PHILIPPE ROBBA

Calcul des résidus en analyse p-adique

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 9, nº 2 (1981-1982), exp. nº 28, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1981-1982__9_2_A9_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
9e année, 1981/82, n° 28, 8 p.

2 juin 1982

CALCUL DES RÉSIDUS EN ANALYSE p-ADIQUE

d'après GERRITZEN ET VAN DER PUT

par Philippe ROBBA (*)

Dans l'étude des fonctions analytiques p-adiques, plusieurs auteurs ont essayé de construire une intégrale de Cauchy afin de pouvoir transposer au cas p-adique les techniques du cas complexe.

L'intégrale la plus connue est l'intégrale de Shorey. Dans [2] et [3], j'avais utilisé une intégrale de Cauchy formelle sur un cercle.

Dans [1], GERRITZEN et VAN DER PUT donnent une vision définitive de l'intégrale de Cauchy : ils introduisent la notion d'orientation pour un cercle, et établissent la formule de changement de variable. Par ailleurs, si F est un quasi-connexe qui n'a qu'un nombre fini de trous isolés, sa frontière est une union finie de cercles orientés canoniquement, et la formule des résidus classiques est encore valable. Leur présentation utilise les formes différentielles et les algèbres de Tate.

Nous allons donner une présentation plus classique utilisant le langage de Krasner.

1. Intégration sur un cercle orienté.

1.1. Notations.

Soit K un corps valué ultramétrique, complet, algébriquement clos.
Soit $\underset{\sim}{P}(K) = K \cup \{\infty\}$ son projectivisé.
Soit $r \in |K^*|$ et soit $a \in K$.

On pose

$$D(a\,,\,r^+) := \{x \in K\,;\ |x - a| \leq r\}$$

$$D(a\,,\,r^-) := \{x \in K\,;\ |x - a| < r\}$$

$$C(a\,,\,r) := \{x \in K\,;\ |x - a| = r\}\,.$$

Par abus de langage, on dira que $C(a\,,\,r)$ est le "bord" de $D(a\,,\,r^-)$.

Observons que n'importe quel point de $D(a\,,\,r^-)$ peut servir de centre pour $D(a\,,\,r^-)$, mais que ceci ne change pas la définition de $C(a\,,\,r)$.

Si on note $B := D(a\,,\,r^-)$, on posera $\partial B := C(a\,,\,r)$.

(*) Texte reçu le 30 juin 1982. Exposé prononcé par Monique MATHIEU.
Philippe ROBBA, 138 rue Nationale, 75013 PARIS.

Dans toute la suite de l'exposé, les rayons des disques et des cercles considérés appartiennent toujours au groupe des valeurs $|K^*|$.

Soit A un sous-ensemble ouvert de $\underset{\sim}{P}(K)$, on notera $H(A)$ l'espace des éléments analytiques sur A , muni de la norme de la convergence uniforme sur A .

Pour $f \in H(A)$,

$$\|f\|_A = \sup_{x \in A} |f(x)|$$

1.2. Intégration sur un cercle orienté.

Soit $C = C(a , r)$.

Soit f un élément analytique sur C , $f \in H(C)$.

On a le développement de Laurent

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (x - a)^n \ .$$

Sur C, on peut mettre soit l'orientation positive et on écrira C^+ , soit l'orientation négative et on écrira C^- .

Définition. - On pose

$$\int_{C^+} f(x) \ dx = a_{-1} \ , \quad \int_{C^-} f(x) \ dx = - \int_{C^+} f(x) \ dx \ .$$

On vérifie que cette définition ne dépend pas du centre a , choisi pour C .

Précisément, si l'on a $|a - b| < r$, et si l'on considère le développement

$$g(x) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} b_n (x - b)^n \ ,$$

on vérifie que $a_{-1} = b_{-1}$.

1.3. Propriétés.

1.3.1. L'application de $H(C)$ dans K , $f \longmapsto \int_{C^+} f(x) \ dx$ est linéaire.

1.3.2. Si $f \in H(C)$, $\int_{C^+} f'(x) \ dx = 0$.

1.3.3. Si $f \in H(C)$ et si r est le diamètre du cercle C ,

$$\left|\int_{C^+} f(x) \ dx\right| \leqslant \|f\|_C \ r \ .$$

C'est évident.

1.3.3 n'est qu'une reformulation des inégalités de Cauchy. On peut l'interpréter en disant que la longueur de C est r .

1.4. Orientation du bord d'un disque. - Le cercle $C = C(a , r)$ peut être considéré soit comme le bord du disque $B = D(a , r^-)$ auquel cas on lui donne l'orientation positive $\partial B = C^+$, soit comme le bord du disque non borné

$B := \{x \in \underset{\sim}{P}(K)\ ;\ |x - a| > r\}$ auquel cas on lui donne l'orientation négative $\partial B = C^-$.

1.5. Exemple.

Soit $B = D(a\ ,\ r^-)$ (resp. $B = \underset{\sim}{P}(K) - D(a\ ,\ r^+)$).

Soit ∂B son bord orienté canoniquement.

Soit f une fraction rationnelle sans pôle sur ∂B .

On a

$$\int_{\partial B} f(x)\ dx = \sum_{a \in B} \text{rés}\,(f\ ,\ a)\ .$$

C'est évident. (Ne pas oublier de compter le résidu à l'infini si B est le disque non borné.)

1.6. La fonction ordre. - Soit $C = C(a\ ,\ r)$ un cercle, et soit $f \in H(C)$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (x - a)^n\ .$$

Si f ne s'annule pas sur C , on sait qu'il existe un unique indice N tel que

$$|a_N|\ r^N = \|f\|_C = \sup_n |a_n|\ r^n\ .$$

On pose

$$\text{ord}_{C^+} f = N\ ,\quad \text{ord}_{C^-} f = -N\ .$$

Considérons alors le cas où f est une fraction rationnelle sans pôle ni zéro sur C .

Soit P (resp. Z) le nombre de pôles (resp. de zéros) de f dans $D(a\ ,\ r^-)$.

Il est bien connu que

$$\text{ord}_{C^+} f = Z - P = \int_{C^+} \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx\ .$$

Comme les fractions rationnelles sont denses dans $H(C)$, que la fonction ordre et l'intégrale sont continues sur $H(C)$, on voit que, si $f \in H(C)$ et ne s'annule pas sur C , on a encore, par continuité

$$\int_{C^+} \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \text{ord}_{C^+} f$$

$$\int_{C^-} \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \text{ord}_{C^-} f$$

2. Formule de changement de variable.

2.1. Cas du cercle-unité transformé en lui-même.

2.1.1. Soit C le cercle-unité muni d'une orientation. Soit φ une bijection bi-analytique de C sur lui-même, c'est-à-dire que φ et φ^{-1} sont des éléments analytiques sur C .

Soit $\varphi(x) = \sum_{n \in \underset{\sim}{Z}} a_n x^n$. On a alors :

ou bien

(i) $|a_1| = 1$ et, pour tout $n \neq 1$, $|a_n| < 1$,

ou bien

(ii) $|a_{-1}| = 1$ et, pour tout $n \neq -1$, $|a_n| < 1$.

(Réciproquement, si $\varphi(x) = \sum a_n x^n$ avec $\lim_{|n| \to \infty} |a_n| = 0$, et si (i) ou (ii) est vérifié, alors φ est une bijection bi-analytique de C sur lui-même.)

Dans le cas (i), on conviendra que $\varphi(C)$ a la même orientation que C et dans le cas (ii) que $\varphi(C)$ a l'orientation opposée.

2.1.2. Formule de changement de variable (c. v.). - Soit φ comme dans 2.1.1. Soit $f \in H(\varphi(C))$. On a

$$\text{(c. v.)} \quad \int_{\varphi(C)} f(y)\, dy = \int_C f \circ \varphi(x)\, \varphi'(x)\, dx \,.$$

Démonstration. - Comme la famille y^m , $m \in \underset{\sim}{Z}$ est totale dans $H(\varphi(C))$, il suffit de vérifier la relation précédente pour les fonctions $f(y) = y^m$.

On peut de plus supposer que C a l'orientation positive.

Cas $m = -1$: On a

$$\int_{\varphi(C)} \frac{dy}{y} = \begin{cases} 1 & \text{dans le cas (i) de 2.1.1.} \\ -1 & \text{dans le cas (ii) de 2.1.1.} \end{cases}$$

Dans tous les cas

$$\int_{\varphi(C)} \frac{dy}{y} = \operatorname{ord}_C \varphi = \int_C \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\, dx$$

Cas $m \neq -1$. Si $\operatorname{carac}(K) = 0$

$$\frac{1}{m+1} [\varphi^{m+1}(x)]' = \varphi^m(x)\, \varphi'(x)$$

et donc, d'après 1.3.2,

$$\int_C \varphi(x)^m \varphi'(x)\, dx = \int_C \frac{1}{m+1} \frac{d}{dx} (\varphi^{m+1}(x))\, dx = 0 = \int_{\varphi(C)} y^m\, dy \,.$$

Si $\operatorname{carac}(K) \neq 0$, le calcul précédent n'a pas toujours un sens.

Observons qu'il suffit de démontrer la formule lorsque φ a un développement fini, le cas général s'en déduisant par continuité.

Supposons que φ conserve l'orientation de C (cas (i) de 2.1.1), et écrivons

$$\varphi(x) = \lambda x\Big(1 + \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^{N} a_n x^n\Big) \quad (\text{avec } |\lambda| = 1 \,,\ |a_n| < 1 \,,\ n \neq 0) \,.$$

Considérons les a_n comme des indéterminées, et écrivons le développement de

$$\varphi^m(x)\ \varphi'(x) = \lambda^{m+1}\ x^m(1 + \sum_{n\neq 0} a_n\ x^n)^m\ (1 + \sum_{n\neq 0} (n+1)\ a_n\ x^n) = \lambda^{m+1} \sum_i P_i\ x^i\ .$$

Les P_i sont des polynômes en les a_n à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$. Le calcul précédent montre qu'en caractéristique 0, le polynôme P_{-1} s'annule pour toutes les valeurs possibles des a_n, donc c'est le polynôme nul.

En caractéristique non nulle, on a donc encore, pour $m \neq -1$,

$$\int_C \varphi^m(x)\ \varphi'(x)\ dx = 0 = \int_{\varphi(C)} y^m\ dy\ .$$

2.2. Cas des translations-homothéties. – Considérons le cas où φ est soit une translation $(\varphi(x) = x + a)$, soit une homothétie $(\varphi(x) = \lambda x\ ,\ \lambda \neq 0)$.

Si C est un cercle orienté, $\varphi(C)$ est aussi un cercle, et nous conviendrons que $\varphi(C)$ a la même orientation que C.

Avec cette convention, la formule (c. v.) est encore vraie.

Si φ est une translation, c'est trivial.
Si φ est une homothétie, c'est presque aussi évident.

En effet, soit

soit $\varphi(x) = \lambda x\ ,\ \ \lambda \neq 0$

soit $C = C(a\ ,\ r)$, par exemple orienté positivement.

Alors $\varphi(C) = C(\lambda a\ ,\ |\lambda|\ r)$ orienté positivement.

Si $f(y) = \sum_n a_n(y - \lambda a)^n$, on a

$$f(\lambda x) = \sum_n a_n\ \lambda^n(x - a)^n$$

et donc

$$\int_{\varphi(C)} f(y)\ dy = a_{-1} = \int_C f(\lambda x)\ \lambda dx\ .$$

2.3. Cas général. – Soit φ une bijection bi-analytique du cercle C sur le cercle $\varphi(C)$.

Si C est muni d'une orientation, nous devons indiquer quelle sera l'orientation correspondante de $\varphi(C)$.

On peut trouver α et β, produits de composition d'une translation par une homothétie, telles que $\alpha(C)$ et $\beta(\varphi(C))$ soient le cerlce-unité $C(0\ ,\ 1)$.

Alors $\psi = \beta \circ \varphi \circ \alpha^{-1}$ est une bijection bi-analytique du cercle-unité sur lui-même, et l'on a $\varphi = \beta^{-1} \circ \psi \circ \alpha$.

On a indiqué comment α, ψ et β^{-1} transformaient les orientations, on sait donc quelle doit être l'orientation de $\varphi(C)$; c'est la même que l'orientation de C si ψ vérifie la condition (i) de 2.1.1, sinon c'est l'orientation opposée.

On voit alors, en appliquant trois fois la formule de changement de variable à

α , ψ et β^{-1} , que (c. v.) est encore valable pour φ .

Expliquons en quoi ce choix d'orientation pour $\varphi(C)$ est naturel.

Supposons que φ soit une bijection bi-analytique d'une couronne Δ sur la couronne $\varphi(\Delta)$, et que C soit l'un des cercles-bord de Δ . Alors $\varphi(C)$ est l'un des cercles-bord de $\varphi(\Delta)$.

En tant que bords de Δ et $\varphi(\Delta)$, C et $\varphi(C)$ ont des orientations canoniques. On vérifie facilement que si C est muni de cette orientation canonique, alors l'orientation sur $\varphi(C)$ définie par φ est précisément l'orientation canonique de $\varphi(C)$ en tant que bord de $\varphi(\Delta)$.

3. Formule des résidus.

3.1. - Soit F un quasi-connexe $\subset \underset{\sim}{P}(K)$, n'ayant qu'un nombre fini de trous isolés B_i , $1 \leqslant i \leqslant n$.

On a $B_i = D(a_i , r_i^-)$ sauf éventuellement pour le trou de centre infini pour lequel $B = \underset{\sim}{P}(K) - D(a , r^+)$.

On associe aux B_i leurs "fermetures" B_i^+ .

Dire que les trous B_i sont isolés, c'est dire que les B_i^+ sont disjoints.

Soient C_i les cercles-bords des trous B_i . Nous dirons que $\Gamma = \bigcup_i C_i$ est le bord de F . En tant que bord de F , Γ (c'est-à-dire chacun des C_i) a une orientation canonique : C_i a l'orientation $+$ si F est à l'intérieur de C_i et l'orientation $-$ sinon ; autrement dit, si C_i correspond a un trou borné, C_i a l'orientation $-$, et si C_i correspond au trou de centre ∞ , C_i a l'orientation $+$.

On appellera fonction méromorphe sur F , le quotient de deux éléments analytiques sur F . Une telle fonction n'a qu'un nombre fini de zéros et de pôles sur F .

3.2. Formule de Cauchy.

THÉORÈME. - Soit $f \in H(F)$, on a

$$\int_\Gamma f(x)\, dx = 0 .$$

Démonstration. - Il suffit de démontrer cette formule dans le cas où f est une fraction rationnelle. Le résultat général s'en déduit alors par continuité.

Soit donc f une fraction rationnelle.

Si C_i est le bord d'un trou borné D_i , C_i a l'orientation négative et

$$\int_{C_i} f(x)\, dx = - \sum_{a \in D_i} \text{rés}(f , a) .$$

Par contre, si C_i est le bord du trou D_i de centre ∞ , C_i a l'orientation positive et

$$\int_{C_i} f(x)\ dx = \sum_{a\in \underset{\sim}{P}(K)-D_i} \text{rés}(f\ ,\ a) = - \sum_{a\in D_i} \text{rés}(f\ ,\ a)\ .$$

(Ne pas oublier le résidu à l' ∞).

Comme tous les pôles de f sont dans la réunion des D_i , on a

$$\int_{\Gamma} f(x)\ dx = - \sum_{a\in \cup_i D_i} \text{rés}(f\ ,\ a) = - \sum_{a\in \underset{\sim}{P}(K)} \text{rés}(f\ ,\ a) = 0\ .$$

3.3. Formule des résidus.

THÉORÈME. - Soit f une fonction méromorphe sur F sans pôle sur Γ . On a

$$\int_{\Gamma} f(x)\ dx = \sum_{a\in\Gamma} \text{rés}(f\ ,\ a)\ .$$

Démonstration. - On procède comme dans le cas complexe en enlevant des petits disques autour des pôles de f .

3.4. Nombre de pôles et de zéros.

COROLLAIRE. - Soit f une fonction méromorphe sur F sans pôle ni zéro sur Γ . Notons Z (resp. P) le nombre de zéros (resp. de pôles) de f dans F . On a

$$Z - P = \int_{\Gamma} \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx\ .$$

Ce qui en vertu de 1.6, peut aussi s'écrire

$$Z - P = \sum_i \text{ord}_{C_i} f\ .$$

3.5. Exemple. - (Fonction automorphe associée à un groupe de Schottky).

Soit F comme précédemment avec $2g$ trous.

Soient γ_i , $1 \leqslant i \leqslant g$, des transformations homographiques telles que

$$\begin{cases} \gamma_i(B_i) = \underset{\sim}{P}(K) - B^+_{i+g} \\ \gamma_i(B^+_i) = \underset{\sim}{P}(K) - B_{i+g}\ , \quad 1 \leqslant i \leqslant g\ . \end{cases}$$

On a donc $\gamma_i(C_i) = C_{i+g}$, $1 \leqslant i \leqslant g$ (en tant qu'ensemble).

Mais observons que l'orientation sur $\gamma_i(C_i)$, définie par γ_i , est l'opposée de l'orientation de C_{i+g} .

On doit donc écrire $\gamma_i(C_i) = C^-_{i+g}$ (où le $^-$ ne signifie pas que l'on a l'orientation canonique sur C_{i+g} en tant que bord de F).

Soit alors f méromorphe sur F , sans pôle ni zéro sur Γ , telle que : pour $1 \leqslant i \leqslant g$, il existe $\omega_i \in K^*$ tel que

$$f(\gamma_i(x)) = \omega_i\ f(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in C_i\ .$$

Alors

$$\int_{C_{i+g}} \frac{f'(y)}{f(y)}\, dy = \int_{\gamma_i(C_i)} \frac{f'(y)}{f(y)}\, dy = -\int_{C_i} \frac{f'(\gamma_i(x))}{f(\gamma_i(x))}\, \gamma_i'(x)\, dx$$

$$= -\int_{C_i} \frac{\omega_i\, f'(x)}{\omega_i\, f(x)}\, dx = -\int_{C_i} \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx ,$$

et donc

$$Z - P = \int_{\Gamma} \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = 0 .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] GERRITZEN (L.) and VAN DER PUT (M.). - Schottky groups and Mumford curves. - Berlin, Springer-Verlag, 1980 (Lecture Notes in Mathematics, 817).

[2] ROBBA (P.). - Prolongement analytique pour les fonctions de plusieurs variables sur un corps valué complet, Bull. Soc. math. France, t. 101, 1973, p. 193-217.

[3] ROBBA (P.). - Lemmes de Schwarz et lemmes d'approximations p-adiques en plusieurs variables, Invent. Math., t. 48, 1978, p. 245-277.