GROUPE DE TRAVAIL
D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

KHYRA GÉRARDIN

Quotient de Hadamard de séries rationnelles

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 9, nº 2 (1981-1982), exp. nº 20, p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1981-1982__9_2_A3_0>

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1981-1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
9e année, 1981/82, n° 20, 23 p.

22 mars 1982

QUOTIENT DE HADAMARD DE SÉRIES RATIONNELLES

par Khyra GÉRARDIN (*)
[Université Paris-8]

Le but de cet article est d'étudier le quotient de Hadamard de 2 séries rationnelles, et de voir dans quelles conditions ce quotient est une série rationnelle.

Il est connu lorsque a et b sont deux séries rationnelles à une variable à coefficients entiers algébriques que le quotient de Hadamard de a par b est une série rationnelle sur l'anneau des entiers algébriques lorsque la série b possède un pole de module strictement plus grand que le module des autres poles.

La même propriété reste vraie lorsque la série b possède un pole de module strictement plus petit que le module des autres poles [1].

Nous nous contenterons d'examiner le premier cas dans l'étude des séries rationnelles à plusieurs variables non commutatives. L'étude du second cas parait exclue dans le cas des séries rationnelles à plusieurs variables non commutatives car la démonstration de ce cas utilise la répartition des zéros d'une série rationnelle. En effet, le théorème de Malher [4] démontre que les zéros d'une série rationnelle à une variable forment un ensemble rationnel dans $\underset{\sim}{N}$; or ce théorème non seulement n'est plus valable en variables non commutatives, mais est indécidable.

Rappel de quelques propriétés et notations.

Soit X un ensemble fini, et X^*, le monoïde libre qu'il engendre. Les éléments de X sont appelés des mots. A tout mot f de X^*, on associe sa longueur $|f|$ qui est en fait l'image du mot f par l'homomorphisme qui envoie X^* dans $\underset{\sim}{N}$.

Si A est l'anneau des entiers algébriques, $A\langle\langle X\rangle\rangle$ désigne l'algèbre large sur X^* à coefficients dans A, et $A^{rat}\langle\langle X\rangle\rangle$ la sous-algèbre de $A\langle\langle X\rangle\rangle$ des séries rationnelles.

Rappelons la caractérisation des séries rationnelles et quelques résultats obtenus.

THÉORÈME. - Une série a est rationnelle si, et seulement si, il existe une représentation μ de X^* dans $M_N(A)$, une matrice R de $M_N(A)$ telle que, pour tout mot f, on ait :

$$(a, f) = \operatorname{Tr} R\, \mu f \text{ , si } a \text{ s'écrit } a = \sum_{f\in X^*} (a, f) .$$

(*) Texte reçu le 24 mai 1982.
Mme Khyra GÉRARDIN, 12 rue Beccaria, 75012 PARIS.

Soient a et b deux séries rationnelles à coefficients entiers algébriques

$$a = \sum_f (a\,,\,f)\,f\,,\quad b = \sum_f (b\,,\,f)\,f\,.$$

Soient μ une représentation de X^* dans $M_N(\Lambda)$, et R une matrice de $M_N(\Lambda)$ telle que l'on ait :

$$(b\,,\,f) = \mathrm{Tr}\,R\,\mu f \quad \text{pour tout mot} \quad f \in X^*\,.$$

Si μ est une représentation commutative, ou si l'algèbre, engendrée sur $\underset{\sim}{C}$ par la représentation μ et la matrice R, est une algèbre triangulisable et si toute matrice μf admet une valeur propre de module strictement supérieur au module des autres valeurs propres, alors la série de terme général $(c\,,\,f) = (a\,,\,f)/(b\,,\,f)$ est rationnelle dès que $(c\,,\,f)$ est un entier algébrique pour tout mot f [2].

Toutefois la démonstration de ce résultat, fait en [2] pour la partie concernant l'algèbre triangulisable, n'est pas assez rigoureuse. La démonstration effective de ce résultat sera faite dans cet article.

De même, si la représentation μ, associée à la série b, est une représentation du monoïde libre X^* dans $M_2(\underset{\sim}{N}^*)$ alors la série de terme général $(c\,,\,f) = (a\,,\,f)/(b\,,\,f)$ est rationnelle dès que $(c\,,\,f)$ est un entier algébrique pour tout mot f [3].

Nous avons les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> $u = \sum_f (u\,,\,f)\,f$ <u>une série rationnelle à coefficients entiers algébriques, et soit</u> b <u>une série rationnelle à coefficients entiers algébriques. Si la série</u> b <u>s'écrit</u> $b = \sum_f (\mathrm{Tr}\,R\,\mu f)\,f$, <u>où</u> μ <u>est une représentation inversible de</u> X^* <u>dans</u> $M_3(\underset{\sim}{N}^*)$, <u>si pour tout mot</u> f, $(c\,,\,f) = (u\,,\,f)/\mathrm{Tr}\,R\,\mu f$ <u>est un entier algébrique, alors la série</u> $c = \sum_f (c\,,\,f)\,f$ <u>est une série rationnelle.</u>

Le théorème 2 est une généralisation du théorème 1.

THÉORÈME 2. - <u>Si</u> b <u>est une série rationnelle à coefficients entiers algébriques s'écrivant</u> $b = \sum_f (\mathrm{Tr}\,R\,\mu f)\,f$, <u>où</u> μ <u>est une représentation inversible de</u> X^* <u>dans</u> $M_N(\underset{\sim}{N}^*)$, <u>si pour tout mot</u> f, $(c\,,\,f) = (u\,,\,f)/\mathrm{Tr}\,R\,\mu f$ <u>est un entier algébrique, alors la série</u> $c = \sum_f (c\,,\,f)\,f$ <u>est une série rationnelle.</u>

La démonstration de ces 2 théorèmes se fera en 4 parties.

Dans les trois premières parties, sera démontré le théorème 1, en étudiant explicitement l'algèbre engendrée par la représentation μ. Dans la quatrième partie, on démontrera le théorème 2.

Première partie

Soit μ une représentation du monoïde libre X^* dans $GL_n(\underset{\sim}{C})$. Pour tout mot f, soit $S_i^{(f)}$ (resp. $S_i'^{(f)}$) la fonction symétrique d'ordre i des valeurs propres de la matrice μf (resp. μf^{-1}). On notera S_i (resp. S_i') la série de terme général $S_i^{(f)}$ (resp. $S_i'^{(f)}$).

PROPOSITION 1. - <u>Pour tout</u> i, $0 \leqslant i \leqslant n$, <u>la série</u> S_i <u>est rationnelle.</u>

<u>Démonstration</u>. - La démonstration consiste à calculer S_i en fonction de S_j, S_j', S_{n-j}, S_{n-j}', où $0 \leqslant j \leqslant n-1$.

Soit $i = n$, la proposition 1 est triviale. Calculons S_{n-1}.

Soit μf l'image du mot f par la représentation μ, et soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les valeurs propres de la matrice μf, $\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1}$ étant celles de la matrice μf^{-1}.

Soit $S_n^{(f)}$ le déterminant de la matrice μf. Il est facile de voir que la série $\sum_f [\mathrm{Tr}(\mu f)^{-1}]\, f$ est rationnelle. En effet, pour tout mot f, nous avons

$$\mathrm{Tr}\ \mu f^{-1} = \mathrm{Tr}\ t_{\mu f^{-1}} ,$$

où $t_{\mu f^{-1}}$ est la transposée de la matrice μf^{-1}.

L'application, qui au mot f, fait correspondre $t_{\mu f^{-1}}$, étant le produit de deux anti-homomorphismes, est un homomorphisme, donc

$$S_{n-1} = S_n \times \sum_f (\mathrm{Tr}\ \mu f^{-1})\ f ,$$

qui est le produit de Hadamard de séries rationnelles, est une série rationnelle.

Par symétrie, S_{n-1}' est aussi une série rationnelle.

Plus généralement, ayant démontré la rationalité des séries S_{n-i}, S_{n-i}', S_i, S_i', démontrons la rationalité de la série S_{n-i-1}.

Faisons tous les produits de Hadamard des séries rationnelles suivantes :

$$(1)_j \qquad S_{n-j} \odot \sum_{f \in X^*} [\mathrm{Tr}\ \mu f^{-1}]^{i-j+1}\ f , \text{ où } 0 \leqslant j \leqslant i .$$

Les coefficients obtenus sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers positifs des coefficients du binôme. Il est immédiat que les relations $(1)_j$, où $0 \leqslant j \leqslant i$, sont linéairement indépendantes, car le déterminant des coefficients, a pour coefficients les coefficients du binôme, et un polynôme non nul à coefficients entiers n'a qu'un nombre fini de zéros.

On peut donc calculer S_{n-i-1} à partir de S_{n-j}, où $0 \leqslant j \leqslant i$.

COROLLAIRE. - Pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$, la série $a^{(m)} = \sum_f [\mathrm{Tr}(\mu f)^m] f$ est rationnelle.

Démonstration. - Toute matrice μf vérifiant son polynôme caractéristique, il suffit de démontrer la rationalité des séries $a^{(m)}$ pour $m \leq n - 1$, lorsque $m \geq 0$.

Si $m \leq 0$, on fera les calculs sur la matrice μf^{-1}.

Si $m = 2$, nous avons

$$\mathrm{Tr}(\mu f)^2 = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i^2 = (\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i)^2 - 2 \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j .$$

Ceci montre que la série $a^{(2)}$ est rationnelle.

Si $m = 3$, nous pouvons écrire :

$$(2) \quad \mathrm{Tr}(\mu f)^3 = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i^3 = (\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i)^3 - 3 \sum_{i \neq j} \alpha_i^2 \alpha_j - 6 \sum_{i,j,k \text{ distincts}} \alpha_i \alpha_j \alpha_k$$

or

$$(2') \quad \sum_{i \neq j} \alpha_i^2 \alpha_j = (\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i^2) \sum_{1 \leq j \leq n} \alpha_j - \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i^3 .$$

En comparant (2) et (2'), nous voyons que la série $a^{(3)}$ est rationnelle. De la même façon en faisant des combinaisons linéaires de produits de Hadamard de $S^{(i)}$ et des $a^{(j)}$, où $i < j$, nous démontrons que la série $a^{(j)}$ est rationnelle.

Plus généralement, pour toute matrice R de $M_N(\mathbb{C})$ et pour tout entier m, la série $\sum_{f \in X^*} (\mathrm{Tr}\, R\, \mu f^m)\, f$ est rationnelle.

Deuxième partie

1. Etude du cas où la représentation μ est de degré 3.

Supposons que la représentation μ est une représentation de X^* dans $M_3(\mathbb{N})$ et que, pour tout mot f de XX^*, la matrice μf soit irréductible, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de matrice de transposition P telle que la matrice μf puisse se mettre sous la forme :

$$P \mu f P^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} .$$

A et D étant les matrices carrées.

Il est facile de voir dans ce cas que la matrice μf admet une valeur propre α_f positive réelle de module strictement supérieur aux modules des autres valeurs propres β_f et β'_f .

Supposons que toute matrice μf est inversible dans $M_3(\underset{\sim}{Q})$. Nous ferons complètement la démonstration du théorème dans le cas où toute matrice μf admet une valeur propre double. Ce cas est aussi le cas où det $\mu f > 0$ pour tout mot f . Les deux autres cas qui sont le cas où une matrice μf admet une valeur propre complexe et le cas où il existe une matrice admettant 2 valeurs propres opposées s'en déduisent. Ce dernier cas étant le cas où il existe des mots f tel que det $\mu f < 0$.

Ce qui diffère en effet ces 2 derniers cas du premier c'est uniquement la démonstration des lemmes 1 et 2.

Le cas général sera traité à part (3e partie) car c'est lui qui permet d'aborder la démonstration du cas où la représentation μ est de degré quelconque.

LEMME 1. - Si toute matrice μf admet 2 valeurs propres de même module, alors la série $\sum_f (\alpha_f)\, f$ est rationnelle.

LEMME 2. - Si R est une matrice de $M_3(A)$, alors Tr R μf s'écrit :

$$\mathrm{Tr}\ R\ \mu f = a_f \alpha_f + b_f \beta_f + b'_f \times \beta'_f + u_f ,$$

où β_f et β'_f sont les 2 valeurs propres de même module . Alors la série $\sum_f (a_f\ \alpha_f)\, f$ est rationnelle sur l'anneau A

(A étant rappelons-le l'anneau des entiers algébriques).

Démonstration du lemme 1 dans le cas où toute matrice μf admet 2 valeurs propres confondues. - Eliminons le cas où l'algèbre, engendrée par les matrices μf , est triangulisable sur $\underset{\sim}{C}$, car il est facile de voir, dans ce cas, que

$$\alpha_f = (\mu f)_{11} \text{ pour tout mot } f \text{ de } X^*$$

et, par la même remarque, que le lemme 2 est trivial dans ce cas.

La démonstration consiste, par des combinaisons linéaires de produits de Hadamard de séries rationnelles, à isoler le terme α_f .

Dans la démonstration, nous n'indiquerons pas l'indice f . Posons $\alpha_f = \alpha$, les autres valeurs propres étant toutes deux égales à β .

En faisant le produit de Hadamard des 2 séries rationnelles :

$$\sum_f (\mathrm{Tr}\ \mu f)\ f \times \sum_f (\mathrm{Tr}\ \mu f^{-1})\ f$$

nous voyons que la série de terme général

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \tag{1}$$

est rationnelle.

De la même manière, la série de terme général

$$\mathrm{Tr}\ \mu f^2 \times \mathrm{Tr}\ \mu f^{-1}$$

démontre que la série, dont le terme général s'écrit

(2) $$\beta + \frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\beta} ,$$

est rationnelle.

Le produit de Hadamard des séries de termes généraux, respectivement égaux à

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}\ \mu f ,$$

démontre, en tenant compte de la relation (2), que la série de terme général

(3) $$2\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha}$$

est rationnelle.

En combinant cette dernière relation avec la série de terme général $\mathrm{Tr}\ \mu f^{-1}$, nous voyons que la série de terme général

(4) $$\frac{\beta^2}{\alpha^2} + 2\,\frac{\alpha}{\beta}$$

est rationnelle.

De la même façon, nous avons :

$$\mathrm{Tr}\ \mu f^2\ \mathrm{Tr}\ \mu f^{-1} = 9\alpha + 12\beta + 4\,\frac{\beta^2}{\alpha} + 2\,\frac{\alpha^2}{\beta}$$

est rationnelle.

En tenant compte de la relation (3), nous démontrons la rationalité de la série de terme général

(5) $$5\ \beta + \frac{\alpha^2}{\beta} .$$

Les relations (2) et (5) montrent que la série de terme général

(6) $$5\,\frac{\beta^2}{\alpha} + 4\,\frac{\alpha^2}{\beta}$$

est une série rationnelle.

En intervertissant les matrices μf et pf^{-1}, et en faisant les mêmes opérations, nous obtenons les relations (1') - (6').

En combinant toutes les relations (1) - (6) et (1') - (6') nous démontrons le lemme 1.

Le lemme 1 est valable pour toute représentation μ de X^* dans $M_n(\underset{\sim}{N})$ de degré au moins égal à 4 telle que toute matrice μf vérifie la condition suivante :

μf <u>est irréductible et</u> μf a$(n - 1)$ **<u>valeurs propres confondues.</u>**

LEMME 1'. - <u>Si toute matrice</u> μf <u>a une une valeur propre</u> α_f <u>réelle positive, de module supérieur strictement aux modules des autres valeurs propres, et si les</u> $(n - 1)$ <u>autres valeurs propres sont confondues, alors la série</u> $\sum_f (\alpha_f)\, f$ <u>est rationnelle sur</u> $\underset{\sim}{R}$.

La démonstration est calquée sur celle du lemme 1.

<u>Démonstration du lemme 2.</u> - Pour toute matrice R , la série $\sum_f (\mathrm{Tr}\ R\ \mu f^m)\, f$ est rationnelle pour tout entier $m \in \underset{\sim}{Z}$.

En effet, la matrice μf vérifie son polynôme caractéristique qui s'écrit

$$\mu f^3 + a_2\, \mu f^2 + a_1\, \mu f + a \circ I_3 = 0 \ .$$

Soit $\mu f^2 = - (a_2\, \mu f + a_1\, I + a\, \mu f^{-1})$, d'où $\sum_f (\mathrm{Tr}\ R\ \mu f^2)\, f$ est une série rationnelle et par suite $\sum_f (\mathrm{Tr}\ R\ \mu f^m)\, f$ est une série rationnelle pour tout entier m .

Dans la suite, les éléments de la matrice μf seront désignés sans l'indice f .

Plaçons-nous dans la base, où la matrice μf s'écrit sous sa forme de Jordan :

$$\mu f = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \beta r \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} .$$

(Rappelons que nous considérons le cas où les deux valeurs propres sont confondues).

Dans cette base, la matrice R s'écrit :

$$R = \begin{pmatrix} a_f & * & * \\ * & e_f & * \\ * & i_f & j_f \end{pmatrix}$$

d'où

(7) $$\mathrm{Tr}\ R\ \mu f^m = a_f\, \alpha^m + (e_f + j_f + m\, i_f r)\ \beta^m \quad \text{pour tout entier } m \ .$$

Ecrivons les relations (7) pour $m = 1 , 2 , - 1 , - 2$, et combinons les relations obtenues entre elles. Nous démontrons ainsi que la série de terme général a_f est rationnelle. Compte tenu du lemme 1, ceci démontre le lemme 2.

Abordons à présent la démonstration du théorème 1 dans le cas où les deux valeurs propres sont confondues.

Soit $u = \sum_f (u , f)\, f$ une série rationnelle à coefficients entiers algébriques, et soit $b = \sum_f (b\ ,\ f)\ f$ une série rationnelle, où $(b\ ,\ f) = \mathrm{Tr}\ T\ \mu f$ pour tout mot f .

La représentation μ étant une représentation du monoïde libre X^* dans $M_3(\underset{\sim}{N}^*)$ telle que toute matrice μf est inversible dans $M_3(\underset{\sim}{Q})$, la matrice R étant dans $M_3(\underset{\sim}{N})$.

Supposons que toute matrice μf admette 2 valeurs propres de même module. Pour tout mot f de X^* ,

$$(c\ ,\ f) = \frac{(u\ ,\ f)}{\mathrm{Tr}\ R\ \mu f} \quad \text{est un entier algébrique.}$$

$\mathrm{Tr}\ R\ \mu f$ s'écrit aussi

$$\mathrm{Tr}\ R\ \mu f = a_f\, \alpha_f + b_f\, \beta_f + u'\ f\ ,$$

où α_f est la valeur propre réelle de module strictement plus grand que celui de β_f , β_f étant l'autre valeur propre.

Nous allons démontrer la rationalité de la série de terme général $(c\ ,\ f)\ a_f\, \alpha_f$, puis la rationalité de la série de terme général $a_f^{-1}.\alpha_f^{-1}$, ce qui démontrera la rationalité de la série c .

Première étape.

Pour toute matrice μf , où $f \in XX^*$, nous avons $\det \mu f = \alpha_f\, \beta_f^2$, d'où $\det\ \mu f > 0$.

Supposons dans un premier cas $\det \mu f = 1$ pour tout mot $f \in XX^*$, le cas général sera traité par la suite.

Si f et g sont 2 mots de XX^* , nous avons

$$(\mu f\ \mu g)_{i,j} = \begin{cases} (\mu f)_{i,j}\ (\mu g)_{jj} + \sum_{K \neq j} (\mu f)_{iK}\ (\mu g)_{Kj} \\ \\ (\mu f)_{ii}\ (\mu g)_{i,j} + \sum_{K \neq i} (\mu f)_{iK}\ (\mu g)_{Kj} \end{cases}$$

Si l'on établit une relation d'ordre sur les matrices de $M_3(\underset{\sim}{N}^*)$ par :

$$A \leqslant B \quad \text{si} \quad A_{ij} \leqslant B_{ij} \quad \text{pour tout couple } (i\ ,\ j)\ ,\quad 1 \leqslant i\ ,\ j \leqslant 3\ .$$

Il est facile de voir que

$$\mu f < \mu f\ \mu g\ ,$$

$$\mu g < \mu f\ \mu g\ ,$$

d'où

$$\alpha_f < \alpha_{fg} \quad \text{et} \quad \alpha_g < \alpha_{fg}$$

or $\det \mu f\, \mu g = \det \mu f \det \mu g = 1$, d'où

$$(8) \qquad \left[\begin{aligned} \left|\frac{\beta_{fg}}{\alpha_{fg}}\right| &< \left|\frac{\beta_f}{\alpha_f}\right| \\ \\ \left|\frac{\beta_{fg}}{\alpha_{fg}}\right| &< \left|\frac{\beta_g}{\alpha_g}\right| \end{aligned}\right.$$

or

$$(9) \qquad \operatorname{Tr} R\, \mu f = a_f\, \alpha_f \left[1 + \frac{b_f}{\alpha_f} \times \beta_f\right] .$$

En écrivant la relation (9) pour le mot fg , nous obtenons

$$\operatorname{Tr} R\, \mu f\, \mu g = a_{fg}\, \alpha_{fg} \left[1 + b_{fg} \times \frac{\beta_{fg}}{\alpha_{fg}}\right]$$

or

$$\left|\frac{\beta_{fg}}{\alpha_{fg}}\right| < \left|\frac{\beta_f}{\alpha_f}\right|$$

d'où

$$(10) \qquad b_{fg} \frac{\beta_{fg}}{\alpha_{fg}} = b_{fg} \times \frac{\beta_{fg}}{\beta_f} \times \frac{\beta_f}{\alpha_f} \times \frac{\alpha_f}{\alpha_{fg}} .$$

Si le mot f s'écrit $f = h_1\, h_2$ l'expression (10) s'écrit aussi :

$$(11) \qquad b_{fg} \frac{\beta_{fg}}{\alpha_{fg}} = b_{fg} \times \frac{\beta_{fg}}{\beta_f} \times \frac{\beta_f}{\beta_{h_1}} \times \frac{\beta_{h_1}}{\alpha_{h_1}} \times \frac{\alpha_{h_1}}{\alpha_f} \times \frac{\alpha_f}{\alpha_{fg}} ,$$

nous pouvons continuer le processus de décomposition des mots f , ceci démontre que

$$|V_{fg}| = \left|b_{fg} \times \frac{\beta_{fg}}{\alpha_{fg}}\right| < 1$$

à partir d'une certaine longueur n_0 des mots, car b_{fg} est un polynôme en la longueur du mot fg .

A partir de cette longueur n_0 , nous pouvons donc écrire

$$\frac{(u\,,\,f)}{\operatorname{Tr} R\, \mu f} = \frac{(u\,,\,f)}{a_f\, \alpha_f (1 - V_f)} = \frac{(u\,,\,f)}{a_f\, \alpha_f} \sum_{n \geq 0} (V_f)^n .$$

Donc les déterminants de Hankel de la série de terme général $(u\,,\,f) \sum_{n\geq 0} V_f^n$

tendent vers 0 lorsque la longueur des mots f croît, comme ce sont des entiers algébriques, ils sont nuls à partir d'une certaine longueur des mots f.

La série $\sum_f [(c\ ,\ f)\ a_f . \alpha_f]\ f$ est donc rationnelle sur l'anneau des entiers algébriques.

Démonstrons à présent la rationalité de la série de terme général a_f^{-1} puisque nous avons vu que la série de terme général α_f^{-1} était rationnelle.

Il suffit de remarquer que, pour tout couple de mots $(f\ ,\ g)$ de XX^* et pour tout couple d'entiers $p\ ,\ p'\ ,\ \ p\ ,\ p' \geqslant 1$, nous avons l'égalité

$$a_{gf^p} = a_{gf^{p'}}\ , \tag{12}$$

et donc l'égalité des inverses ; par suite, les déterminants de Hankel de la série de terme général a_f^{-1} sont nuls à partir d'une certaine longueur des mots f, ce qui démontre la rationalité de la série de terme général $(a_f)^{-1}$.

La méthode adoptée pour démontrer l'égalité (12) est celle qui a été utilisée dans le cas où la représentation μ était de degré 2. Elle est essentiellement calculatoire.

En effet, si f et g sont deux mots de XX^*, nous avons :

$$(13)\quad \begin{cases} \operatorname{Tr} R\ \mu g\ \mu f^p = a'_f\, \alpha_f^p + (r + pq)\ \beta_f^p = a_{gf^p}\, \alpha_{gf^p} + r_1\ \beta_{gf^p} + u_{gf^p} \\[2ex] \operatorname{Tr} R\ \mu g\ \mu f^{p'} = a'_f\, \alpha_f^{p'} + (r + p'\ q)\ \beta_f^{p'} = a_{gf^{p'}}\, \alpha_{gf^{p'}} + r_2\ \beta_{gf^{p'}} + u_{gf^{p'}}\ . \end{cases}$$

Nous nous plaçons dans la base où la matrice μf est écrite sous sa forme de Jordan. En calculant le polynôme caractéristique de la matrice $\mu g\ \mu f^p$ et la dérivée de ce polynôme, nous obtenons β_{gf^p}, ce qui permet de calculer α_{gf^p}.

En remplaçant β_{gf^p} et α_{gf^p} par leurs valeurs en fonction de α_f^p et β_f^p dans les égalités (13) et remarquant qu'il y a unicité de l'écriture des coefficients d'une série rationnelle, nous en déduisons que

$$a_{gf^p} = a_{gf^{p'}}\ ,\quad \forall\ p\ ,\ p' \geqslant 1\ ,\quad \forall\ g\ ,\ f \in XX^*$$

ce qui termine la démonstration du théorème dans ce cas particulier.

Etudions le cas général. Si pour tout couple de mots $(f\ ,\ g)$ de XX^*, nous avons

$$\alpha_{fg} \geqslant \alpha_f \times \alpha_g\ ,$$

comme $\det \mu f\ \mu g = \det \mu f\ \det \mu g$, il est immédiat que l'inégalité suivante a lieu

$$\frac{|\beta_{fg}|^2}{\alpha_{fg}^2} \leqslant \frac{|\beta_f|^2}{\alpha_f^2} \times \frac{|\beta_g|^2}{\alpha_f^2} .$$

Connaissant la majoration des coefficients d'un déterminant, nous pouvons majorer ce déterminant [2]. Donc les déterminants de Hankel de la série de terme général

$$(14) \qquad (c\ ,\ f)\ a_f\, \alpha_j$$

tendent vers 0 très vite lorsque la longueur du mot f augmente.

Ceci montre que la série $\sum_f (c\ ,\ f)\ f$ est rationnelle sur l'anneau des entiers algébriques, ce qui démontre le théorème 1.

Etudions l'autre cas, qui est le cas où il existe des mots f, g de XX^* tel que

$$\alpha_{fg} < \alpha_f\, \alpha_g .$$

Démontrons que α_{fg} et $\alpha_f\, \alpha_g$ sont deux quantités très voisines.

Etant donnée une matrice $A^{(0)}$ quelconque de $M_3(\underset{\sim}{Q}_+)$ il est facile de voir que ses valeurs propres sont dans les cercles suivants :

$$(15) \qquad |z - A_{ii}^{(0)}| \leqslant \lambda_i\ , \quad 1 \leqslant i \leqslant 3 \quad \text{et} \quad \lambda_i = \textstyle\sum_j A_{ij} .$$

Dans le cas qui nous intéresse les valeurs propres sont réelles, l'inégalité (15) s'écrit donc

$$- \lambda_i \leqslant z - A_{ii}^{(0)} \leqslant \lambda_i$$

d'où

$$(15') \qquad z \leqslant \lambda_i + A_{ii}^{(0)}\ , \quad 1 \leqslant i \leqslant 3 .$$

Cette dernière inégalité, écrite pour les matrices μf et $t\mu g$ et l'indice $i = 1$, permet d'écrire :

$$\alpha_f \leqslant (\mu f)_{11} + \textstyle\sum_j (\mu f)_{1j}$$

$$\alpha_g \leqslant (\mu g)_{11} + \textstyle\sum_j (\mu g)_{j,1}$$

d'où

$$(16) \quad \alpha_f\, \alpha_g \leqslant (\mu f)_{11}\ (\mu g)_{11} + (\mu g)_{11} \textstyle\sum_j (\mu f)_{1j} + (\mu f)_{11} \sum_j (\mu g)_{j1} + \sum_j (\mu f)_{1j} \sum_j (\mu g)_{j1} .$$

En effectuant le développement du membre de droite, nous voyons que chaque terme figure dans l'expression d'un terme de $\mu f\ \mu g$, d'où

$$\alpha_f\, \alpha_g < 14\ \max_{i,j} (\mu f\ \mu g)_{i,j}$$

(cette majoration est assez grossière et peut être affinée), si

$$\max_{i,j}(\mu f\ \mu g)_{i,j} = (\mu g\ \mu g)_{K,K}$$

pour un certain entier k , où $1 \leqslant k \leqslant 3$.

Considérons la matrice A_{KK} dont le seul élément non nul est le coefficient $(k\ ,\ k)$ égal à $(\mu f\ \mu g)_{KK}$

$$\alpha_{A_{KK}} = (\mu f\ \mu g)_{KK} < \alpha_{fg}\ ,$$

en remarquant que la fonction qui à toute matrice associe son rayon spectral est une fonction croissante, la relation d'ordre sur l'ensemble des matrices étant celle qui a été définie précédemment. D'où

$$\alpha_f\, \alpha_g < 14\, \alpha_{fg}\ .$$

Sinon, si

$$\max_{i,j}(\mu f\ \mu g)_{i,j} = (\mu f\ \mu g)_{KK'} \quad \text{où} \quad K \neq K'$$

et

$$(\mu f\ \mu g)_{KK'} > \alpha_{fg}\ ,$$

on peut voir que $\max_{i,j}(\mu f\ \mu g)_{i,j}$ et α_{fg} sont équivalents.

Pour cela il suffit de munir l'ensemble des matrices de $M_3(\underset{\sim}{N}^*)$ d'une topologie en remarquant que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\mu f\ \mu g}{\alpha_{fg}}\right)^n$$

est une matrice idempotente qui n'est pas la matrice unité.

Ceci montre que $\max(\mu f\ \mu g)_{i,j}$ et α_{fg} sont équivalents.

Remarquons qu'il existe une autre méthode **pour voir** que α_{fg} et $\max(\mu f\ \mu g)_{K,K'}$ sont équivalents.

Utilisons les inégalités suivantes :

$$\min_{i,j}(\mu f\ \mu g)_{i,j} < \alpha_{fg} < 3\ \max_{i,j}(\mu f\ \mu g)_{i,j}$$

qui ont lieu chaque fois que la somme des lignes de la matrice $\mu f\ \mu g$ n'est pas constante [5]. En calculant les valeurs propres de la matrice B dont les coefficients non nuls sont si

$$\max(\mu f\ \mu g)_{i,j} = (\mu f\ \mu g)_{K,K'} = B_{KK'}$$

et

$$\min(\mu f\ \mu g)_{i,j} = (\mu f\ \mu g)_{mm'} = B_{mm'} ,$$

les coefficients diagonaux égaux à 1 et les autres coefficients nuls, nous voyons que

$$\max(\mu f\ \mu g)_{i,j} \times \min(\mu f\ \mu g)_{i,j} < \alpha^2 ,$$

si le maximum des $(\mu f\ \mu g)_{i,j}$ et $\min(\mu f\ \mu g)_{i,j}$ sont sur la même ligne ou la même colonne. Sinon il suffit de considérer la matrice B' qui a des 1 partout sauf aux coefficients qui correspondent au maximum et au minimum :

$$(B')_{K,K'} = \max(\mu f\ \mu g)_{i,j}$$

$$(B')_{m,m'} = \min(\mu f\ \mu g)_{i,j}$$

et

$$\forall\ (i\ ,\ j)\ ,\quad (i\ ,\ j) \neq (K\ ,\ K')\ \text{ et }\ (m\ ,\ m')\ ,$$

alors

$$B'_{i,j} = 1 .$$

En examinant tous les cas nous voyons que la borne $\alpha_f \alpha_g < 14\, \alpha_{fg}$ est une borne acceptable. D'où

$$\alpha_{fg} \cdot \beta^2_{fg} = \alpha_f\ \beta^2_f \times \alpha_g\ \beta^2_g = 14\, \alpha_{fg}\ \beta^2_{fg} \times \frac{1}{14} .$$

D'où l'inégalité suivante :

$$\frac{|\beta_{fg}|}{\alpha_{fg}} < \sqrt{14} \times \frac{|\beta_f|}{\alpha_f} \times \frac{|\beta_g|}{\alpha_g} ,$$

or $\sqrt{14} \times |\beta_f|/\alpha_f$ est plus petit que 1 dès que f est un mot de longueur assez grande. Donc les déterminants de Hankel de la série

$$\Sigma_f\ [(c\ ,\ f)\ a_f\, \alpha_f]\ f ,$$

tendent vers 0 très vite sur l'anneau A, et sont en module < 1. Donc la série c est rationnelle sur l'anneau des entiers algébriques.

2. Etude du cas où une matrice μf admet une valeur propre complexe.

Soient β et $\bar{\beta}$ les valeurs propres de la matrice μf. Supposons $\beta \neq \bar{\beta}$. Nous avons dans ce cas le lemme suivant :

LEMME 3. - L'algèbre $\mathfrak{A}$ engendrée par la représentation μ et la matrice R est une algèbre réductible sur $\underset{\sim}{C}$.

<u>Démonstration du lemme 3.</u> - La matrice μf admettant deux valeurs propres β et $\bar{\beta}$ distinctes est diagonalisable.

Plaçons-nous dans la base où cette matrice μf est diagonale. Pour tout entier n la matrice μf^n s'écrit

$$\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\beta}^n \end{pmatrix}$$

Soient g un mot de XX^*, et μg son image par la représentation μ. Dans cette base, la matrice μg s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a & * & * \\ * & e & * \\ * & * & j \end{pmatrix}$$

les coefficients a, e, j étant dans $\underset{\sim}{C}$.

Nous avons donc :

(17) $$\operatorname{Tr} \mu f^n \mu g = a\alpha^n + e\beta^n + j\bar{\beta}^n .$$

En séparant les parties réelles et imaginaires dans la relation (17), nous avons, si

$$\begin{cases} a = u + iv \\ e = f + ig \\ j = k + il \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \beta^n = a_n + id_n \\ \bar{\beta}^n = a_n - id_n \end{cases}$$

d'où

$$\alpha^n u + a_n(f + k) + d_n(\ell - g) \in \underset{\sim}{N}^*$$

et

(18) $$\alpha^n v + a_n(g + \ell) + d_n(f - k) = 0 .$$

Si $v \neq 0$, la relation (18) s'écrit aussi :

$$\alpha^n = \frac{-(a_n(g + \ell) + d_n(f - k))}{v} ,$$

d'où

$$\alpha^n \leq |\beta^n| \times k , \text{ où } k = \frac{|g + \ell| + |f - k|}{|v|} ,$$

d'où $\alpha^n / \beta^n \leq k$ pour tout entier n, ce qui est impossible puisque $\alpha/|\beta| > 1$, d'où $v = 0$.

Or $\operatorname{Tr} \mu g \in \underset{\sim}{N}^*$, nous avons donc

(19 $$g + \ell = 0$$

d'où $d_n(f - k) = 0$.

Or nous avons supposé $d_n \neq 0$ pour $n = 1$. Ceci montre que nous avons la relation

(20) $$f - k = 0 .$$

Les conditions (19) et (20) montrent que $\bar{e} = j$ pour toute matrice μg.

Pour toute matrice μg, ainsi que pour la matrice R, nous avons les 2 relations suivantes :

$$\left[\begin{array}{ll} (21) & \overline{(\mu g)}_{11} \in \underset{\sim}{R} \\ (22) & (\mu g)_{22} = (\overline{\mu g})_{33} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} (21') & \overline{R}_{11} \in \underset{\sim}{R} , \\ (22') & R_{22} = \overline{R_{33}} . \end{array}\right.$$

Nous explicitons les 2 relations (21) et (22) pour le produit de 2 **matrices** μh et $\mu h'$, où h et h' sont deux mots de XX^*.

Si les matrices μh et $\mu h'$ s'écrivent respectivement :

$$\mu h = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & A_{22} & e \\ f & g & \overline{A_{22}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mu h' = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & A'_{22} & e' \\ f' & g' & \overline{A'_{22}} \end{pmatrix}$$

Les 2 conditions (21) et (22) permettent d'écrire les conditions suivantes :

$$\left[\begin{array}{ll} (23) & \overline{bd' + cf'} \in \underset{\sim}{R} , \\ (24) & \overline{bd'} + \overline{e'g} = cf' + g'e . \end{array}\right.$$

Les 2 conditions (23) et (24) démontrent que

(25) db' et $cf' \in \underset{\sim}{R}$

(26) $\overline{eg'} - ge' \in \underset{\sim}{R}$

(26') $ge \in \underset{\sim}{R}$

A l'aide de la relation (26') explicitons la relation (26).

En faisant les calculs nous démontrons que

(27) $eg' \in \underset{\sim}{R}$.

Soit $\mathfrak{a}$ l'algèbre engendrée par la matrice R et les matrices μf sur $\underset{\sim}{C}$. Si $\mathfrak{a}$ n'est pas triangulisable, auquel cas elle est bien entendu réductible, il existe au moins un mot h_0 de XX^* pour lequel les 4 coefficients d , f , g , e de la matrice μh_0 ne sont pas tous nuls, et soient

$$A_1 \text{ la matrice } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ -f & -g & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$B \text{ la matrice} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{e} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout mot h de XX^* et pour la matrice R , nous avons, d'après les relations (23), (24), (25), (26), (27), la relation suivante :

(28) $\quad \mathrm{Tr}\, A_1\, \mu h + \mathrm{Tr}\, \overline{\mu h}\, B = 0$

(28') $\quad \mathrm{Tr}\, A_1\, R + \mathrm{Tr}\, \bar{R}\, B = 0$.

[La matrice $\overline{\mu h}$ (resp. $\bar{R}$) étant la matrice dont tous les coefficients sont conjugués de ceux de la matrice μh (resp. R).]

Soit M une matrice de l'algèbre $\mathfrak{Q}$ sur la base $(\mu h)_j$, où $0 \leq j \leq n^2 - 1$. En convenant d'appeler R , $(\mu\varepsilon)_0$, M s'écrit donc

$$M = \Sigma_j\, \alpha_j (\mu h)_j \text{ , d'où } \bar{M} = \Sigma_j\, \bar{\alpha}_j (\overline{\mu h})_j \text{ ,}$$

d'où

$$\mathrm{Tr}\, A_1\, M - \mathrm{Tr}\, \bar{M}\, B = \mathrm{Tr}\, \Sigma_j\, [\alpha_j\, A_1 (\mu h)_j - \bar{\alpha}_j\, \overline{\mu h}_j\, B] \text{ .}$$

En calculant la partie imaginaire, et en tenant compte des relations (24), (25), (26), (27), nous voyons que

(29) $\quad \mathrm{Tr.} A_1\, M - \mathrm{Tr}\, \bar{M}\, B \in \underset{\sim}{R}, \quad \forall\, M \in \mathfrak{a}$.

Or les matrices A_1 et B ne sont pas nulles, donc la relation (29) n'est pas triviale. L'algèbre $\mathfrak{a}$ est donc une algèbre réductible sur $\underset{\sim}{C}$.

Il existe donc une base dans laquelle les matrices de l'algèbre $\mathfrak{Q}$ s'écrivent

$$\mu f = \begin{pmatrix} \mu_1 f & & * \\ & \mu_2 f & \\ 0 & & \mu_3 f \end{pmatrix}$$

où μ_1 , μ_2 , μ_3 sont des représentations, μ_1 étant une représentation de degré 1.

Si μ_2 et μ_3 sont toutes deux de degré 1, alors l'algèbre $\mathfrak{a}$ est une algèbre triangulisable. Par un raisonnement élémentaire sur les modules des valeurs propres, on démontre que

$$\mu_1 \, f = \alpha_f \text{ pour tout mot } f ,$$

ce qui démontre en même temps les lemmes 1 et 2.

Sinon, si μ_2 est une représentation irréductible de degré 2, alors μ_3 est la représentation nulle.

Dans ce cas, par un raisonnement sur le module des valeurs propres on démontre que

$$\text{si } \mu_1 \, f = \alpha_f \text{ pour un certain mot } f \text{ de } XX^* ,$$

alors

$$\mu_1 \, g = \alpha_g \text{ pour tout mot } g \text{ de } XX^* .$$

Il suffit de raisonner sur les mots $f^p g^n$ ou $p , n \in \underset{\sim}{N}^*$.

Si $\mu_1 \, f = \beta_f$ pour un certain mot f de XX^*, alors de la même manière nous avons :

$$\mu_1 \, g = \beta_g \text{ pour tout mot } g \text{ de } XX^* .$$

En raisonnant simplement sur le module des valeurs propres, nous voyons dans ce cas particulier, que $\alpha_{fg} = \alpha_f \alpha_g$. Ceci démontre à la fois le lemme 1 et le lemme 2.

La démonstration du théorème se fait exactement comme dans le cas où les 2 valeurs propres sont confondues et où $\alpha_{fg} \geqslant \alpha_f \alpha_g$.

3. Etude du cas où une matrice μf admet 2 valeurs propres réelles opposées.

Toute matrice μg admet 2 valeurs propres βg et $\epsilon g \, \beta g$, où $\epsilon g = \pm 1$. Remarquons que ϵg conserve la rationalité. En effet, si $X = (x_1 , \dots , x_n)$ est l'alphabet, et si, pour tout i, nous définissons l'application μ' par

$$\mu' \, x_i = |\det \mu x_i|^{-1} , \quad 1 \leq i \leq n ,$$

qui sera prolongée à X^* par multiplication, alors pour tout mot f nous avons

$$\det \mu f \times \mu' f = \epsilon f .$$

Donc la série $\sum_f (\epsilon f) \, f$ est rationnelle.

La démonstration du lemme 1 est immédiate dans ce cas. En appliquant les mêmes méthodes que dans le cas où la matrice μf a 2 valeurs propres confondues, nous démontrons que la série $\sum_f [(1 + \epsilon f) \, \alpha_f] \, f$ est rationnelle, or

$$\sum_f [(1 + \epsilon f) \, \alpha_f] \, f = 2 \sum_{f/\epsilon f=1} (\alpha_f) \, f ,$$

donc la série $\sum_{f/\epsilon f=1} (\alpha_f) \, f$ est rationnelle.

La série $\sum_f (\varepsilon f)\, f$ étant rationnelle, la série de terme général

$$(1 - \varepsilon f)\ \mathrm{Tr}\ \mu f = 2\ \mathrm{Tr}\ \mu f = 2\,\alpha_f \quad \text{si} \quad \varepsilon_f = -1 \quad = 0 \ \text{si} \quad \varepsilon f = 1$$

est rationnelle. Donc la série $\sum_{f/\varepsilon f=-1} (\alpha_f)\, f$ est rationnelle. Donc la série $\sum_f (\alpha_f)\, f$ est rationnelle, et le lemme 1 est démontré dans ce cas.

Pour démontrer le lemme 2, nous nous ramenons à un cas qui ressemble au 1er cas. En remarquant que la série $\sum_f (\mathrm{Tr}\ R\ \mu f^2)\, f$ est rationnelle, et en développant son terme général qui s'écrit

$$\mathrm{Tr}\ R\ \mu f^2 = a_f\,\alpha_f^2 + b_f(\beta_f)^2 ,$$

et en appliquant les mêmes techniques que dans le 1er cas, nous obtenons la rationalité de la série de terme général $a_f\,\alpha_f^2$. Or la série de terme général α_f^{-1} est rationnelle. Ceci termine la démonstration du lemme 2.

Le théorème se démontre ensuite exactement comme dans le 1er cas.

Troisième partie.

4. Etude du cas général lorsque $N = 3$.

Le cas général est celui où il existe un mot g_0 de XX^* tel que la matrice μg_0 admette 3 valeurs propres α_0, β_0, β_0' de modules différents.

Soit, en notant toujours par α_0 la valeur propre de module maximum,

$$\alpha_0 > |\beta_0| > |\beta_0'| .$$

Pour tout mot f de XX^*, nous avons donc la relation

$$\mathrm{Tr}\ R\ \mu f = a_f\,\alpha_f + b_f\,\beta_f + b_f'\,\beta_f' + u , \quad \text{où} \quad u = 0 \quad \text{si} \quad \beta_f \neq \beta_f' .$$

Le terme général de la série c s'écrivant :

$$(30) \qquad (c\ ,\ f) = \frac{(u\ ,\ f)}{\mathrm{Tr}\ R\ \mu f} = \frac{(u\ ,\ f)}{a_f\,\alpha_f\left(1 + \frac{b_f}{a_f} \times \frac{\beta_f}{\alpha_f} + \frac{b_f'\,\beta_f}{a_f\,\alpha_f} + \frac{u}{a_f\,\alpha_f}\right)}$$

Les matrices μf étant dans $M_3(\underset{\sim}{N}^*)$ pour tout couple de mots f, $g \in XX^*$,

$$\alpha_{fg} > \alpha_f ,$$

$$\alpha_{fg} > \alpha_g .$$

Or $\det \mu f\,\mu g = \det \mu f\ \det \mu g$, ce qui s'écrit aussi

$$\frac{\beta_{fg}}{\alpha_{fg}} \times \frac{\beta'_{fg}}{\alpha_{fg}} = \frac{\beta_f}{\alpha_f} \times \frac{\beta'_f}{\alpha_f} \times \left(\frac{\alpha_f\,\alpha_g}{\alpha_{fg}}\right)^3 \times \frac{\beta_g}{\alpha_g} \times \frac{\beta'_g}{\alpha_g} .$$

Si, comme nous l'avons vu dans le cas où les valeurs propres sont confondues, $\alpha_f\,\alpha_g/\alpha_{fg} < k$, d'où $(|\beta_{fg}|/\alpha_{fg}) \times (|\beta'_{fg}|/\alpha_{fg})$ est une quantité très petite lorsque la longueur des mots fg croît, il s'en suit que

$$\frac{|\beta_f|}{\alpha_f} + \frac{|\beta'_f|}{\alpha_f} \longrightarrow 0 \text{ très vite.}$$

Il existe donc une certaine longueur n_0 des mots telle que la relation (30) peut s'écrire :

$$(31) \qquad (c\ ,\ f)\ a_f\,\alpha_f = \frac{(a\ ,\ f)}{1 + \frac{b_f}{a_f} \times \frac{\beta_f}{\alpha_f} + \frac{b'_f}{a_f} \times \frac{\beta'_f}{\alpha_f} + \frac{u}{a_f\,\alpha_f}} = (a\ ,\ f) \sum_{n\geq 0} u_f^n ,$$

où

$$-\ u_f = \frac{b_f}{a_f} \times \frac{\beta_f}{\alpha_f} + \frac{b'_f}{a_f} \times \frac{\beta'_f}{\alpha_f} + \frac{u}{a_f\,\alpha_f} \quad \text{et} \quad |u_f| < 1 \quad \text{si} \quad |f| > n_0 .$$

Les déterminants de Hankel de la série de terme général $(c\ ,\ f)\ a_f\,\alpha_f$, qui sont des entiers algébriques, tendent vers 0 très vite et leur module est < 1 lorsque la longueur des mots f augmente. Ils sont donc nuls à partir d'une certaine longueur des mots f . Donc la série de terme général

$$(32) \qquad (c\ ,\ f)\ a_f\,\alpha_f$$

est rationnelle sur l'anneau des entiers algébriques. Or

$$(a\ ,\ f) = (c\ ,\ f) \times \operatorname{Tr} R\ \mu f ,$$

d'où

$$(a\ ,\ f) \times a_f\,\alpha_f = (c\ ,\ f)\ a_f\,\alpha_f \times \operatorname{Tr} R\ \mu f .$$

Donc la série de terme général :

$$(32') \qquad (a\ ,\ f) \times a_f\,\alpha_f$$

est rationnelle sur l'anneau des entiers algébriques.

Ceci démontre que, pour tout entier n , $n \geq 1$, la série de terme général

$$(33) \qquad (c\ ,\ f)\ a_f^n\,\alpha_f^n$$

est rationnelle sur l'anneau des entiers algébriques.

Pour terminer la démonstration, il suffit d'examiner les différents cas selon la matrice R .

Si $R = \lambda I$, où $\lambda \neq 0$, donc $a_f = \lambda$ pour tout mot f . Il est immédiat, dans ce cas, que la série de terme général $(c\ ,\ f)\ \alpha_f$ est rationnelle. Donc pour tout entier n , la série de terme général

(33') $$(c\ ,\ f)\ \alpha_f^n$$

est rationnelle.

α_f , étant une valeur propre de la matrice μf , vérifie le polynôme caractéristique de la matrice μf , soit

$$X^3 + a_1 X^2 + a_2 X + a_3 = 0\ ,$$

d'où

(34) $$(c\ ,\ f)[\alpha_f^3 + a_1 \alpha_f^2 + a_2 \alpha_f] = -\ (c\ ,\ f)\ \alpha_3\ .$$

a_1 et a_2 , étant des fonctions symétriques des valeurs propres, sont d'après la proposition (30) de la première partie des termes généraux de séries rationnelles.

Or $-\alpha_3 = \det \mu f$, donc la série $\sum_f (c\ ,\ f)\ f$ est rationnelle sur l'anneau des entiers algébriques.

<u>Cas où</u> R <u>appartient au centre de l'algèbre</u> $\mathfrak{A}$ <u>engendrée par les matrices</u> μf , <u>et</u> $R \neq \lambda I$.

Ce cas est aussi le cas où l'algèbre $\mathfrak{A}$ est une algèbre triangulisable sur $\underset{\sim}{C}$, d'où

$$a_f = a_g \quad \text{si} \quad |f|_{xi} = |g|_{xi} \quad \text{pour tout} \quad x_i \in X = (x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_n)\ .$$

Donc, $\forall\ h\ ,\ h' \in X^*$,

$$a_{hfh'} = a_{hgh'}\ ,$$

d'où

$$a_{hfh'}^{-1} = a_{hgh'}^{-1}\ .$$

Les déterminants de Hankel de la série de terme général a_f^{-1} sont tous nuls. La série de terme général a_f^{-1} est rationnelle. La série de terme général $(c\ ,\ f)\ \alpha_f$ est donc rationnelle, et la suite de la démonstration est identique au cas précédent. La série $c = \sum_f (c\ ,\ f)\ f$ est donc rationnelle sur l'anneau des entiers algébriques.

<u>Cas général</u>. - Soit μf l'image d'un mot f de XX^* . Dans la base où la matrice μf est triangulisable, nous avons pour tout mot g de X^* et pour tout entier $n \geq 1$,

(35) $$\mathrm{Tr}\ R\ \mu g\ \mu f^n = \mathrm{Tr}\ P\ R\ \mu g\ P^{-1}\ P\ \mu f^n\ P^{-1}\ .$$

P étant la matrice de passage.

La relation (35) s'écrit aussi ;

(36) $\operatorname{Tr} R\, \mu g\, \mu f^n$

$$= (P\, R\, \mu g\, P^{-1})_{11}\, \alpha_f^n + (P R\, \mu\, g\, P^{-1})_{22}\, \beta_f^n + (P R\, \mu\, g\, P^{-1})_{33}\, \beta_f'^n + (P R\, \mu\, g\, P^{-1})_{32}\, uf$$

où $uf = 0$ si $\beta_f \neq \beta'_f$.

L'idée de la démonstration est de prouver que

$$a_{gf^n} \sim a_{gf^{n'}} \,, \quad \forall\, g \in X^* \,, \quad \forall\, n\,,\, n' \geqslant 1 \,,$$

et d'utiliser la continuité de la fonction déterminante au voisinage du point 0.

Or si $n \longrightarrow \infty$

$$\operatorname{Tr} P\, \mu g\, P^{-1}.P\, \mu f^n\, P^{-1} \longrightarrow \alpha_{gf^n} .$$

D'autre part,

(37) $$\operatorname{Tr} P\, \mu g\, P^{-1}.P\, \mu f^n\, P^{-1} \longrightarrow (P\, \mu g\, P^{-1})_{11}\, \alpha_f^n \,,$$

d'où

(38) $$\alpha_{gf^n} \sim (P\, \mu g\, P^{-1})_{11}\, \alpha_f^n .$$

D'autre part, nous avons

$$\operatorname{Tr} R\, \mu g\, \mu f^n = a_{gf^n}\, \alpha_{gf^n} + b_{gf^n}\, \beta_{gf^n} + b'_{gf^n}\, \beta'_{gf^n} + u_{gf^n} \times r .$$

(39) $$\operatorname{Tr} R\, \mu g\, \mu f^n \longrightarrow a_{gf^n}\, \alpha_{gf^n} \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty .$$

En comparant les relations (37), (38), (39), nous en concluons que

(40) $$a_{gf^n} \sim \frac{(P\, R\, \mu g\, P^{-1})_{11}}{(P\, \mu g\, P^{-1})_{11}} .$$

Remarquons que $(P\, \mu g\, P^{-1})_{11} \neq 0$. En effet, si $(P\, \mu f\, P^{-1})_{11} = 0$, on aurait

$$\operatorname{Tr} P\, \mu g\, \mu f^n\, P^{-1} = \operatorname{Tr} \mu g\, \mu f^n = (P\, \mu g\, P^{-1})_{22}\, \beta_f^n + (P\, \mu g\, P^{-1})_{32}\, n\, u_f + (P\, \mu g\, P^{-1})_{33}\, P_f'^n$$

à partir d'une certaine longueur des mots f et d'un indice n, on aurait

$$\operatorname{Tr} \mu g\, \mu f^n < \operatorname{Tr} \mu f^n \,,$$

or $\mu g\, \mu f^n > \mu f^n$, d'où

$$\operatorname{Tr} \mu g\, \mu f^n > \operatorname{Tr} \mu f^n .$$

Pour tout indice n, l'expression (40) a un sens, d'où si $(P\, R\, \mu g\, P^{-1})_{11} \neq 0$,

$$(a_{gf^n})^{-1} \sim \frac{(P\, \mu g\, P^{-1})_{11}}{(P\, R\, \mu g\, P^{-1})_{11}} .$$

Donc la série de terme a_f^{-1} est rationnelle. Les séries de termes généraux, égaux respectivement à $(c\ ,\ f)\ \alpha_f$, $(c\ ,\ f)\ \alpha_f^2$ et $(c\ ,\ f)\ \alpha_f^3$, sont rationnelles. Donc la série $c = \sum_f\ (c\ ,\ f)\ f$ est rationnelle sur l'anneau des entiers algébriques, ce qui termine la démonstration dans le cas ou $N = 3$.

Quatrième partie

5. Démonstration du théorème 2. (cas où la représentation est de degré quelconque).

THÉORÈME 2. - Soit $u = \sum_f\ (u\ ,\ f)\ f$ une série rationnelle à coefficients entiers algébriques. Si pour tout mot f ,

$$(c\ ,\ f) = \frac{(u\ ,\ f)}{\mathrm{Tr}\ R\ \mu f}$$

est un entier algébrique, μ étant une représentation inversible de X^* dans $M_N(\underset{\sim}{N}^*)$, alors la série $c = \sum_f\ (c\ ,\ f)\ f$ est rationnelle sur l'anneau des entiers algébriques.

Démonstration. - Elle est exactement identique à celle faite dans le cas général et où $N = 3$. En effet si, pour tout mot f , $\mathrm{Tr}\ R\ \mu f$ s'écrit :

(41)
$$\mathrm{Tr}\ R\ \mu f = a_f\,\alpha_f + \sum_{1 \leq i \leq N-1} (b_{if}\ \beta_{if} + u_{if})\ .$$

α_f étant la valeur propre réelle de module maximum, il existe un entier n_0 tel que, si

$$u_f = \sum_{1 \leq i \leq N-1} \frac{b_{if}}{a_f} \times \frac{\beta_{if}}{\alpha_f} + \frac{u_{if}}{a_f\,\alpha_f}$$

alors $|u_f| < 1$ dès que $|f| \geq n_0$.

Par les mêmes techniques de majoration, on démontre que la série de terme général

(42)
$$(c\ ,\ f)\ a_f\,\alpha_f$$

est rationnelle.

Puis, que pour tout entier $n \geq 1$, la série de terme général

(42')
$$(c\ ,\ f)\ a_f^n\,\alpha_f^n$$

est rationnelle.

Si la représentation μ engendre une algèbre triangulisable sur $\underset{\sim}{C}$ alors $a_f = a_g$, $\forall\ f\ ,\ g \in XX^*$, tel que $|f|_{x_i} = |g|_{x_i}$ pour tout $x_i \in X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

La série de terme général a_f^{-1} est donc rationnelle. Donc la série $c = \sum_f (c, f)\ f$ est rationnelle sur l'anneau des entiers algébriques.

Si l'algèbre engendrée par la représentation μ n'est pas triangulisable, il suffit de remarquer que, pour tout couple de mots f , g de XX^* et pour tout entier n ,

(43) $$\alpha_{gf^n} \sim (P\, \mu g\, P^{-1})_{11}\, \alpha_f^n .$$

(P étant la matrice de passage qui permet d'écrire la matrice μf sous sa forme triangulaire supérieure), d'où

$$\operatorname{Tr} R\, \mu g\, \mu f^n = \operatorname{Tr} P\, R\, \mu g\, P^{-1}\, P\, \mu f^n\, P^{-1} \sim (P\, R\, \mu g\, P^{-1})_{11}\, \alpha_f^n$$

$$\operatorname{Tr} R\, \mu g\, \mu f^n \sim a_{gf^n}\, \alpha_{gf^n}$$

d'où

$$a_{gf^n} \sim \frac{(P\, R\, \mu g\, P^{-1})_{11}}{(P\, \mu g\, P^{-1})_{11}} .$$

Si $(P\, R\, \mu g\, P^{-1})_{11} \neq 0$, alors

$$a_{gf^n}^{-1} \sim \frac{(P\, \mu g\, P^{-1})_{11}}{(P\, R\, \mu g\, P^{-1})_{11}} .$$

Donc la série

(44) $$\sum_f (a_f^{-1})\ f$$

est rationnelle, toute matrice μf vérifiant son polynôme caractéristique, qui s'écrit :

$$X^n + a_1\, , X^{N-1} + \dots + a_{N-1}\, X = a_N\ , \text{ où } a_N = (-1)^N \det \mu f .$$

En tenant compte des relations (42') et (44), nous voyons que la série $\bullet = \sum_f (c, f)$ est rationnelle sur l'anneau des entiers algébriques.

Ce cas général démontre aussi de manière plus rigoureuse le résultat énoncé en [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] CANTOR (D. G.). - On arithmetic properties of the Taylor series of rational functions, Pac. J. of Math., t. 41, 1972, p. 329-345.

[2] GÉRARDIN (K.). - Quelques propriétés des séries formelles en variables non commutatives, Thèse, Université Paris-7, 1979.

[3] GÉRARDIN (K.). - Un résultat sur le quotient de Hadamard, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 20e année, 1978/79, n° 10, 14 p.

[4] MAHLER (K.). - Eine arithmetische Eigenschaft der Taylor-koeffizienten rationaler Funktionen, Köningl. nederl. Akad. Wetensch., Proc., Series A, t. 38, 1935, p. 50-60.

[5] VARGA (R. S.). - Matrix iterative analysis. - Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1962.