Pierre Jarraud

Jacobiennes des courbes de Mumford

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 9, nº 2 (1981-1982), exp. nº 18, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1981-1982__9_2_A1_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
9e année, 1981/82, n° 18, 6 p.

8 mars 1982

JACOBIENNES DES COURBES DE MUMFORD

par Pierre JARRAUD (*)

1. Introduction et notations.

(1.1.) Soit

K un corps local d'anneau des entiers R et de valuation $v(v(K^*) = \underset{\sim}{Z})$.

C la clôture algébrique complétée de K .

$\Gamma < PGL_2(K)$ un groupe de Schottky (i. e. tout élément différent de l'élément neutre peut être représenté par une matrice dont les deux valeurs propres sont de valuations différentes). On sait qu'un tel groupe est libre. On notera $\gamma_1 , \cdots , \gamma_g$ une base de Γ , et encore $\gamma_1 , \ldots , \gamma_g$ une base de $\bar{\Gamma} = \Gamma/[\Gamma , \Gamma]$ (qui est abélien libre). On note $\bar{\gamma}$ la classe de $\gamma \in \Gamma$ dans $\bar{\Gamma}$.

Soit Σ l'ensemble des points fixés de $\Gamma - \{1\}$ et $\Omega = P^1(K) - \Sigma$. Alors $S = \Omega/\Gamma$ est une courbe projective de genre g dite courbe de Mumford.

MUMFORD [8], MANIN-DRINFEL'D [7] et GERRITZEN [2] ont montré que l'essentiel de la théorie complexe des jacobiennes peut être obtenu dans le cas p-adique. A priori, les obstructions ne manquent pas : une théorie additive est impossible (par manque de sous-groupe discret dans K^g), et il n'est pas évident d'obtenir des périodes d'intégrales abéliennes. Mais (cf. [4] chapitre 2, § 6) si Λ est un réseau de $\underset{\sim}{C}^g$, on sait qu'on peut choisir une base $(e_1 , \ldots , e_g)$ de $\underset{\sim}{C}^g$, et g vecteurs $\lambda_1 , \ldots , \lambda_g$ de $\underset{\sim}{C}^g$ tels que $(e_1 , \ldots , e_g , \lambda_1 , \ldots , \lambda_g)$ soit une base de Λ . Les conditions de Riemann indiquent que le tore analytique $\underset{\sim}{C}/\Lambda$ est une variété abélienne si et seulement si, la matrice Z des λ_i sur les e_i est symétrique et $\operatorname{Im} Z$ est définie positive. Appliquons l'exponentielle $\exp 2i\pi z$; la partie de Λ , engendrée par $e_1 , \ldots , e_g$, va sur 1 , et on obtient un sous-groupe (multiplicatif) discret Λ^* de $(\underset{\sim}{C}^*)^g$, le quotient étant isomorphe à $\underset{\sim}{C}/\Lambda$. C'est cette théorie multiplicative qui passe au cas p-adique, l'existence d'une polarisation assurant là aussi l'algébricité du tore analytique.

(1.2) On trouvera les démonstrations de ce qui suit dans le chapitre 2 de [3] dont on adopte les notations.

Soient a et b deux points de Ω , le produit infini $\prod_{\gamma\in\Gamma} (z - \gamma a)/(z - \gamma b)$ définit une fonction méromorphe sur Ω (de zéros les $\gamma . a$, et de poles les $\gamma . b$ pour γ décrivant Γ) notée $\theta(a , b ; z)$. Cette fonction est automorphe :

(*) Texte reçu le 6 juillet 1982.

Pierre JARRAUD, UER 47, Mathématiques, Tour 46, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75230 PARIS CEDEX 05.

$$\forall \alpha \in \Gamma, \quad \exists\, c(\alpha) \in K^*, \quad \forall z \in \Omega, \quad \theta(a, b; z) = c(\alpha)\, \theta(a, b; \alpha . z).$$

L'application $\Gamma \to K^*$, $\alpha \mapsto c(\alpha)$, est un morphisme de groupes appelé <u>facteur d'automorphie</u> de θ.

Si $a \in \Omega$ et $\alpha \in \Gamma$, on pose $u_\alpha(z) = \theta(a, \alpha . a; z)$ **c'est une fonction analytique** sur Ω, ne dépendant pas de a sans zéro, et vérifiant

$$u_\alpha(z) . u_\beta(z) = u_{\alpha\beta}(z).$$

On note c_α le facteur d'automorphie de u_α, on a donc $c_\alpha(\beta) = (u_\alpha(z))/(u_\alpha(\beta z))$ et notant $(z_1, z_2; z_3, z_4)$ le birapport

$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4},$$

on a

$$c_\alpha(\beta) = \prod_{\gamma \in \Gamma} (z, \beta z_0; \gamma a, \gamma\alpha a).$$

Enfin si $a \in \Omega$, on note $\bar{a}$ sa classe modulo Γ dans S.

2. La positivité de la matrice des périodes.

(2.1) <u>Définitions.</u> - Pour α et β dans Γ on définit un scalaire de K^* par $Q(\alpha, \beta) = c_\alpha(\beta)$.

Des propriétés rappelées ci-dessus et de l'invariance du birapport de quatre points de $\underset{\sim}{P}^1(K)$ sous $PGL_2(K)$ découle la proposition suivante.

PROPOSITION. - <u>Q est une forme bimultiplicative symétrique.</u>

Donc si α (ou β) est un commutateur $Q(\alpha, \beta) = 1$, et Q induit une forme bimultiplicative (on note $\bar{\Gamma}$ multiplicativement)

$$\bar{\Gamma} \times \bar{\Gamma} \to K^* \quad (\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \mapsto \langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle = Q(\alpha, \beta).$$

(2.2) <u>Définition.</u> - La matrice de $\langle\ ,\ \rangle$ relative à la base $(\gamma_1, \dots, \gamma_g)$ est appelée <u>matrice des périodes.</u>

THÉORÈME (DRINFEL'D). - <u>La forme</u> $v(\langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle)$, $\bar{\Gamma} \times \bar{\Gamma} \to \underset{\sim}{Z}$, <u>est définie positive</u> (i. e. $v(\langle \bar{\alpha}, \bar{\alpha} \rangle) > 0$ si $\bar{\alpha} \in \bar{\Gamma} - \{1\}$).

<u>Démonstration.</u> - On la trouvera dans [6] ou [7].

On introduit l'arbre Δ de $PGL_2(K)$ et Δ_Γ le sous-arbre engendré par les axes des $\gamma \in \Gamma - \{1\}$. Si z_1, z_2, z_3, z_4 sont des bouts de Δ, on montre que $v(z_1, z_2; z_3, z_4)$ est donnée par l'indice de recouvrement des axes $\overrightarrow{z_1 z_2}$ et $\overrightarrow{z_3 z_4}$. Cela permet d'exprimer ensuite $v(\langle \bar{\alpha}, \bar{\alpha} \rangle)$ en fonction d'une forme définie positive sur les 1-cochaînes entières sur $\Delta\Gamma/\Gamma$.

Signalons une démonstration d'inspiration différente dans [2], chapitre 6, § 2.

3. Construction de la jacobienne. - Soit

$$T = \mathrm{Hom}(\Gamma , K^*) = \mathrm{Hom}(\bar{\Gamma} , K^*) \simeq (K^*)^g \text{ par le choix d'une base de } \Gamma$$

$$\Lambda = \{\lambda \in T ; \exists \alpha \in \Gamma , \lambda = c_\alpha \text{ facteur d'automorphie de } u_\alpha\}$$

$$= \{\lambda \in T ; \exists \bar{\alpha} \in \bar{\Gamma} , \forall \gamma \in \Gamma , \lambda(\gamma) = \langle \bar{\gamma} , \bar{\alpha}\rangle \} .$$

(3.1) PROPOSITION. - L'application $\varphi : \bar{\Gamma} \dashrightarrow T$, $\alpha \longmapsto (\gamma \longmapsto \langle\bar{\gamma} , \bar{\alpha}\rangle)$, induit un isomorphisme $\bar{\Gamma} \xrightarrow{\sim} \Lambda$ (et Λ est donc un groupe abélien libre de rang g).

Démonstration. - La bimultiplicativité de $\langle \, , \, \rangle$ fait que Λ est un sous-groupe de T , et φ un homomorphisme. $v(\langle\bar{\alpha} , \bar{\alpha}\rangle) = 0 \Longrightarrow \bar{\alpha} = 1$ donne l'injectivité.

(3.2) PROPOSITION. - Λ est un sous-groupe discret de T .

Démonstration. - Comme Λ est un sous-groupe, il suffit de voir que toute suite convergente est stationnaire. Soit donc $\lambda = \lim_{n\to\infty} \lambda_n$ pour λ et λ_n dans Λ . Il existe un entier n_0 tel que,

$$\forall n \geqslant n_0 , \forall j = 1 , \dots , g , v(\lambda(\gamma_j)) = v(\lambda_n(\gamma_j)) ,$$

d'où par linéarité

$$\forall \gamma \in \Gamma , v(\lambda(\gamma)) = v(\lambda_n(\gamma)) .$$

Prenons des ϵ et ϵ_n dans Γ tels que $\lambda(\gamma) = \langle\bar{\epsilon} , \bar{\gamma}\rangle$, $\lambda_n(\gamma) = \langle\bar{\epsilon}_n , \bar{\gamma}\rangle$, alors

$$\forall n \geqslant n_0 , \forall \gamma \in \Gamma , v(\langle\bar{\epsilon}.\bar{\epsilon}_n^{-1} , \bar{\gamma}\rangle) = 0$$

comme la forme $v(\langle . , . \rangle)$ est non dégénérée, on obtient $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_n$, d'où $\lambda = \lambda_n$ pour $n \geqslant n_0$.

(3.3) PROPOSITION. - $J = T/\Lambda$ a une structure naturelle d'espace analytique rigide (on parle de "tore analytique")

Référence. - C'est une conséquence classique de (3.2) (cf. [1] VI. 4, ou [3] chapitre 3, section (2.4)).

(3.4) THÉORÈME. - J est une variété abélienne (autrement dit, est une variété (algébrique) projective qui est un groupe algébrique).

Démonstration. - Grâce au théorème de positivité (2.2) et à la proposition (3.1), T/Λ est muni d'une polarisation et, comme dans le cas complexe (cf. [4], chapitre 2, § 6), l'algébricité en résulte. Plusieurs approches sont possibles.

(3.4.1) Suivant [10], on construit l'anneau $\mathcal{R}$ des fonctions "théta" associées à Q. On montre que c'est une K-algèbre de type fini, et que $A = \operatorname{Proj} \mathcal{R}$ est un schéma en groupes commutatifs. On construit ensuite une application $\varphi : J \longrightarrow A$, dont on montre que c'est un isomorphisme de groupes.

(3.4.2). Ou bien (cf. [1] VI. 6, et [2]) on remarque que, grâce au théorème d'algébrisation GAGA et au lemme de Chow [9] étendus au cas ultramétrique, il suffit de voir que J est une variété projective (la loi de groupe du tore analytique étant alors automatiquement algébrique par GAGA), et pour cela de prouver que l'on a un plongement de J dans un espace projectif $\underset{\sim}{P}^d$, ce que l'on obtient en construisant des fonctions théta à partir de la polarisation.

4. L'application d'Abel-Jacobi. - Dans ce qui suit, on travaille sur C (sinon il faudrait considérer aussi des extensions finies de K), et on suppose (pour simplifier certaines notations) que le point à l'infini ∞ est dans Ω.

(4.1) Soit a dans Ω ; on note $j(a)$ le facteur d'automorphie de $\theta(a, \infty, z)$ On sait [3], chapitre II, que ce facteur est $\gamma \longmapsto u_\gamma(a)$. Si on remplace a par $\alpha(a)$, $(\alpha \in \Gamma)$, on obtient le facteur

$$\gamma \longmapsto u_\gamma(\alpha a) = u_\gamma(a)\ c_\gamma(\alpha^{-1}) = u_\gamma(a).c_{\gamma^{-1}}(\gamma)$$

grâce à la symétrie de Q donc $j(\alpha a) = j(a) \mod \Lambda$, et l'application

$$j : \quad S = \frac{\Omega}{\Gamma} \longrightarrow J\ , \quad \bar{a} \longmapsto j(a) \mod \Lambda\ ,$$

est bien définie. Elle est analytique puisqu'après le choix de la base $(\gamma_1, \dots, \gamma_g)$ de Γ, $j : \Omega \longrightarrow (C^*)^g$ est donnée par $a \longmapsto (u_1(a), \dots, u_g(a))$ $(u_i = u_{\gamma_i})$. Utilisant GAGA, j peut être algébrisée ; on l'appelle application de Jacobi.

(4.2) On définit ensuite l'application

$$\Phi : \quad S^g \longmapsto J\ , \quad (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_g) \longmapsto \prod_{i=1}^g j(\bar{a}_i)$$

(le tore J est noté multiplicativement), et notant $\mathfrak{S}_g$ le groupe symétrique sur g lettres qui opère sur S^g par permutation des coordonnées et laisse Φ invariant, on a une factorisation

$$\Phi : \quad S^{(g)} = S^g/\mathfrak{S}_g \longrightarrow J\ .$$

Comme tout polynôme symétrique s'exprime en fonction des polynômes symétriques élémentaires, le quotient peut être muni d'une structure naturelle de variété projective. On appelle $S^{(g)}$ la variété des diviseurs effectifs sur S de degré g (il suffit d'identifier le g-uple non ordonné $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_g)$ et la somme $(\bar{a}_1 + \ldots + \bar{a}_g)$

(4.3) THÉORÈME. - Φ est un morphisme birationnel.

Démonstration (cf. [3], chapitre 6, § 3). - On montre d'abord que Φ est bianalytique en dehors d'une hypersurface, puis que les filtres sont des espaces projectifs, l'égalité des dimensions fait que Φ est génériquement injective. A partir de la matrice des périodes, on construit des séries de Laurent formelles dont la positivité assure la convergence, et on en déduit la surjectivité.

(4.4) On voit aussi que (J, j) vérifie la propriété universelle des jacobiennes (cf. [5], chapitre 2) :

PROPOSITION. - Soit f un morphisme de S dans une variété abélienne A ; il existe un unique homomorphisme $g : J \longrightarrow A$, et une constante c tels que $f = g.j + c$.

Démonstration. - Soit $\varphi : S^g \longrightarrow A$, $(a_1, \ldots, a_g) \longmapsto \sum_{i=1}^{g} f(a_i)$ comme A est commutatif, φ est invariant sous l'action de $\mathfrak{S}_g$, et induit

$$\tilde{\varphi} : S^{(g)} \longrightarrow A .$$

Soit i l'injection $S \longrightarrow S^{(g)}$, $j \doteq \Phi \circ i$.

En comparant avec Φ^{-1}, on obtient une application rationnelle $\tilde{g} : J \longrightarrow A$ telle que

$$\tilde{g} \circ \Phi \circ i = \tilde{g} \circ j = f .$$

On sait alors ([5] chapitre II, théorème 4) que $\tilde{g}$ est du type $g + c$, où g est un homomorphisme et c une constante.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FRESNEL (J.) et VAN DER PUT (M.). - Géométrie analytique rigide et applications. - Basel, Stuttgart, Birkhäuser, 1981 (Progress in Mathematics).

[2] GERRITZEN (L.). - On non archimedean representations of abelian varieties, Mathematische Annalen, t. 196, 1972, p. 323-346.

[3] GERRITZEN (L.) and VAN DER PUT (M.). - Schottky groups and Mumford curves. - Berlin, Springer-Verlag, 1980 (Lecture Notes in Mathematics, 817).

[4] GRIFFITHS (P.) and HARRIS (J.). - Principles of algebraic geometry. - New York, J. Wiley and Sons, 1978 (Pure and applied Mathematics).

[5] LANG (S.). - Abelian varieties. - New York, Interscience Publishers, 1959 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 7).

[6] MANIN (Ju. I.). - Formes automorphes p-adiques [en russe], Itogi Nauki i Tekhnihi Sovremennye Problemy Mathematiki, t. 3, 1974, p. 5-92 ; et [en anglais] J. Soviet Math., t. 5, 1976, p. 279-333.

[7] MANIN (Ju. I.) and DRINFEL'D (V. G.). - Periods of p-adic Schottky groups, J. für reine und angew. Math., t. 262-263, 1973, p. 239-247.

[8] MUMFORD (D.). - An analytic construction of degenerating curves over complete local fields, Compositio Mathematica, t. 24, 1972, p. 129-174 et p. 239-272.

[9] SERRE (J.-P.). - Géométrie algébrique et géométrie analytique, Annales de l'Institut Fourier, Grenoble, t. 6, 1956, p. 1-42.

[10] TAPIA-RECILLAS (H.). - Ultrametric theta functions and abelian varieties, Nagoya Math. J., t. 69, 1978, p. 65-96.