler-Poincaré du complexe

$$\chi = \dim H^0 - \dim H^1 \ .$$

Ce nombre est aussi appelé l'indice de l'opérateur différentiel D

$$\chi = \chi(D) = \dim \ker D - \dim \operatorname{coker} D .$$

2. Cohomologie rationnelle.

Soit S un sous-ensemble fini de $\underset{\sim}{C}_p \cup \{\infty\}$, avec $\infty \in S$.

Prenons pour $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions rationnelles de $\underset{\sim}{C}_p(x)$ dont les pôles appartiennent à S , notons cet ensemble $L(S)$. Pour $\eta \in L(S)$ la cohomologie ainsi définie sera appelée cohomologie rationnelle. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME. - Soit $\eta \in L(S)$. La cohomologie rationnelle associée est finie, et l'on a

$$\chi = 2 - \sum_{c \in S} n_c$$

où pour $c \neq \infty$, $n_c = \sup(1 , - \operatorname{ord}_c \eta)$ et, pour $c = \infty$, $n_\infty = \sup(1 , 2 - \operatorname{ord}_\infty \eta)$ (le traitement particulier de l'infini provient de ce que l'on considère en fait $n_c = \sup(1 , - \operatorname{ord}_c(\eta\, dx))$).

Nous n'en dirons pas plus sur la cohomologie rationnelle, car, dans la théorie de Dwork, un rôle important est joué par l'opérateur de Frobenius et celui-ci ne peut être défini que dans la cohomologie analytique.

3. Cohomologie analytique.

3.1. L'espace poignard de Monsky-Washnitzer. - Soit $A = B(0 , 1^+) - \bigcup_{j=1}^{m} B(c_j , 1^-)$ où les $B(c_j , 1^-)$ sont des classes résiduelles distinctes.

Pour tout $\varepsilon < 1$, on pose $A_\varepsilon = B(0 , (1/\varepsilon)^+) - \bigcup_{j=1}^{m} B(c_j , \varepsilon^-)$.

Soit $H(A_\varepsilon)$ l'espace des éléments analytiques sur A_ε . L'espace poignard $\mathcal{H}^+(A)$ est l'espace $\mathcal{H}^+(A) = \bigcup_{\varepsilon<1} H(A_\varepsilon) = \varinjlim_{\varepsilon\to 1} H(A_\varepsilon)$.

Les éléments de $\mathcal{H}^+(A)$ sont les fonctions f qui admettent une décomposition (unique)

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu x^\nu + \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_{j,\nu}}{(x - c_j)^\nu}$$

avec λ_ν , $\lambda_{j,\nu} \in \underset{\sim}{C}_p$, et il existe $\varepsilon < 1$ tel que $\lim_{\nu\to\infty} |\lambda_\nu|/\varepsilon^\nu = 0$, $\lim_{\nu\to\infty} |\lambda_{\nu,j}|/\varepsilon^\nu = 0$, $0 \leqslant j \leqslant m$.

On notera que la définition de $\mathcal{H}^+(A)$ ne dépend que de A et non des centres c_j choisis des trous de A (la définition des A_ε dépend des centres choisis). Si $f \in \mathcal{H}^+(A)$, on dira que f est analytique sur A , surconvergente sur A .

Pour un tel f on posera

$$\operatorname{Res}_{c_j} f = \lambda_{j,-1} , \quad \operatorname{Res}_\infty f = - \sum_{j=1}^{m} \lambda_{j,-1} .$$

On notera que $\mathrm{Res}_{c_j} f$ ne dépend que de la classe résiduelle $B(c_j, 1^-)$ et non du centre choisi c_j.

La formule pour l'infini, vient de ce que l'on définit en fait $\mathrm{Res}(f\, dx)$.

La norme de Gauss de $f \in \mathcal{H}^+(A)$ est donnée par

$$\|f\|_{Gauss} = \max(\sup_\nu |\lambda_\nu| , \sup_{j,\nu} |\lambda_{j,\nu}|) .$$

Si $\varepsilon < 1$ est tel que $f \in H(A_\varepsilon)$, on a (pour la norme de la convergence uniforme)

$$\|f\|_{H(A_\varepsilon)} = \max(\sup_\nu |\lambda_\nu|/\varepsilon^\nu , \sup_{j,\nu} |\lambda_{j,\nu}|/\varepsilon^\nu)$$

et donc

$$\|f\|_{Gauss} = \lim_{\varepsilon \to 1} \|f\|_{H(A_\varepsilon)} .$$

Soit alors u une fonction analytique dans la boule $B(0, R^-)$. Si l'on a $\|f\|_{Gauss} < R$, alors pour ε assez proche de 1 on aura $\|f\|_{H(A_\varepsilon)} < R$ et donc $u \circ f$ appartiendra à $H(A_\varepsilon)$ donc à $\mathcal{H}^+(A)$.

3.2. Finitude de la cohomologie analytique. - Soit A comme précédement. On considère la cohomologie (analytique) associée à $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+(A)$ et F telle que $F'/F = \eta$ avec $\eta \in \mathcal{H}^+(A)$.

On dira que $\alpha \in \mathbb{C}_p$ n'est pas un nombre de Liouville si

$$\liminf_{n \to +\infty} |\alpha - n|^{1/n} = 1 \quad \text{et} \quad \liminf_{n \to +\infty} |\alpha + n|^{1/n} = 1 .$$

(Par exemple les nombres algébriques ne sont pas des nombres de Liouville).

THÉORÈME. - *Si, pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, $\mathrm{Res}_{c_j} \eta$ n'est pas Liouville et $\mathrm{Res}_\infty \eta$ non plus, la cohomologie analytique est finie.*

Dans le cas où η est une fraction rationnelle, on peut décomposer η en éléments simples et obtenir la solution formelle F qui aura la forme

$$F(x) = \prod_{i=1}^{s} (x - a_i)^{\alpha_i} \exp f(x)$$

où $\alpha_i \in \mathbb{C}_p$ et $a_i \notin A$, et f est une fraction sans pôle dans A.

Dans [R3], on a considéré le cas particulier où $\alpha_i \in \mathbb{Z}_p$ et $\|f\|_{Gauss} \leqslant p^{-1/(p-1)}$. On a, dans ce cas, démontré le théorème précédent et calculé la caractéristique d'Euler-Poincaré du complexe. C'est ce cas particulier qui est intéressant pour les applications. Nous avons voulu néanmoins envisager le cas général car nous pensons que cela aide à clarifier les notions mises en jeu.

La fin du paragraphe 3 est consacrée à la démonstration du théorème. Nous utiliserons librement les définitions et les résultats de [R1], [R2], [R3], et [R5].

3.3. Démonstration du théorème 3.2.

(a) Si la solution F de l'équation différentielle $F'/F = \eta$ dans un voisinage du point générique t du cercle unité a un rayon de convergence < 1, on peut appliquer le théorème 3.4 de [R2] pour montrer que si $\epsilon < 1$ est assez proche de 1 alors l'opérateur différentiel $D = (d/dx) + \eta$ a un indice dans $H(A_\epsilon)$ qui ne dépend pas de ϵ, et par conséquent D a un indice dans $\mathcal{H}^+(A)$.

(b) On va maintenant considérer le cas où cette solution F a un rayon de convergence $\geqslant 1$. (C'est le cas intéressant que nous considérerons lorsque nous définirons l'opérateur de Frobenius). On remarque qui si $\eta \sim \eta_1$, la condition précédente est également satisfaite pour η_1.

On va d'abord se ramener au cas où η est une fraction rationnelle ayant au plus un pôle dans chaque trou de A. Considérons le développement de η

$$\eta = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu x^\nu + \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{j,\nu}/(x - c_j)^\nu .$$

Il existe $\epsilon_0 < 1$ tel que

$$\lim_{\nu\to\infty} |\lambda_\nu|/\epsilon_0^\nu = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\nu\to\infty} |\lambda_{j,\nu}|/\epsilon_0^\nu = 0 , \quad 1 \leq j \leq m .$$

Donc, pour $\epsilon_0 < \epsilon < 1$,

$$\lim_{\nu\to\infty} |\lambda_\nu/(\nu + 1)|/\epsilon^{\nu+1} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\nu\to\infty} |\lambda_{j,\nu}/(\nu - 1)|/\epsilon^{\nu-1} = 0 , \quad 1 < j < m .$$

Il existe donc N tel que

$$\sup_{\nu>N} |\lambda_{\nu-1}/\nu| < |\pi| , \quad \sup_{\nu>N} |\lambda_{j,\nu+1}/\nu| < |\pi| , \quad 1 < j < m , \quad \text{où} \quad \pi = (-p)^{1/(p-1)}.$$

Alors $g(x) = \sum_{\nu>N} \lambda_{\nu-1} x^\nu/\nu - \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu>N} \lambda_{j,\nu+1}/\nu(x - c_j)^\nu$ appartient à $\mathcal{H}^+(A)$ et $|g|_{\text{Gauss}} < |\pi|$, et par conséquent $\exp g \in \mathcal{H}^+(A)$. On a alors

$$\eta \sim \eta_1 = \eta - g'/g = \sum_{\nu=0}^{N} \lambda_\nu x^\nu + \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{N} \lambda_{j,\nu}/(x - c_j)^\nu .$$

Pour simplifier les notations on écrira encore η au lieu de η_1.

D'après [R3], comme la solution de $F'/F = \eta$ près du point générique converge dans le disque générique, η est limite, au sens de la norme de Gauss, de dérivées logarithmiques de fractions rationnelles ; il en est donc de même pour η_T, où η_T désigne la partie singulière de η relative au trou T de A. Donc, d'après [R3], la solution de $u'/u = \eta_T$ près du point générique converge dans le disque générique. De plus, pour $1 \leq j \leq m$, $\lambda_{j,-1} = \operatorname{Res}_{c_j} \eta \in \mathbb{Z}_p$.

La fin de la démonstration suit le schéma de la démonstration du § 5.4.2 de [R5]. Nous nous contenterons d'indiquer les différences.

Pour simplifier les notations, on écrira $B^+ = B(0, 1^+)$, $B_j = B(c_j, 1^-)$, $1 \leq j \leq m$. On pose $A_s = B^+ - \bigcup_{j=1}^{s} B_j$. Ainsi $A_0 = B^+$ et $A_m = A$.

Posons $Q(x) = \prod_{j=1}^{\mu} (x - c_j)^N$. Ainsi $QD = Q\,(d/dx) + Q_\eta$ n'a pas de pôle dans B^+ . On va montrer par récurrence que QD a un indice dans $\mathcal{H}^+(A_s)$.

Nous aurons besoin du lemme suivant.

3.4. LEMME. - Soit $c \in B^+$. Soit $\zeta = \sum_{\nu=2}^{N} \lambda_\nu/(x - c)^\nu$ (resp. $\zeta = \sum_{\nu=0}^{N} \lambda_\nu x^\nu$). Supposons que l'équation $u'/u = \zeta$ ait une solution $u = \sum_{\nu\geq 0} a_\nu/(x - c)^\nu$ (resp. $u = \sum_{\nu\geq 0} a_\nu x^\nu$) convergeant pour $|x - c| > 1$ (resp. $|x| < 1$) mais non pas pour $|x - c| < 1$ (resp. $|x| > 1$) , alors, pour tout $r < 1$ (resp. $r > 1$) , la solution $v'/v = \zeta$ près du point générique du cercle $C(c\ ,\ r)$ (resp. $C(0\ ,\ r)$) ne converge pas dans le disque générique.

Démonstration. - Par un inversion $1/(x - c) \longmapsto x$, on se ramène au deuxième cas. Si alors v converge dans le disque générique du cercle $C(0\ ,\ r)$, comme ζ n'a pas de singularité dans $B(0\ ,\ r^-)$, on sait par le principe de transfert que la solution u près de 0 converge dans $B(0\ ,\ r^-)$ ce qui contredit l'hypothèse.

3.5. Fin de la démonstration du théorème 3.2. - On écrira

$$\eta = \sum_{j=1}^{\mu} \frac{\alpha_j}{(x - c_j)} + \zeta_\infty + \sum_{j=1}^{\mu} \zeta_j$$

avec

$$\alpha_j = \lambda_{j,1} \in \mathbb{Z}_p\ ,\quad \zeta_\infty = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu x^\nu\ ,\quad \zeta_j = \sum_{\nu=2}^{\infty} \lambda_{j,\nu}/(x - c_j)^\nu\ .$$

Si l'équation $u'/u = \zeta_\infty$ a une solution convergeant dans un disque $B(0\ ,\ r^-)$ avec $r > 1$, on a $\eta \sim \eta_1 = \eta - \zeta_\infty$. Par ailleurs, l'équation $v'/v = \sum_{j=1}^{\mu} \zeta_j$ n'a pas de singularité dans la classe résiduelle ∞ , et a une solution convergeant dans le disque générique, donc a une solution analytique v dans la classe résiduelle $\bar{\infty}$. Dans la classe résiduelle $\bar{\infty}$, l'équation $y'/y = \eta_1$ a donc seulement une singularité régulière à l'infini, la solution $x^\alpha \prod_{j=1}^{\mu} (1 - c_j/x)^{\alpha_j} v(x)$ avec $\alpha = \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_j$ non-Liouville, et $v(x) \prod_{j=1}^{\mu} (1 - c_j/x)^{\alpha_j}$ analytique dans la classe résiduelle $\bar{\infty}$, prenant la valeur 1 à l'infini. On peut donc appliquer le lemme d'Adolphson ([R5] Lemma 5.3), et utiliser la méthode du paragraphe 5.4.2 du [R5] pour démontrer que l'opérateur QD a un indice dans $\mathcal{H}^+(A_0)$.

Par contre, si la solution de $u'/u = \zeta_\infty$ près de 0 a un rayon de convergence 1 , on peut utiliser le lemme 3.4 et le théorème 4.1 de [R5] pour démontrer, comme dans le paragraphe 5.4.2 de [R5], que QD a un indice dans $\mathcal{H}^+(A_0)$.

Ensuite la récurrence sur s se fait comme dans le paragraphe 5.4.2 de [R5] en utilisant soit le lemme d'Adolphson, soit le lemme 3.4 et le théorème 4.1 de [R5].

3.6. Remarques.

3.6.1. - On peut en fait donner une formule permettant de calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré χ de notre complexe.

Considérons une solution u de $u'/u = \eta$ près du point générique du cercle $C(c_j , r)$ avec $r < 1$ (resp. du cercle $C(0 , R)$ avec $R > 1$). On pose $\rho_j(r) = \inf (r$, rayon de convergence de $u)$ (resp. $\rho_\infty(R) = \inf (R$, rayon de convergence de $u))$.

On a alors, pour $r < 1$, r suffisament proche de 1 , et $R = 1/r$.

$$\chi = \frac{d \log \rho_\infty(R)}{d \log R} - \sum_{j=1}^{m} \frac{d \log \rho_j(r)}{d \log r} .$$

3.6.2. - La méthode que l'on a utilisée pour ramener la démonstration du théorème 3.2 au cas où η est une fraction rationnelle peut être utilisée pour démontrer la conjecture 4.12 de [R5]. Notons que la propriété de surconvergence de η est absolument essentielle et que la propriété d'indice dans le cas général ne se déduit pas de la propriété d'indice dans le cas η fraction rationnelle par simple passage à la limite.

4. Opérateur de Frobenius.

4.1. Généralités. - Dans $\underset{\sim}{F}_p^{alg}$ l'application $x \mapsto x^p$ est un automorphisme (automorphisme de Frobenius). On considère un relèvement τ en caractéristique 0 de cette application, précisement soit $\tau \in \underset{\sim}{C}_p[x]$ de degré p tel que son image dans le corps résiduel $\underset{\sim}{F}_p^{alg}[x]$ soit le polynôme x^p .

L'opérateur de Frobenius est l'opérateur qui à la "fonction" f associe la "fonction" $f \circ \tau$. Cet opérateur agit aussi sur les différentielles ; à la différentielle $f\, dx$ il associe la différentielle $f \circ \tau \; d\tau = (f \circ \tau)\, \tau'\, dx$.

Nous désirons faire agir l'opérateur de Frobenius sur la cohomologie analytique. Soient A et $\mathcal{H}^+(A)$ comme au § 3. Comme A est une union de classes résiduelles, on peut identifier A à un sous-ensemble de $\underset{\sim}{F}_p^{alg}$. On notera A^σ l'image de A sous l'action de l'automorphisme de Frobenius, et $A^{\sigma^{-1}}$ l'image de A sous l'action de l'automorphisme inverse.

On voit facilement que si $\xi \in \mathcal{H}^+(A)$, alors $\xi \circ \tau \in \mathcal{H}^+(A^{\sigma^{-1}})$.

Soit F telle que $F'/F = \eta \in \mathcal{H}^+(A)$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F\, \mathcal{H}^+(A) & \longrightarrow & F\, \mathcal{H}^+(A)\, dx \\ \big\downarrow \scriptstyle{\text{Frob}} & & \big\downarrow \scriptstyle{\text{Frob}} \\ F \circ \tau\; \mathcal{H}^+(A^{\sigma^{-1}}) & \longrightarrow & F \circ \tau\; \mathcal{H}^+(A^{\sigma^{-1}})\, dx \end{array}$$

où $\mathrm{Frob}(F\xi) = F \circ \tau \times \xi \circ \tau$ et $\mathrm{Frob}(F\xi\, dx) = F \circ \tau \times \xi \circ \tau \times \tau'\, dx$ et l'on a bien

$$\frac{1}{F \circ \tau} \frac{d}{dx} (F \circ \tau) = (\eta \circ \tau)\tau' \in \mathcal{H}^+(A^{\sigma^{-1}}) .$$

4.2. Frobenius inverse. - On définit formellement les opérateurs Θ_τ et $\widetilde{\Theta}_\tau$ agissant sur un espace de fonction par les formules

$$\Theta_\tau f(x) = \Sigma_{\tau(y)=x} f(y) \quad \widetilde{\Theta}_\tau f(x) = \Sigma_{\tau(y)=x} f(y)/\tau'(y) .$$

On vérifie facilement que

$$\Theta_\tau(f \circ \tau) = pf \ , \quad \Theta_\tau((g \circ \tau) \times f) = g\, \Theta_\tau(f) \ , \quad \widetilde{\Theta}_\tau((g \circ \tau) \times f) = g\, \widetilde{\Theta}_\tau(f) .$$

On montre également que si f est une fonction rationnelle, $\Theta_\tau f$ et $\widetilde{\Theta}_\tau f$ sont des fonctions rationnelles et si $f \in \mathcal{H}^+(A)$, $\Theta_\tau f$ et $\widetilde{\Theta}_\tau f \in \mathcal{H}^+(A^\sigma)$.

Exercice : Montrer que $\widetilde{\Theta}_\tau \left(\frac{1}{x-c}\right) = \frac{1}{x - \tau(c)}$.

On désire définir un opérateur agissant sur le complexe de De Rham associé à $F\,\mathcal{H}^+(A)$ qui soit un inverse à gauche de l'opérateur de Frobenius. Il faut donc d'abord trouver F^* avec $F^{*\prime}/F^* = \eta^* \in \mathcal{H}^+(A^\sigma)$ tel que le Frobenius envoie le complexe associé à $F^*\,\mathcal{H}^+(A^\sigma)$ dans le complexe associé à $F\,\mathcal{H}^+(A)$, ceci signifie qu'il faut avoir $F^* \circ \tau\, \mathcal{H}^+(A) = F\,\mathcal{H}^+(A)$ ou encore $F^* \circ \tau/F \in \mathcal{H}^+(A)$ ou de façon plus précise $(\eta^* \circ \tau)\,\tau' \sim \eta$.

4.3. Successeur. - Soit $\eta \in \mathcal{H}^+(A)$. On dira que $\eta^* \in \mathcal{H}^+(A^\sigma)$ est un successeur de η si $(\eta^* \circ \tau)\,\tau' \sim \eta$. L'existence d'un successeur est fournie par le théorème suivant.

THÉORÈME. - Soit $\eta \in \mathcal{H}^+(A)$. Si la solution de $u'/u = \eta$ au voisinage du point générique converge dans le disque générique, η possède un successeur.

Le résultat n'est rien d'autre que ce que nous avions appelé dans l'exposé [R4] la structure de Frobenius faible pour l'opérateur différentiel $(d/dx) - \eta$. Dans [R4], on considérait le cas $\tau(x) = x^p$. Il est facile de voir que la démonstration se transpose au cas général considéré ici.

Remarque. - On vérifie facilement que le successeur η^* possède aussi la propriété que la solution de $u'/u = \eta^*$ près du point générique converge dans le disque générique. On peut donc alors, lorsque η vérifie l'hypothèse du théorème, définir une suite de successeurs en posant $\eta_0 = \eta$ et η_{i+1} = successeur de η_i.

Réciproquement, si η possède une suite infinie de successeurs et si l'on suppose de plus que $|\eta_i|_{\text{Gauss}} = 1$ pour tout i, on en déduit que la solution de $u'/u = \eta$ près du point générique converge dans le disque générique.

4.4. Frobenius inverse (suite). - On suppose que η vérifie l'hypothèse du théorème 4.3.

Soit η^* un successeur de η (on vérifie que η^* est unique à un isomorphisme près). Soit G une solution de l'équation différentielle

$$G'/G = \eta - (\eta^{*} \circ \tau)\, \tau' .$$

On a $G \in \mathcal{H}^{+}(A)$ et formellement $G = F/(F^{*} \circ \tau)$.

Pour $\xi \in \mathcal{H}^{+}(A)$, on définit

$$\mathrm{Frob}^{-1}(F\xi) = F^{*}\, \psi_{\tau}(G\xi) \in F^{*}\, \mathcal{H}^{+}(A^{\sigma})$$

$$\mathrm{Frob}^{-1}(F\xi\, dx) = F^{*}\, \widetilde{\psi}_{\tau}(G\xi)\, dx \in F^{*}\, \mathcal{H}^{+}(A^{\sigma})\, dx .$$

Pour $\xi \in \mathcal{H}^{+}(A^{\sigma})$, on définit

$$\mathrm{Frob}(F^{*}\, \xi) = FG^{-1}(\xi\tau) \in F\, \mathcal{H}^{+}(A)$$

$$\mathrm{Frob}(F^{*}\, \xi\, dx) = FG^{-1}(\xi \circ \tau)\, \tau'\, dx \in F\, \mathcal{H}^{+}(A)\, dx .$$

(Formellement,

$$\mathrm{Frob}^{-1}(F\xi) = F^{*}\, \psi_{\tau}\left(\frac{F}{F^{*} \circ \tau}\, \xi\right) = \psi_{\tau}(F\xi)$$

$$\mathrm{Frob}^{-1}(F\xi\, dx) = F^{*}\, \widetilde{\psi}_{\tau}\left(\frac{F}{F^{*} \circ \tau}\, \xi\right) = \widetilde{\psi}_{\tau}(F\xi)\, dx \quad .)$$

On a clairement

$$\mathrm{Frob}^{-1} \circ \mathrm{Frob} = p\, \mathrm{Id} .$$

Remarquons que G n'est défini qu'à une constante multiplicative près et donc que le Frobenius n'est défini qu'à une constante multiplicative près.

4.5. Opérateur de Frobenius sur les espaces de cohomologie. - Comme les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
F\mathcal{H}^{+}(A) & \xrightarrow{d} & F\,\mathcal{H}^{+}(A)\,dx \\
\mathrm{Frob}^{-1}\downarrow\ \uparrow\mathrm{Frob} & & \mathrm{Frob}^{-1}\downarrow\ \uparrow\mathrm{Frob} \\
F^{*}\,\mathcal{H}^{+}(A^{\sigma}) & \xrightarrow{d} & F^{*}\,\mathcal{H}^{+}(A^{\sigma})\,dx
\end{array}$$

sont commutatifs, on peut définir par réduction sur les espaces de cohomologie H^1_F et $H^1_{F^*}$ les opérateurs $\mathrm{Frob}^{-1} : H^1_F \longrightarrow H^1_{F^*}$ et $\mathrm{Frob} : H^1_{F^*} \longrightarrow H^1_F$ qui vérifient $\mathrm{Frob}^{-1} \circ \mathrm{Frob} = p\, \mathrm{Id}$. Ces espaces sont de dimensions finies. S'ils ont mêmes dimensions, à un facteur p près, ces deux opérateurs sont inverses l'un de l'autre.

Par ailleurs, on peut montrer que le successeur ne dépend pas du relèvement τ du Frobenius et que les définitions de Frob et Frob^{-1} sur les espaces de cohomologies ne dépendent pas non plus du relèvement τ .

BIBLIOGRAPHIE

[AS 1] ADOLPHSON (A.) and SPERBER (S.). - Exponential sums on the complement of a hypersurface, Amer. J. of Math., t. 102, 1980, p. 461-487.

[AS 2] ADOLPHSON (A.) and SPERBER (S.). - Twisted Kloosterman sums and p-adic Bessel functions, Amer. J. of Math. (à paraître).

[Be] BERTHELOT (P.). - Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p "Journées d'Analyse p-adique" [1982. Marseille-Luminy], Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 9e année, 1981/82, nº J2, 18 p.

[Bo] BOMBIERI (E.). - On exponential sums in finite fields II, Invent. Math., Berlin, t. 47, 1978, p. 29-39.

[D 1] DWORK (B.). - On the rationality of the zeta function of an algebraic variety, Amer. J. of Math., t. 82, 1960, p. 631-648.

[D 2] DWORK (B.). - On the zeta function of a hypersurface. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des hautes Etudes scientifiques, Publications mathématiques, 12, p. 5-68).

[D 3] DWORK (B.). - On Hecke polynomials, Invent. Math., Berlin, t. 12, 1971, p. 249-256.

[D 4] DWORK (B.). - Bessel functions as p-adic functions of the argument, Duke math. J., t. 41, 1974, p. 711-738.

[D 5] DWORK (B.). - Lectures on p-adic differential equations. - New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1983 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 25).

[D 6] DWORK (B.). - On the Boyarsky principle, Amer. J. of Math. (à paraître).

[GK] GROSS (B.) and KOBLITZ (N.). - Gauss sums and the p-adic Γ-function, Annals of Math., Series 2, t. 109, 1979, p. 569-581.

[K] KATZ (N.). - On the differential equations satisfied by period matrices. - Paris, Presses universitaires de France, 1968 (Institut des hautes Etudes scientifiques, Publications mathématiques, 35, p. 71-106).

[MW] MONSKY (P.) and WASHNITZER (G.). - Formal cohomology I, Annals of Math., Series 2, t. 88, 1968, p. 181-217.

[M 1] MONSKY (P.). - Formal cohomology II : The cohomology sequence of a pair, Annals of Math., Series 2, t. 88, 1968, p. 218-238.

[M 2] MONSKY (P.). - Formal cohomology III : Fixed point theorems, Annals of Math., Series 2, t. 93, 1971, p. 315-343.

[R 1] ROBBA (P.). - On the index of differential operators, I, Annals of Math., Series 2, t. 101, 1975, p. 280-316.

[R 2] ROBBA (P.). - On the index of differential operators II, Duke math. J., t. 43, 1976, p. 19-31.

[R 3] ROBBA (P.). - Caractérisation des dérivées logarithmiques, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 2e année, 1974/75, nº 12, 6 p.

[R 4] ROBBA (P.). - Structure de Frobenius faible pour les équations différentielles de premier ordre, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 2e année, 1974/75, nº 20, 11 p.

[R 5] ROBBA (P.). - Index of p-adic differential operators III. Application to twisted exponential sums (à paraître).

[S] SPERBER (S.). - Newton polygons for general hyperkloosterman sums. (à paraître).