GROUPE DE TRAVAIL
D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

DANIEL BARSKY

Sur la série d'Iwasawa attachée à un caractère de Dirichlet

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 9, nº 1 (1981-1982), exp. nº 14, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1981-1982__9_1_A8_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
9e année, 1981/82, n° 14, 18 p.
18 janvier et 1er février 1982

SUR LA SÉRIE D'IWASAWA ATTACHÉE À UN CARACTÈRE DE DIRICHLET

par Daniel BARSKY (*)

[Université Paris-7]

Résumé. - En partant de la définition de KUBOTA et LEOPOLDT des fonctions L p-adiques, on donne une construction de la série d'Iwasawa associée. Comme application, on donne une démonstration analytique p-adique du théorème de Ferrero-Washington pour $p = 2$ et pour $p = 3$, sur la nullité de l'invariant $\mu_p(K)$ d'Iwasawa ($p = 2$ ou $p = 3$ seulement) pour un corps abélien, K, sur Q. Cette démonstration est différente de celle de FERRERO et WASHINGTON, et fournit aussi une majoration de l'invariant $\lambda_p(K)$, $p = 2$ ou $p = 3$.

Notations et rappels. - On désigne par p un nombre premier. On pose $q = p$ si $p \neq 2$, et $q = 4$ si $p = 2$. Les notations non définies ci-après sont celles d'AMICE [1], ou IWASAWA [8]. On désigne par $\underset{\sim}{C}_p$ le complété de la clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$; la valeur absolue sur $\underset{\sim}{C}_p$ est notée $|\ |$ et normalisée par $|p| = p^{-1}$.

On désigne par θ un caractère de Dirichlet primitif, pair, de conducteur m ou mq, avec $(m , p) = 1$. On note $\underset{\sim}{\mu}_n$ le groupe des racines p^n-ièmes de l'unité, et $\underset{\sim}{\mu}_n^*$ le groupe des racines primitives p^n-ièmes de l'unité. Soit $\zeta \in \underset{\sim}{\mu}_n^*$, on note π l'unique caractère de Dirichlet de conducteur qp^n et d'ordre p^n, tel que $\pi(1 + mq) = \zeta^{-1}$; c'est un caractère de deuxième espèce au sens d'IWASAWA [8], et tout caractère de Dirichlet χ (pair ou impair) de conducteur mqp^n peut se mettre de manière unique sous la forme $\chi = \theta\pi$ ou bien $\chi\omega = \theta\pi$, où θ est un caractère pair de conducteur m ou mq. ω est le caractère de Teichmüller sur $\underset{\sim}{Z}_p$, et π est un caractère de deuxième espèce de conducteur qp^n et d'ordre p^n (cf. [8]). On pose $\rho_p = qp^{-1/(p-1)}$.

On note $K_\theta = \underset{\sim}{Q}_p[\theta(1) , \theta(2) , \ldots , \theta(mq - 1)]$, on note $\mathcal{O}_\theta$ son anneau des entiers, et M_θ son idéal maximal. On note $s \longrightarrow L_p(s , \theta\pi)$ la fonction L p-adique de Kubota-Leopoldt associée au caractère $\theta\pi$ et définie pour $s \in D(1, \rho_p)^-$, où $D(1 , \rho_p)^- = \{x \in \underset{\sim}{C}_p ; |x - 1| < \rho_p\}$. On pose, si $a \in \underset{\sim}{C}_p$ et $\rho \in \underset{\sim}{R}_+$:

$$D(a , \rho)^+ = \{x \in \underset{\sim}{C}_p ; |x - a| \leq \rho\} , \quad D(a , \rho)^- = \{x \in \underset{\sim}{C}_p ; |x - a| < \rho\} .$$

Rappelons que la série d'Iwasawa $I_\theta(T)$ associée à θ est définie par les conditions suivantes : $(T - mp)\, I_\theta(T)$ est l'unique série de Taylor de $\mathcal{O}_\theta[[T]]$ telle que, pour tout entier $n \geq 0$, pour tout $\zeta \in \bigcup_{n\geq 0} \underset{\sim}{\mu}_n^* = \underset{\sim}{\mu}_{p^\infty}$ et pour tout

---

(*) Texte reçu le 20 septembre 1982.
Daniel BARSKY, UER Mathématiques et Informatique, Université Paris-7, 2 place Jussieu, 75251 PARIS CEDEX 05.

$s \in D(1\ ,\ \rho_p)^-$, on a

$$L_p(s\ ,\ \theta\pi) = I_\theta((1 + mq)^s\ \zeta - 1)\ ,$$

où ζ est l'unique caractère de deuxième espèce associé à π par $\pi(1 + mq) = \zeta^{-1}$.

Nous donnons aux paragraphes 1 et 2 une démonstration de l'existence de $I_\theta(T)$ à partir des formules de Kubota-Leopoldt, qui montre que les deux méthodes exposées dans [8] sont en fait identiques.

Soit K un corps de nombres abélien de degré fini sur $\mathbb{Q}$. Soit $K_\infty = \cup_{n\geq 0} K(\zeta_n)$, où $\zeta_n \in \mu_n^*$, soit $K_n = K(\zeta_n)$. IWASAWA a montré que, si h_n est le nombre de classe de K_n , et si p^{e_n} est la plus grande puissance de p qui divise h_n , il existe des entiers $n_0(K) = n_0$, $\mu_p(K) = \mu_p$, $\lambda_p(K) = \lambda_p$, $\upsilon_p(K) = \upsilon_p$ tels que $e_n = \mu_p\, p^n + \lambda_p\, n + \upsilon_p$ si $n \geq n_0$. Le théorème de Ferrero-Washington affirme que $\mu_p(K) = 0$ (cf. [5]). Soit K_n^+ le sous-corps totalement réel maximal de K_n , soit h_n^+ son nombre de classe, soit $h_n^- = h_n/h_n^+$. On sait que h_n^- est un entier (cf. [6]), et IWASAWA a montré qu'il existe des entiers $n_0(K) = n_0$, $\mu_p^-(K) = \mu_p^-$, $\lambda_p^-(K) = \lambda_p^-$, $\upsilon_p^-(K) = \upsilon_p^-$ tels que, si $p^{e_n^-}$ est la plus grande puissance de p qui divise h_n^- , on ait

$$e_n^- = \mu_p^-\, p^n + \lambda_p^-\, n + \upsilon_p^- \quad \text{si} \quad n \geq n_0 \quad \text{(cf. [8])}.$$

On sait, depuis les travaux de FERRERO (cf. [4]), que $\mu_p^-(K) = 0$, pour tout corps abélien K sur $\mathbb{Q}$, entraîne $\mu_p(K) = 0$, en outre on sait que $\lambda_p(K) \leq 2\lambda_p^-(K)$ (cf. [5]).

Posons, pour un caractère de Dirichlet θ non trivial (primitif, pair de conducteur m ou mq avec $(m\ ,\ p) = 1$)

$$p^{-\mu_\theta} = \sup_{|T|<1} |\tfrac{1}{2}\, I_\theta(T)| = \|\tfrac{1}{2}\, I_\theta\|\ .$$

Nous montrons au paragraphe 3 que, si $p = 2$ ou $p = 3$, $\mu_\theta = 0$ pour tout θ . Il est bien connu que ce résultat entraine le théorème de Ferrero-Washington, pour $p = 2\ ,\ 3$, car $\mu_p^- = \sum_\theta \mu_\theta$, où θ parcourt les caractères primitifs pairs non triviaux de $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ (cf. [3]).

Le principe de la démonstration est le suivant. Toute fonction analytique bornée sur $D(0\ ,\ 1)^-$, $F(T)$, peut s'écrire de manière unique

$$F(T) = \sum_{i\geq 0} ((1 + T)^{p^h} - 1)^i\, F_{h,i}(T)\ ,$$

où $F_{h,i}(T)$ est un polynôme de $\mathbb{C}_p[T]$ de degré $p^h - 1$ au plus, et en outre on a :

$$\sup_{|T|<1} |F(T)| = \sup_{i\geq 0}\, \sup_{|T|<1} |F_{h,i}(T)| = \sup_{h\geq 0}\, \sup_{|T|<1} |F_{h,0}(T)|\ .$$

On écrit donc :

$$I_\theta(T) = \sum_{i\geq 0} ((1+T)^{p^h} - 1)^i \, I_{\theta,h,i}(T) ,$$

où $I_{\theta,h,i}(T) \in \mathbb{C}_p[T]$, de degré $p^h - 1$ au plus. On calcule alors directement $I_{\theta,h,0}(T)$ et, si $p = 2$, 3 , on peut montrer que $\sup_{|T|<1} |\frac{1}{2} I_{\theta,h,0}(T)| = 1$ pour h assez grand. Si $p \neq 2$ ou 3 , la même démonstration montre qu'en fait, il existe toujours au moins un entier $2j$, $0 \leq 2j \leq p-3$, tel que

$$\sup_{|T|<1} |\tfrac{1}{2} I_{\theta\omega} - 2j(T)| = 1 ,$$

ce qui permet d'espérer un résultat plus général en p . On notera, pour toute fonction analytique bornée, F , sur $D(0 , 1)^-$: $\|F\| = \sup_{|T|<1} |F(T)|$. Si $a \in \mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p$, on notera $\langle a \rangle = a/\omega(a)$ (cf. [8]).

1. Existence de la série d'Iwasawa attachée à un caractère de Dirichlet.

Dans ce paragraphe et dans les suivants, on note ε le caractère trivial. Soit f un entier positif $(\neq 0)$. On note $(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^*$ l'ensemble des éléments inversibles $\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$ pour la multiplication.

LEMME 1. - Pour tout entier $h \geq 0$, pour tout entier $m \geq 1$ premier à p , on a

$$(\mathbb{Z}/mqp^h\mathbb{Z})^* \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^* \times \left(\frac{1+q\mathbb{Z}}{1+qp^h\mathbb{Z}}\right) \simeq (\mathbb{Z}/mq\mathbb{Z})^* \times \left(\frac{1+q\mathbb{Z}}{1+qp^h\mathbb{Z}}\right) .$$

Pour la démonstration, voir [6] ou [8].

LEMME 2. - Soit χ un caractère de Dirichlet de conducteur m ou mqp^n , avec $(m , p) = 1$ et $n \geq 0$, alors χ est de manière unique le produit d'un caractère de première espèce de conducteur m ou mq et d'un caractère de deuxième espèce π , de conducteur qp^n et d'ordre p^n , défini par la condition

$$\chi(1+mq) = \pi(1+mq) = \zeta^{-1} , \text{ où } \zeta \in \mu_n^* .$$

Pour la démonstration, voir [6] ou [8].

LEMME 3. - Soit $\zeta \in \mu_n^*$, soit m un entier positif non nul premier à p . Soit π l'unique caractère de 2-ième espèce d'ordre p^n et de conducteur qp^n tel que $\pi(1+mq) = \zeta^{-1}$. Alors, pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$ premier à p , on a :

$$\pi(a) = \zeta^{\psi(a)} \quad \text{où} \quad \psi(a) = -\frac{\log\langle a\rangle}{\log(1+mq)} .$$

Dans la formule précédente les log sont à prendre au sens p-adiques (cf. [1], [8] ou [10]). La formule $\pi(a) = \zeta^{\psi(a)}$ est à prendre au sens suivant :

$$\zeta^{\psi(a)} = \sum_{k\geq 0} (\zeta - 1)^k \binom{\psi(a)}{k} ;$$

la série du second membre converge p-adiquement, car $\psi(a) \in \underset{\sim}{Z}_p$ et donc $|\binom{\psi(a)}{k}| \leqslant 1$, et il est bien connu que, si $\zeta \in \underset{\sim}{\mu}_n^*$, on a

$$|\zeta - 1| = p^{-1/(p-1)p^{n-1}} \quad (\text{cf. [1] ou [10]}).$$

On sait que si a et b appartiennent à $\underset{\sim}{Z} - p\underset{\sim}{Z}$,

$$|\psi(a) - \psi(b)| = |\frac{\langle a\rangle - \langle b\rangle}{\log(1 + mq)}| \ .$$

Donc $|a - b| \leqslant q^{-1} p^{-n}$ entraîne $|\psi(a) - \psi(b)| \leqslant p^{-n}$, car $|\log(1 + mq)| = q^{-1}$. Et par conséquent, $|a - b| \leqslant q^{-1} p^{-n}$ implique $\zeta^{\psi(a)} = \zeta^{\psi(b)}$. En outre, si a et b appartiennent à $\underset{\sim}{Z} - p\underset{\sim}{Z}$, on a $\psi(ab) = \psi(a) + \psi(b)$, donc

$$\zeta^{\psi(ab)} = \zeta^{\psi(a)} \zeta^{\psi(b)}$$

et enfin $\zeta^{\psi(1+mq)} = \zeta^{-1}$. Ces remarques suffisent à prouver que, si l'on pose par convention $\zeta^{\psi(a)} = 0$ pour $a \in p\underset{\sim}{Z}$, on a $\zeta^{\psi(a)} = \pi(a)$.

LEMME 4. - Soit $r_h = p^{-1/(p-1)p^h}$, $h \in \underset{\sim}{N}$. Si $|T| = \rho < r_h$, alors

$$|\log(1 + T)| \leqslant \varepsilon(\rho)\ p^h\ p^{-1/(p-1)} \ , \ \text{avec}\ \ 0 \leqslant \varepsilon(\rho) < 1 \ \ \text{et}\ \ \lim_{\rho\to r_h} \varepsilon(\rho) = 1 \ .$$

Pour la démonstration, voir [1] ou [10].

LEMME 5. - Si $n = n_0 + n_1 p + \dots + n_i p^i$ avec $0 \leqslant n_k \leqslant p - 1$ pour $0 \leqslant k \leqslant i$, on pose

$$\mathrm{Schiff}_p(n) = n_0 + n_1 + \dots + n_i \ .$$

On a

$$n! = p^{-v(n!)} \quad \text{avec} \quad v(n!) = \frac{n - \mathrm{Schiff}_p(n)}{p - 1} \ .$$

Si $p - 1$ divise n , alors $p - 1$ divise $\mathrm{Schiff}_p(n)$.

La formule donnant $v_p(n!)$ est bien connue (cf. [1] ou [10]), le reste est évident.

Rappelons (cf. [3]) que l'on sait, depuis les travaux de KUBOTA et LEOPOLDT, que, pour tout caractère de Dirichlet χ , primitif de conducteur f , il existe une unique fonction méromorphe sur $D(1 , \rho_p)^-$: $s \dashrightarrow L_p(s , \chi)$, non identiquement nulle si, et seulement si, χ est pair, telle que

$$sL_p(s + 1 , \chi) = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{fp^h} \sum\nolimits'^{\,fp^h-1}_{a=0} \chi(a)\langle a\rangle^{-s} ,$$

où $\sum'_a$ désigne une sommation sur des entiers premiers à p , la limite est, bien entendu, une limite au sens p-adique.

PROPOSITION 1. - Soit θ un caractère de Dirichlet pair de conducteur m ou mq. Il existe une unique fonction analytique sur $D(0\ ,\ 1)^-$, $G_\theta(T) \in K_\theta[[T]]$, telle que : pour tout entier $n \geq 0$, pour tout $\zeta \in \mu_n^*$, pour tout $s \in D(1\ ,\ \rho_p)^-$, on a

$$G_\theta((1 + mq)^s \zeta - 1) = sL_p(s + 1\ ,\ \theta\pi)\ ,$$

où π est l'unique caractère de deuxième espèce de conducteur qp^n et d'ordre p^n tel que $\pi(1 + mq) = \zeta^{-1}$. En outre, si r_h est défini comme au lemme 4, on a

$$\sup_{|T|<r_h} |G_\theta(T)| \leq qp^h\, p^{-1/(p-1)}\ .$$

Enfin, si $|T| < r_h$, on a

$$G_\theta(T) = - \sum_{k\geq 0} (mqp^h)^{k-1} \binom{\psi(1 + T)}{k} B_k \sum_{a=0}^{\prime\, mqp^h-1} \theta(a)\ a^{-k}(1 + T)^{\psi(a)}\ ,$$

où B_k est le k-ième nombre de Bernoulli.

Dans toute la suite de l'exposé, on notera par $\sum_a'$ une sommation sur les entiers a, premiers à p. On sait (cf. [3] ou [11]) que, si $h \geq n \geq 0$ et si $s \in D(1,\rho_p)^-$, on a

$$sL_p(s + 1\ ,\ \theta\pi) = - \sum_{k\geq 0} (mqp^h)^{k-1} \binom{-s}{k} B_k \sum_{a=0}^{\prime\, mqp^h-1} \theta\pi(a)\ a^{-k}\langle a\rangle^{-s}\ .$$

D'après le lemme 3, on a

$$\pi(a) = \zeta^{\psi(a)} \quad \text{où} \quad \zeta \in \mu_n^* \quad \text{et} \quad \pi(1 + mq) = \zeta^{-1}\ .$$

On a aussi, si $s \in D(1\ ,\ \rho_p)^-$, $\langle a\rangle^{-s} = (1 + mq)^{s\psi(a)}$. Donc

$$sL_p(s + 1\ ,\ \theta\pi) = - \sum_{k\geq 0} (mqp^h)^{k-1} \binom{-s}{k} B_k \sum_{a=0}^{\prime\, mqp^h-1} \theta(a)\ a^{-k}((1 + mq)^s\, \zeta)^{\psi(a)}\ .$$

Considérons la série obtenue par le changement de variable $1 + T = (1 + mq)^s \zeta$, qui implique que $|T| < r_h$ si $s \in D(1\ ,\ \rho_p)^-$ et $\zeta \in \mu_n^*$ avec $n \leq h$. Il vient

$$G_{\theta,h}(T) = - \sum_{k\geq 0} (mqp^h)^{k-1} \binom{\psi(1 + T)}{k} B_k \sum_{a=0}^{\prime\, mqp^h-1} \theta(a)\ a^{-k}(1 + T)^{\psi(a)}\ ,$$

ceci définit $G_{\theta,h}(T)$. Nous allons montrer que la série du second membre converge pour $|T| < r_h$, et définit sur $D(0\ ,\ r_h)^-$ une fonction analytique. Soit $\rho < r_h$ et soit T tel que $|T| = \rho$. Avec les notations du lemme 4, et grâce au lemme 5, on a

$$(1)\qquad |(\psi(\tfrac{1+T}{k}))| \leqslant \begin{cases} \varepsilon(\rho)^k\ (qp^h)^k\ p^{-1/(p-1)} & \text{si } p-1 \text{ ne divise pas } k\,, \\ \varepsilon(\rho)^k\ (qp^h)^k\ p^{-1} & \text{si } p-1 \text{ divise } k\,. \end{cases}$$

Il est bien connu (cf. [8]) que

$$(2)\qquad |B_k| \begin{cases} \leqslant 1 & \text{si } p-1 \text{ ne divise pas } k\,, \\ = p & \text{si } p-1 \text{ divise } k\,. \end{cases}$$

Enfin, si $T < r_h$ on a

$$(3)\qquad |{\textstyle\sum'}_{a=0}^{mqp^h-1}\ \theta(a)\ a^{-k}(1+T)^{\psi(a)}| \leqslant 1\,.$$

Les inégalités (1), (2), (3) suffisent alors à montrer la convergence pour $|T|<r_h$ de la série qui définit $G_{\theta,h}(T)$. Ces inégalités montrent en outre que

$$\sup_{|T|<r_h} |G_{\theta,h}(T)| \leqslant qp^h\ p^{-1/(p-1)}\ .$$

Il est évident, par construction, que, si $\zeta \in \underset{\sim}{\mu}_n^*$ avec $n \leqslant h$, et si $s \in D(1,\rho_p)^-$, on a

$$G_{\theta,h}((1+mq)^s\ \zeta - 1) = sL_p(s+1\ ,\ \theta\pi)\ .$$

Donc toutes les fonctions analytiques $G_{\theta,h}(T)$, $h \in \underset{\sim}{N}$, coincident sur $D(0\ ,\ r_0)^-$. Par conséquent, si $h' > h$, $G_{\theta,h'}(T)$ est le prolongement analytique de $G_{\theta,h}(T)$ à $D(0\ ,\ r_{h'})^- \supset D(0\ ,\ r_h)^-$. D'après le principe du prolongement analytique (cf. [1]), il existe une unique fonction analytique $G_\theta(T)$ sur $D(0\ ,\ 1)^-$ telle que la restriction de $G_\theta(T)$ à $D(0\ ,\ r_h)^-$ coincide avec $G_{\theta,h}(T)$, d'où la proposition.

COROLLAIRE 1. - Si $T \in D(0\ ,\ 1)^-$,

$$G_\theta(T) = \lim_{h\to\infty} \frac{-1}{mqp^h} {\textstyle\sum'}_{a=0}^{mqp^h-1}\ \theta(a)(1+T)^{\psi(a)}\ .$$

Rappelons (cf. [8]) que l'on a uniformément en k

$$B_k = \lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{p^\ell} \sum_{b=0}^{p^\ell-1} b^k\ .$$

Donc, si $|T| < r_h$,

$$G_\theta(T) = G_{\theta,h}(T)$$

$$= \lim_{\ell\to\infty} \frac{-1}{mqp^{h+\ell}} \sum_{b=0}^{p^\ell-1} {\sum_{a=0}^{mqp^h-1}}' \theta(a)(1+T)^{\psi(a)} \sum_{k\geq 0} (mqp^h \tfrac{b}{a})^k \binom{\psi(1+T)}{k} .$$

Or, si $|T| < r_h$,

$$\sum_{k\geq 0} (mqp^h \tfrac{b}{a})^k \binom{\psi(1+T)}{k} = (1 + mqp^h \tfrac{b}{a})^{\psi(1+T)} = (1+T)^{\psi(a+mqp^h b)-\psi(a)} .$$

Par conséquent, si $|T| < r_h$,

$$G_\theta(T) = G_{\theta,h}(T) = \lim_{\ell\to\infty} \frac{-1}{mqp^{h+\ell}} \sum_{b=0}^{p^\ell-1} {\sum_{a=0}^{mqp^h-1}}' \theta(a)(1+T)^{\psi(a+mqp^h b)}$$

$$= \lim_{\ell\to\infty} \frac{-1}{mqp^{h+\ell}} {\sum_{a=0}^{mqp^{h+\ell}-1}}' \theta(a)(1+T)^{\psi(a)} .$$

PROPOSITION 2. -- <u>La fonction</u>

$$J_\theta(T) = \frac{\log(1+mq)}{\log(1+T)} G_\theta(T)$$

<u>est une fonction méromorphe sur</u> $D(0\,,1)^-$ <u>ayant au plus un pôle simple pour</u> $T=0$. <u>En outre,</u> J_θ <u>vérifie les propriétés suivantes :</u>

(i) <u>Si</u> θ <u>est non trivial,</u> $J_\theta(T)$ <u>est analytique sur</u> $D(0\,,1)^-$ <u>et</u> $\sup_{|T|<1} |J_\theta(T)| \leq 1$,

(ii) <u>Si</u> $\theta = \epsilon$, $J_\epsilon(T)$ <u>a un pôle simple pour</u> $T=0$, <u>de résidu</u> $-(1-\frac{1}{p})\log(1+q)$, <u>et</u> $\|TJ_\epsilon(T)\| \leq q^{-1} p$,

(iii) <u>Si</u> $\zeta \in \mu_n^*$, <u>si</u> π <u>est le caractère de deuxième espèce tel que</u> $\pi(1+mq)=\zeta^{-1}$, <u>et si</u> $s \in D(1\,,\rho_p)^-$, <u>on a</u>

$$J_\theta((1+mq)^s \zeta - 1) = L_p(s+1\,,\theta\pi) .$$

Si $n \geq 1$ et si $\zeta \in \mu_n^*$, on a $G_\theta(\zeta - 1) = 0$, en outre, si θ est non trivial, on a aussi $G_\theta(0) = 0$, et si θ est trivial, on a $G_\epsilon(0) = -(1-\frac{1}{p})$. Donc, si θ est non trivial, $G_\theta(T)$ a parmi ses zéros tous ceux de $\log(1+T)$. Par conséquent, dans ce cas, $G_\theta(T)/\log(1+T)$ est une fonction analytique sur $D(0\,,1)^-$. D'après la proposition 1, on a, pour tout $h \geq 0$,

$$\sup_{|T|<r_h} |G_\theta(T) \frac{\log(1+mq)}{\log(1+T)}| \leq 1 \text{ , d'où (i) .}$$

Si $\theta = \epsilon$, alors $\frac{T}{\log(1+T)} G_\epsilon(T)$ est une fonction analytique sur $D(0\,,1)^-$ et, d'après la proposition 1, on a

$$\sup_{|T|<r_h} |TG_\theta(T) \frac{\log(1 + mq)}{\log(1 + T)}| \leqslant q^{-1}\, p \text{ , d'où le (ii).}$$

COROLLAIRE 2. - <u>On pose, pour</u> $h \in \underset{\sim}{N}$ <u>et pour</u> $T \in D(0\ ,\ 1)^-$,

$$F_{\theta,h}(T) = {\sum}'^{\,mqp^h-1}_{a=0}\ \theta(a)(1 + T)^{\psi(a)} \ .$$

<u>Alors</u>

$$J_\theta(T) = \lim_{h\to\infty} - \frac{\log(1 + mq)}{mq}\, ((1 + T)^{p^h} - 1)^{-1}\, F_{\theta,h}(T) \ .$$

Il est clair que $\|F_{\theta,h}\| \leqslant 1$, $\|(1 + T)^{p^h} - 1\| = 1$, et il est évident que $F_{\theta,h}(\zeta) = 0$ si $\zeta \in \underset{\sim}{\mu}_h - \{1\}$. Donc

$$T\, \frac{\log(1 + mq)}{mq}\, ((1 + T)^{p^h} - 1)^{-1}\, F_{\theta,h}(T) = T\tilde{J}_{\theta,h}(T)$$

est une fonction analytique sur $D(0\ ,\ 1)^-$ bornée par 1 sur $D(0\ ,\ 1)^-$. Enfin si $T \notin \underset{\sim}{\mu}_{p^\infty} - \{1\}$, alors $\lim_{h\to\infty} T\tilde{J}_{\theta,h}(T) = TJ_\theta(T)$. Par prolongement analytique, on déduit que cette égalité est encore vraie si $T \in \underset{\sim}{\mu}_{p^\infty} - \{1\}$.

COROLLAIRE 3. - <u>On pose</u>

$$I_\theta(T) = J_\theta\left(\frac{1 + T}{1 + mq} - 1\right) .$$

<u>Alors</u> I_θ <u>est une fonction méromorphe sur</u> $D(0\ ,\ 1)^-$ <u>ayant au plus un pôle simple pour</u> $T = mq$ <u>et telle que</u> :

(i) <u>Pour tout</u> $\zeta \in \mu_{p^\infty}$, <u>pour tout</u> $s \in D(1\ ,\ \rho_p)^-$, <u>on a, si</u> $\pi(1 + mq) = \zeta^{-1}$,

$$I_\theta((1 + mq)^s\, \zeta - 1) = L_p(s\ ,\ \theta\pi) \ ,$$

(ii) <u>Si</u> θ <u>est non trivial,</u> I_θ <u>est analytique sur</u> $D(0\ ,\ 1)^-$ <u>et</u> $\|I_\theta\| \leqslant 1$,

(iii) <u>Si</u> $\theta = \epsilon$, I_ϵ <u>a un pôle simple pour</u> $T = q$ <u>de résidu</u> $\frac{(1+q)(1-p)}{p}\log(1+q)$ et $\|(T - q)\ I_\epsilon(T)\| \leqslant q^{-1}\, p$.

En effet, $I_\theta((1 + mq)^s\, \zeta - 1) = J_\theta((1 + mq)^{s-1}\, \zeta - 1)$ pour tout $s \in D(1\ ,\ \rho_p)^-$ et $\zeta \in \underset{\sim}{\mu}_{p^\infty}$.

PROPOSITION 3. - <u>Soit</u> θ <u>un caractère de Dirichlet de conducteur</u> m <u>ou</u> mq .

(i) <u>Si</u> θ <u>est non trivial, il existe une unique série</u> $I_\theta(T) \in \mathcal{O}_\theta[[T]]$ <u>telle</u> que, pour $\zeta \in \underset{\sim}{\mu}_{p^\infty}$ et pour tout $s \in D(1\ ,\ \rho_p)^-$,

$$I_\theta((1 + mq)^s\, \zeta - 1) = L_p(s\ ,\ \theta\pi) \ ,$$

où π *est le caractère de deuxième espèce défini par* $\pi(1+mq) = \zeta^{-1}$,

(ii) *Si* $\theta = \epsilon$, *il existe une unique série de Laurent* $I_\epsilon(T) \in \mathbb{Q}_p((T))$ *telle que* $(T-q)\, I_\epsilon(T) \in \mathbb{Z}_p[[T]]$, *et pour tout* $\zeta \in \mu_{p^\infty}$, $s \in D(1, \rho_p)^- - \{1\}$,

$$I_\epsilon((1+q)^s \zeta - 1) = L_p(s, \pi) .$$

C'est évident à partir des corollaires 2 et 3.

La série $I_\theta(T)$ est, par définition la série d'Iwasawa attachée au caractère θ (cf. [8]).

Si χ est un caractère de Dirichlet impair de conducteur m ou mq , alors $I_\chi(T) \equiv 0$.

2. Une expression de la série d'Iwasawa.

On notera ϕ l'indicatrice d'Euler, i. e. si $a \in \mathbb{N}^*$, alors $\phi(a)$ est le cardinal de $(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^*$.

LEMME 6. - *Pour tout entier* $h \geqslant 0$, *pour tout entier* k , $0 \leqslant k \leqslant p^h - 1$, *il existe un unique* $\phi(mq)$*-uplet de nombres entiers* (*premiers à* p *et à* m) *tels que, si* a *est un élément de ce* $\phi(mq)$*-uplet, on ait*

(i) $0 \leqslant a \leqslant mqp^h - 1$ *et* $(a, mq) = 1$,

(ii) $|\psi(a) - k| \leqslant p^{-h}$,

(iii) *en outre ce* $\phi(mq)$*-uplet est un système complet de représentants de* $(\mathbb{Z}/mq\mathbb{Z})^*$.

Les affirmations (i) et (ii) découlent immédiatement de l'isomorphisme

$$(\mathbb{Z}/mqp^h\,\mathbb{Z})^* \simeq (\mathbb{Z}/mq\mathbb{Z})^* \times \left(\frac{1+q\mathbb{Z}}{1+qp^h\,\mathbb{Z}}\right) \tag{4}$$

et du fait que l'application $a \dashrightarrow \psi(a)$ est un isomorphisme du groupe multiplicatif $\frac{1+q\mathbb{Z}}{1+qp^h\,\mathbb{Z}}$ sur le groupe additif $\mathbb{Z}/p^h\,\mathbb{Z}$. L'affirmation (iii) découle en fait de (i) et (ii) ou bien de (4).

DÉFINITION 1. - *Soit* h *un entier* $\geqslant 0$ *et* k *un entier,* $0 \leqslant k \leqslant p^h - 1$. *On définit* $\sum_a^{(m,k,h)}$, *comme étant une sommation sur les entiers* a *vérifiant les conditions* (i), (ii) *et* (iii) *du lemme* 6.

PROPOSITION 4. - *Posons, pour tout caractère* θ *primitif pair de conducteur* m *ou* mq *et pour tout entier* $i \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_i(k, h, \theta) = \sum_a^{(m,k,h)} \theta(a) \binom{(\psi(a) - k)/p^h}{i} .$$

<u>Alors, pour tout</u> $i \in \underset{\sim}{N}$, <u>on a</u> $|\varphi_i(k\ ,\ h\ ,\theta)| \leqslant 1$. <u>En outre, si</u> θ <u>est non trivial</u>

$$J_\theta(T) = -\lim_{h\to\infty} \frac{\log(1+mq)}{mq} \sum_{k=0}^{p^h-1} \varphi_1(k\ ,\ h\ ,\ \theta)(1+T)^k .$$

<u>Si</u> $\theta = \varepsilon$

$$J_\varepsilon(T) = \frac{\log(1+mq)}{mq} \{\frac{\alpha(p\ ,\ \varepsilon)}{T} - \lim_{h\to\infty} \sum_{k=0}^{p^h-1} \varphi_1(k\ ,\ h\ ,\ \varepsilon)(1+T)^k\} ,$$

où $\alpha(p\ ,\ \varepsilon) = \begin{cases} 1-p & \text{si } p \neq 2 , \\ -2 & \text{si } p = 2 . \end{cases}$

Par définition de $\sum_a^{(m,k,h)} \theta(a)\ (\binom{\psi(a)}{i} - k)p^{-h})$, on a $\frac{\psi(a)-k}{p^h} \in \underset{\sim}{Z}_p$ (condition (ii) du lemme 6). Ceci implique que $|\varphi_i(k\ ,\ h\ ,\ \theta)| \leqslant 1$ pour tout $i \in \underset{\sim}{N}$. D'après le lemme 6, on peut écrire, avec les notations du corollaire 2,

$$(5)\quad F_{\theta,h}(T) = \sum_{k=0}^{p^h-1} \sum_a^{(m,k,h)} \theta(a)(1+T)^{\psi(a)}$$

$$= \sum_{k=0}^{p^h-1} (1+T)^k \sum_a^{(m,k,h)} \theta(a)(((1+T)^{p^h}-1)+1)^{(\psi(a)-k)p^{-h}}$$

Il vient alors aisément de la formule (5) :

$$F_{\theta,h}(T) = \sum_{i\geqslant 0} ((1+T)^{p^h}-1)^i \sum_{k=0}^{p^h-1} (1+T)^k \varphi_i(k\ ,\ h\ ,\ \theta) ,$$

où la série du second membre converge simplement sur $D(0\ ,\ 1)^-$.

Si θ est non trivial, $\varphi_0(k\ ,\ h\ ,\ \theta) = 0$, et donc, dans ce cas,

$$F_{\theta,h}(T) = ((1+T)^{p^h}-1) \sum_{i\geqslant 1} ((1+T)^{p^h}-1)^{i-1} \sum_{k=0}^{p^h-1} (1+T)^k \varphi_i(k\ ,\ h\ ,\ \theta) .$$

Si $\theta = \varepsilon$, on a $\varphi_0(k\ ,\ h\ ,\ \varepsilon) = p-1$ si $p \neq 2$ (resp. $= 2$ si $p = 2$) , et donc :

$$F_{\varepsilon,h}(T) = ((1+T)^{p^h}-1)\{-\frac{\alpha(p,\varepsilon)}{T} + \sum_{i\geqslant 1} ((1+T)^{p^h}-1)^{i-1} \sum_{k=0}^{p^h-1} (1+T)^k \varphi_i(k,h,\varepsilon)\}.$$

Donc, si l'on pose $\alpha(p\ ,\ \theta) = -\varphi_0(k\ ,\ h\ ,\ \theta)$,

$$J_\theta(T) = \frac{\log(1+mq)}{mq} \{\frac{\alpha(p\ ,\ \theta)}{T} - \sum_{k=0}^{p^h-1} \varphi_1(k\ ,\ h\ ,\ \theta)(1+T)^k\} + E_{\theta,h}(T)((1+T)^{p^h}-1)$$

où $E_{\theta,h}(T) \in \mathcal{O}_\theta[[T]]$. Or, il est bien connu que, pour la topologie de la convergence simple sur $D(0\ ,\ 1)^-$, on a $\lim_{h\to\infty} ((1+T)^{p^h}-1) = 0$ (cf. [2]).

PROPOSITION 5. - <u>Soit</u> θ <u>un caractère de Dirichlet de conducteur</u> m <u>ou</u> mq .

Avec les notations de la proposition 4, on a :

(i) Si θ est non trivial,

$$I_\theta(T) = \lim_{h\to\infty} \sum_{k=0}^{p^h-1} (1+T)^k \sum_a^{(m,k,h)} \theta(a) \frac{\langle a\rangle - (1+mq)^{-k}}{mqp^h}$$

(ii) Si $\theta = \epsilon$,

$$I_\epsilon(T) = \frac{\log(1+q)}{q} \frac{(1+q)\,\alpha(p,\epsilon)}{T-q} + \lim_{h\to\infty} \sum_{k=0}^{p^h-1} (1+T)^k \sum_a^{(1,k,h)} \frac{\langle a\rangle - (1+q)^{-k}}{qp^h}$$

On a montré, à la proposition 3, qu'il existe une unique fonction analytique bornée sur $D(0,1)^-$:

$$I_\theta^*(T) = I_\theta(T) - \frac{\log(1+mq)}{mq} \frac{(1+mq)\,\alpha(p,\theta)}{T-mq},$$

telle que, pour tout $s \in D(1,\rho_p)^-$, pour tout $\zeta \in \mu_{p^\infty}$, si $\pi(1+mq) = \zeta^{-1}$,

$$I_\theta^*((1+mq)^s\zeta - 1) = L_p(s,\theta\pi) - \frac{\log(1+mq)}{mq} \frac{(1+mq)\,\alpha(p,\theta)}{(1+mq)^s\zeta - 1 - mq}.$$

Posons alors :

$$I_{\theta,h}^*(T) = \sum_{k=0}^{p^h-1} (1+T)^k \sum_a^{(m,k,h)} \theta(a) \frac{\langle a\rangle - (1+mq)^{-k}}{mqp^h}.$$

Par définition de $\sum_a^{(m,k,h)}$,

$$\left|\sum_a^{(m,k,h)} \theta(a) \frac{\langle a\rangle - (1+mq)^{-k}}{mqp^h}\right| \leqslant 1.$$

D'après la définition de Kubota-Leopoldt des fonctions L p-adiques, on a, si $\zeta \in \mu_h$, et si π est le caractère de deuxième espèce tel que $\pi(1+mq) = \zeta^{-1}$:

$$I_{\theta,h}^*(\zeta-1) = L_p(0,\theta\pi), \text{ si } \theta \neq \epsilon.$$

Si $\theta = \epsilon$:

$$I_{\epsilon,h}^*(\zeta-1) = \sum_{k=0}^{p^h-1} \zeta^k \sum_a^{(1,k,h)} \frac{\langle a\rangle - (1+q)^{-k}}{qp^h} = L_p(0,\pi) + \frac{\alpha(p,\epsilon)}{qp^h} \frac{1-(1+q)^{-p^h}}{1-\zeta/(1+q)}$$

Donc, pour $\zeta \in \mu_{p^\infty}$,

$$\lim_{h\to\infty} I_{\epsilon,h}^*(\zeta-1) = L_p(0,\pi) - \frac{\alpha(p,\epsilon)}{q} \frac{\log(1+q)}{\zeta-1-q} = I_\epsilon^*(\zeta-1).$$

Ceci entraîne, d'après [2] ou d'après [1] (lemme 4.4.2) :

$$I_\theta^*(T) = I_{\theta,h}(T) + ((1+T)^{p^h} - 1)\,\mathfrak{J}_{\theta,h}(T) \ , \quad \text{si} \quad \theta \neq \varepsilon \ ,$$

avec $\|\mathfrak{J}_{\theta,h}\| \leq \|I_\theta^*\|$ et $\mathfrak{J}_{\theta,h}(T) \in K_\theta[[T]]$, et si $\theta = \varepsilon$, pour tout $n \geqslant 0$,

$$I_\varepsilon^*(T) = \lim_{h\to\infty} I_{\varepsilon,h}^*(T) + ((1+T)^{p^h} - 1)\,\mathfrak{J}_{\varepsilon,n}(T)$$

avec $\|\mathfrak{J}_{\varepsilon,n}\| \leq \|\mathfrak{J}_\varepsilon^*\|$ et $\mathfrak{J}_{\varepsilon,n}(T) \in \mathbb{Q}_p[[T]]$. D'où la proposition, car

$$\lim_{h\to\infty}((1+T)^{p^h} - 1) = 0 \quad \text{si} \quad |T| < 1 \ .$$

3. Première application : Nullité de μ_p pour $p = 2$ et $p = 3$.

Nous allons démontrer directement par une étude des coefficients de son développement, comme à la proposition 5, que $\|\frac{1}{2} I_\theta\| = 1$ si $p = 2$ ou 3 . Ceci repose sur la proposition suivante qui nous sera utile ultérieurement aussi. En fait, on peut donner une présentation un peu moins calculatoire de la nullité de μ_p en perdant les majorations effectives sur λ_p (cf. la remarque à la fin du paragraphe

PROPOSITION 6. - *Soit $F(T)$ une fonction analytique bornée sur $D(0\ ,\ 1)^-$. Pour tout entier $h \geqslant 0$, il existe une unique écriture de $F(T)$ sous la forme*

$$F(T) = \sum_{i\geqslant 0} ((1+T)^{p^h} - 1)^i\, F_{i,h}(T) \ , \tag{6}$$

où $F_{i,h}(T)$ est un polynôme de $\mathbb{C}_p[T]$, de degré $p^h - 1$ au plus. En outre, on a

$$\|F\| = \sup_{i\geqslant 0} \|F_{i,h}\| = \sup_{h\geqslant 0} \|F_{0,h}\| \ .$$

La série du second membre de (6) converge simplement sur $D(0\ ,\ 1)^-$ et uniformément sur $D(0\ ,\ \rho)^+$ pour tout ρ , $0 < \rho < 1$.

On sait (cf. [2] ou [1] (lemme 4.4.2)) que toute fonction analytique bornée sur $D(0\ ,\ 1)^-$, $F(T) \in \mathbb{C}_p[[T]]$, peut s'écrire de manière unique

$$F(T) = F_{0,h}(T) + ((1+T)^{p^h} - 1)\, G_{1,h}(T) \ ,$$

où $F_{0,h}(T) \in \mathbb{C}_p[T]$ est de degré $p^h - 1$ au plus, et où $G_{1,h}(T) \in \mathbb{C}_p[[T]]$, et enfin

$$\|F\| = \sup(\|F_{0,h}\| \ , \ \|G_{1,h}\|) \ .$$

On peut définir par récurrence une suite de polynômes $F_{1,h}(T) \in \mathbb{C}_p[T]$, de degré $p^h - 1$ au plus, et une suite de fonctions analytiques (bornées) $G_{i+1,h}(T) \in \mathbb{C}_p[[T]]$

par

$$G_{i,h}(T) = F_{i,h}(T) + ((1 + T)^{p^h} - 1)\, G_{i+1,h}(T) \ , \quad G_{0,h}(T) = F(T) \ .$$

On montre alors par récurrence que

$$\|F_{i,h}\| \leqslant \|G_{i,h}\| \leqslant \|F\| \ , \quad \|G_{i+1,h}\| \leqslant \|G_{i,h}\| \leqslant \|F\| \ .$$

Si $|T| = \rho < 1$, $|(1 + t)^{p^h} - 1| \leqslant \sup_{0 \leqslant i \leqslant h}(p^{-i}\, \rho^{p^{h-i}})$. Donc la série

$$\sum_{i \geqslant 0} ((1 + T)^{p^h} - 1)^i \, F_{i,h}(T)$$

converge sur $D(0 \, , \rho)^+$, uniformément, pour tout ρ , $0 < \rho < 1$. Elle définit une fonction analytique bornée $f(T)$, sur $D(0 \, , 1)^-$. On a pour tout $i \in \underset{\sim}{N}$ et pour tout $\zeta \in \underset{\sim}{\mu}_{p^\infty}$:

$$\left|\frac{d^i}{dT^i}\, (f(T) - F(T))\right|_{T=\zeta} = 0 \ .$$

Ceci entraîne que $f(T) \equiv F(T)$. Supposons que $r_{h-1} < \rho < 1$, alors

$$\sup_{|T|<\rho} |(1 + T)^{p^h} - 1| = \rho^{p^h} \ .$$

Donc :

$$\sup_{|T|<\rho} |F(T)| \leqslant \sup_{i \geqslant 0}\{\rho^{ip^h} \sup_{|T|<\rho} |F_{i,h}(T)|\} \ .$$

En faisant tendre ρ vers 1 , il vient $\|F\| \leqslant \sup_{i \geqslant 0} \|F_{i,h}\|$, et comme on a vu que $\|F_{i,h}\| \leqslant \|F\|$, on a bien $\|F\| = \sup_{i \geqslant 0} \|F_{i,h}\|$. Remarquons que, si $0 < \rho < 1$,

$$\lim_{h \to \infty} \sup_{|T|<\rho} |(1 + T)^{p^h} - 1| = 0$$

d'où l'on tire

$$\sup_{|T|<\rho} |F(T)| \leqslant \lim_{h \to \infty} \sup_{|T|<\rho} |F_{0,h}(T)| \ ,$$

et en faisant tendre ρ vers 1 il vient $\|F\| \leqslant \lim_{h \to \infty} \|F_{0,h}\|$. La même remarque que ci-dessus permet de conclure que $\|F\| = \lim_{h \to \infty} \|F_{0,h}\|$.

DÉFINITION 2. - Soit m un entier strictement positif, premier à p . On note $\tilde{\tilde{\sum}}_a^{(m,k,h)}$ (ou $\tilde{\tilde{\sum}}_a$ si aucune confusion n'est à craindre) une sommation sur les entiers a tels que :

(i) $0 \leqslant a \leqslant qp^h - 1$, $(a \, , p) = 1$,

(ii) $\left|\frac{\log \langle a \rangle}{\log(1 + mq)} + k\right| \leqslant p^{-h}$.

Les a satisfaisant (i) et (ii) forment un système complet de représentant de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$.

DÉFINITION 3. - Soit m un entier > 0, premier à p. On note $\tilde{\sum}_a^{(m,k,h)}$ (ou $\tilde{\sum}_a$ si aucune confusion n'est à craindre) une sommation sur les entiers vérifiant les conditions (i) et (ii) de la définition 2 et, en outre,

(iii) $\qquad \omega(a) \equiv 1, \dots, \frac{p-1}{2} \mod p\mathbb{Z}_p$ si $p \neq 2$

(resp. $\omega(a) = 1$ si $p = 2$).

Remarquons que $\tilde{\tilde{\sum}}_a^{(m,k,h)}$ est différent en général de $\sum_a^{(1,k,h)}$ si $m \neq 1$ à cause de la condition (ii).

DÉFINITION 4. - Si $a \in \mathbb{Z}$ et si m est un entier > 0, premier à p, on note $\bar{a}$ le plus petit résidu de a mod $m\mathbb{Z}$, positif ou nul.

LEMME 7. - On pose, pour tout caractère de Dirichlet θ, primitif, pair, de conducteur m ou mq avec $m > 1$, $\theta = \theta^* \omega^{\ell}$, où θ^* est primitif de conducteur m.

Si h est un entier tel que $qp^h \equiv 1 \mod m\mathbb{Z}$.

$$\sum_a^{(m,k,h)} \theta(a) \frac{\langle a\rangle - (1+mq)^{-k}}{mqp^h}$$
$$= 2 \tilde{\sum}_a^{(m,k,h)} \frac{\omega^{\ell-1}(a)}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \overline{(a+j)}\, \theta^*(a+j)$$
$$+ 2\theta^*(-1) \tilde{\sum}_a^{(m,k,h)} \omega^{\ell-1}(a)(\theta^*(\bar{1}) + \dots + \theta^*(\bar{a})) .$$

Si $\left|\frac{\log \langle a\rangle}{\log(1+mq)} + k\right| \leqslant p^{-h}$, $h \geqslant 0$; alors pour tout entier j,

$$\left|\frac{\log \langle a + jqp^h\rangle}{\log(1+mq)} + k\right| \leqslant p^{-h} .$$

En effet :

$$\frac{\log \langle a + jqp^h\rangle}{\log(1+mq)} = \frac{\log \langle a\rangle}{\log(1+mq)} + \frac{\log(1 + jqp^h/a)}{\log(1+mq)}$$
$$= \frac{\log \langle a\rangle}{\log(1+mq)} + \frac{jqp^h}{a \log(1+mq)} - \frac{(jqp^h)^2}{2a^2 \log(1+mq)} + \dots$$

On pose :

$$\sum_a^{(m,k,h)} \theta(a) \frac{\langle a\rangle - (1+mq)^{-k}}{mqp^h} = b_{k,h,0}(\theta) .$$

On a donc :

$$b_{k,h,0}(\theta) = \tilde{\tilde{\sum}}_a^{(m,k,h)} \frac{\omega^{\ell-1}(a)}{mqp^h} \sum_{j=0}^{m-1} (a + jqp^h)\, \theta^*(a + jqp^h) .$$

Or $\sum_{j=0}^{m-1} \theta^*(a + jqp^h) = 0$, donc

$$b_{k,h,0}(\theta) = \tilde{\tilde{\sum}}_a \frac{\omega^{\ell-1}(a)}{m} \sum_{j=0}^{m-1} j\theta^*(a + jqp^h)$$

$$= \tilde{\sum}_a \left\{\frac{\omega^{\ell-1}(a)}{m} \sum_{j=0}^{m-1} j\theta^*(a + jqp^h) + \frac{\omega^{\ell-1}(qp^h - a)}{m} \sum_{j=0}^{m-1} j\theta^*(qp^h - a + jqp^h)\right\} ,$$

car $\left|\frac{\log \langle a\rangle}{\log(1 + mq)} + k\right| \leq p^{-h}$ entraîne $\left|\frac{\log \langle qp^h - a\rangle}{\log(1 + mq)} + k\right| \leq p^{-h}$. Or

$$\sum_{j=0}^{m-1} j\theta^*(qp^h - a + jqp^h) = \sum_{j=1}^{m} (m - j)\, \theta^*(qp^h - a + (m - j)\, qp^h) .$$

Par conséquent,

$$b_{k,h,0}(\theta) = \tilde{\sum}_a \frac{\omega^{\ell-1}(a)}{m} \left\{\sum_{j=0}^{m-1} j\theta^*(a + jqp^h)\right.$$

$$\left. + \theta^* \omega^{\ell-1}(- 1) \sum_{j=1}^{m} (- j)\, \theta^*(a + (j - 1)\, qp^h)\right\}$$

$$b_{k,h,0}(\theta) = \tilde{\sum}_a \frac{\omega^{\ell-1}(a)}{m} \left\{\sum_{j=0}^{m-1} j\theta^*(a + jqp^h)\right.$$

$$\left. - \theta^* \omega^{\ell-1}(- 1) \sum_{j=0}^{m-1} j\theta^*(a + jqp^h)\right\} .$$

Or θ est un caractère pair par hypothèse, donc $\omega^{\ell-1}\theta^*(- 1) = - 1$, et par

$$b_{k,h,0}(\theta) = 2 \tilde{\sum}_a \frac{\omega^{\ell-1}(a)}{m} \sum_{j=0}^{m-1} j\theta^*(a + jqp^h) .$$

Supposons maintenant que $qp^h \equiv 1 \mod m\underset{\sim}{Z}$. Il vient alors

$$b_{k,h,0}(\theta) = 2 \tilde{\sum}_a \frac{\omega^{\ell-1}(a)}{m} \sum_{j=0}^{m-1} j\theta^*(a + j)$$

$$= 2 \tilde{\sum}_a \frac{\omega^{\ell-1}(a)}{m} \sum_{j=0}^{m-1} (\overline{j + a})\, \theta^*(j + a) .$$

Or si l'on pose $a + j = (\overline{a + j}) + \lambda_a(j)\, m$, on a

$$\lambda_a(\bar{0}) = \dots = \lambda_a(\overline{m - a - 1}) = \lambda_a(\overline{m - a}) - 1 = \dots = \lambda_a(\overline{m - 1}) - 1 .$$

Donc

$$b_{k,h,0}(\theta) = 2 \tilde{\sum}_a \frac{\omega^{\ell-1}(a)}{m} \sum_{j=0}^{m-1} ((\overline{a + j}) + \lambda_a(j)\, m)\, \theta^*(a + j) ,$$

$$b_{k,h,0}(\theta) = 2 \tilde{\sum}_a \frac{\omega^{\ell-1}(a)}{m} \sum_{j=0}^{m-1} (\overline{a + j})\, \theta^*(a + j) - 2 \tilde{\sum}_a \omega^{\ell-1}(a) \sum_{j=\overline{m-a}}^{m-1} \theta^*(j + a) ,$$

$$b_{k,h,0}(\theta) = 2 \tilde{\sum}_a \frac{\omega^{\ell-1}(a)}{m} \sum_{j=0}^{m-1} (\overline{a + j})\, \theta^*(a + j) - 2 \tilde{\sum}_a \omega^{1-1}(a) \sum_{j=0}^{\overline{m-1-a}} \theta^*(j) ,$$

$$b_{k,h,0}(\theta) = 2 \tilde{\sum}_a \frac{\omega^{\ell-1}(a)}{m} \sum_{j=0}^{m-1} (\overline{a + j})\, \theta^*(a + j) + 2\theta^*(- 1) \tilde{\sum}_a \omega^{\ell-1}(a) \sum_{j=1}^{\bar{a}} \theta^*(j) .$$

THÉORÈME 1. - Si $p = 2$ et si θ est un caractère de Dirichlet primitif pair de conducteur m ou $4m$ avec $(2, m) = 1$, on a

$$\|I_\theta/2\| = 1 \quad (\theta \text{ non trivial}) .$$

Posons

$$b_{k,h,0}(\theta) = \sum_a^{(m,k,h)} \theta(a) \frac{\langle a\rangle - (1 + 4m)^{-k}}{4.2^h m} ,$$

on sait, d'après les propositions 5 et 6, que

$$\|I_\theta\| = \lim_{h\to\infty} \sup_{0\leq k\leq 2^h-1} |b_{k,h,0}(\theta)| .$$

Il découle du lemme 7 que, si $4.2^h \equiv 1 \mod m\underset{\sim}{Z}$, on a

$$\sup_{0\leq k\leq 2^h-1} |b_{k,h,0}(\theta)| \leq 1/2 .$$

Donc, pour montrer le théorème, il suffit de montrer que, pour h assez grand vérifiant $4.2^h \equiv 1 \mod m\underset{\sim}{Z}$, on a

$$\sup_{0\leq k\leq 2^h-1} |b_{k,h,0}(\theta)| = 1/2 .$$

Comme $(\underset{\sim}{Z}/4\underset{\sim}{Z}) \simeq \{+1, -1\}$, on a, si $4.2^h \equiv 1 \mod m\underset{\sim}{Z}$,

$$b_{k,h,0}(\theta) = 2\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\overline{a+j})\ \theta^*(a+j)}{m} + 2\theta^*(-1) \sum_{j=1}^{\bar{a}} \theta^*(j) .$$

Donc, pour montrer le théorème, il suffit de montrer que, si $4.2^h \equiv 1 \mod m\underset{\sim}{Z}$, on a

$$\sup_{0\leq k\leq 2^h-1} \left|\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\overline{a+j})\ \theta^*(a+j)}{m} + \theta^*(-1) \sum_{j=1}^{\bar{a}} \theta^*(j)\right| = 1 .$$

Or il est clair que $\sum_{j=0}^{m-1} (\overline{a+j})\ \theta^*(a+j)$ ne dépend pas de a. Si

$$\left|\sum_{j=0}^{m-1} (\overline{a+j})\ \theta^*(a+j)\right| = 1 ,$$

on choisit $0 \leq a \leq 4.2^h - 1$ tel que $a \equiv 1 \mod 4\underset{\sim}{Z}$ et $a \equiv 0 \mod m\underset{\sim}{Z}$, ce qui est toujours possible si $4.2^h > 4m$, car $(2, m) = 1$. Pour ce choix de a, on a

$$\left|\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\overline{a+j})\ \theta^*(a+j)}{m} + \theta^*(-1) \sum_{j=1}^{\bar{a}} \theta^*(j)\right| = \left|\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\overline{a+j})\ \theta^*(a+j)}{m}\right| = 1 .$$

Maintenant si $\left|\sum_{j=0}^{m-1} (\overline{a+j})\ \theta^*(a+j)\right| < 1$, on choisit $0 \leq a \leq 4.2^h - 1$ vérifiant $a \equiv 1 \mod 4\underset{\sim}{Z}$ et $a \equiv 1 \mod m\underset{\sim}{Z}$, ce qui est toujours possible si $4.2^h > 4m$ car $(2, m) = 1$. Pour ce choix de a, on a

$$\left|\frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} (\overline{a+j})\ \theta^*(a+j) + \theta^*(-1) \sum_{j=1}^{\bar{a}} \theta^*(j)\right| = |\theta^*(-1)\ \theta^*(1)| = 1 .$$

THÉORÈME 2. - Si $p = 3$, si θ est un caractère de Dirichlet, primitif, pair, non trivial, de conducteur m ou $3m$, avec $(3, m) = 1$, on a $\|I_\theta\| = 1$.

On pose :

$$b_{k,h,0}(\theta) = \sum_a^{(m,k,h)} \theta(a) \frac{\langle a\rangle - (1+3m)^{-k}}{3^{h+1} m} .$$

Pour montrer le théorème, il suffit donc de montrer que

$$\sup_{h\geq 0} \sup_{0\leq k\leq 3^h-1} |b_{k,h,0}(\theta)| = 1 .$$

Donc il suffit de montrer que, si h est assez grand et si $3^{h+1} \equiv 1 \mod m\mathbb{Z}$, on a

$$\sup_{0\leq k\leq 3^h-1} |b_{k,h,0}(\theta)| = 1 .$$

Donc il suffit de montrer que, si $3^{h+1} \equiv 1 \mod m\mathbb{Z}$ et h assez grand,

$$\sup_{0\leq k\leq 3^h-1} \left| \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\overline{(a+j)}\, \theta^*(a+j)}{m} + \theta^*(-1) \sum_{j=0}^{a} \theta^*(j) \right| = 1 ,$$

car $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^* \simeq \{+1, -1\}$. La démonstration est la même qu'au théorème 2.

COROLLAIRE 4. - Si $p = 2$ ou 3 et si K est un corps abélien sur $\mathbb{Q}$, l'invariant μ_p d'Iwasawa associé à K est nul.

Pour la définition de μ_p, (cf. [5]). Il est bien connu (cf. [4]) que, si K est abélien sur $\mathbb{Q}$, $\mu_p = 0$ équivaut à $\|I_\theta/2\| = 1$ pour tout caractère de Dirichlet primitif, pair, non trivial, θ, de conducteur m ou mq, avec $(m, p) = 1$. Si $p = 2$ ou 3, les seuls caractères à considérer sont ceux pour lesquels $m > 1$.

Les démonstrations que nous avons données des théorèmes 1 et 2 sont effectives et permettent de donner une majoration de λ_θ qui est le nombre de zéros de I_θ dans $D(0, 1)^-$, λ_θ est fini car K_θ est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

COROLLAIRE 5. - Si $p = 2$ ou 3, et si λ_θ est le nombre de zéros de I_θ dans $D(0, 1)^-$, soit r un entier positif strictement tel que $p^{r\phi(m)} > qm$, alors, $\lambda_\theta > q^{-1} p^{r\phi(m)}$.

Posons $I_\theta(T) = \sum_{n\geq 0} a_n T^n$, $a_n \in \mathcal{O}_\theta \subset K_\theta$. Comme K_θ est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que $|a_{n_0}| = \|I_\theta\|$. La théorie du polygone de Newton (cf. [1]) montre alors que $\lambda_\theta = n_0$. Or, si

$$I_\theta(T) = \sum_{i\geq 0} ((1+T)^{p^h} - 1)^i \sum_{k=0}^{p^h-1} b_{k,h,i}(\theta)(1+T)^k ,$$

On a clairement, comme $\|I_\theta\| = 1$,

$$\sup_{0<k<p^h-1} |b_{k,h,0}(\theta)| = 1 \text{ implique } n_0 < p^h - 1 .$$

Le corollaire est alors une conséquence immédiate de la démonstration des théorèmes 1 et 2.

Remarque 1. - La majoration obtenue pour λ_θ entraîne immédiatement une majoration de l'invariant λ_p^-, et donc de λ_p (cf. [5]), car $\lambda_p \leqslant 2\lambda_p^-$. Il est, en effet, facile de voir que $\lambda_p^- = \sum \lambda_\theta$, où la sommation porte sur les caractères primitifs pairs non triviaux θ du groupe de Galois de K sur $\underset{\sim}{Q}$.

Remarque 2. - Le nombre r, défini au corollaire 5, peut être pris égal à 3 pour tout entier p et tout entier $m \geqslant 2$, il peut être pris égal à 2 si $p \geqslant 3$, $m \geqslant 2$, et si $p \geqslant 3$ et $m \neq 2, 3, 4, 6, 10$ et 12, on peut choisir $r = 1$. Ce résultat m'a été communiqué par G. ROBIN et H. DELANGE.

Remarque 3. - On aurait pu donner une démonstration un peu moins calculatoire du lemme 7 en utilisant le lemme suivant :

LEMME. - Soit, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, des nombres $\beta_i \in \underset{\sim}{Z}_p$, avec $\beta_i \neq \beta_j$ si $i \neq j$ et $\alpha_i \in \underset{\sim}{C}_p$. Soit $F(T) = \sum_{i=1} \alpha_i (1 + T)^{\beta_i}$. Alors $\|F\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_i|$.

Mais les majorations obtenues, pour λ_θ, sont moins bonnes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Nombres p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1975 (Collection SUP, "Le Mathématicien, 14).

[2] BARSKY (D.). - Mesures p-adiques et éléments analytiques, J. für reine und angew. Math., t. 291, 1977, p. 204-219.

[3] DIAMOND (J.). - On the value of p-adic L functions at positive integers, Acta Arithm., Warszawa, t. 35, 1979, p. 223-237.

[4] FERRERO (B.). - Iwasawa invariants of abelian number fields, Math. Annalen, t. 234, 1978, p. 9-24.

[5] FERRERO (B.) and WASHINGTON (L.). - The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields, Annals of Math., Series 2, t. 109, 1979, p. 377-395.

[6] HASSE (H.). - Number theory. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1980 (Grundlehren der mathematische Wissenschaften, 229).

[7] HELSMOORTEL (E.). - Comportement local des fonctions continues sur un compact régulier d'un corps local, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, série A, 1970, p. 546-548.

[8] IWASAWA (K.). - Lectures on p-adic L functions. - Princeton, Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1972 (Annals of Mathematic Studies, 74).

[9] IWASAWA (K.). - On the theory of cyclotomic fields, Annals of Math., Series 2, t. 70, 1959, p. 530-561.

[10] KOBLITZ (N.). - p-adic numbers, p-adic analysis and zeta function. - New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1977 (Graduate Texts in Mathematics, 58)

[11] WASHINGTON (L.). - A note on p-adic L functions, J. Number Theory, t. 8, 1976, p. 245-250.