

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

MARIUS VAN DER PUT

Les fonctions thêta d'une courbe de Mumford

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 9, n° 1 (1981-1982), exp. n° 10, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1981-1982__9_1_A6_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1981-1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES FONCTIONS THÊTA D'UNE COURBE DE MUMFORD

par Marius van der PUT (*)

Soit K un corps algébriquement clos et complet pour une valuation non archimédienne. Une courbe de Mumford est une courbe X sur K de genre $g \geq 2$, paramétrisée par un groupe de Schottky $\Gamma \subset \text{PGL}(2, K)$. Plus précisément, Γ est un sous-groupe discontinu de $\text{PGL}(2, K)$, libre à g générateurs. Son ensemble de points limites dans $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(K)$ est noté \mathcal{L} . Alors $\Omega = \mathbb{P}^1 - \mathcal{L}$ est un sous-espace analytique de \mathbb{P}^1 avec une bonne action du groupe Γ , et Ω/Γ est isomorphe à X . D'après [2], chapitre VI, la variété de Jacobi $\text{Jac}(X)$ de X est un tore analytique. On donne ici une autre démonstration de ce théorème, et on introduit en même temps une nouvelle construction des fonctions thêta qui interviennent dans la théorie. La forme quadratique sur le tore analytique est calculée à l'aide du graphe de la réduction stable de X .

1. Fonctions inversibles sur Ω et courants sur T .

L'ensemble \mathcal{L} des points limites de Γ est compact et parfait. D'après [2] chapitre IV, et [1], on peut associer à $\Omega = \mathbb{P}^1 - \mathcal{L}$ une réduction canonique $r: \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$. L'espace $\bar{\Omega}$ est une variété algébrique sur le corps résiduel \bar{K} de K . Les composantes irréductibles de $\bar{\Omega}$ sont des droites projectives sur \bar{K} . Ces droites se coupent normalement. On associe à $\bar{\Omega}$ un graphe T par :

- (i) les sommets de T sont les composantes irréductibles de $\bar{\Omega}$.
- (ii) les arêtes de T sont les points d'intersections des composantes de $\bar{\Omega}$.

On sait que T est un arbre infini. Soit G un graphe localement fini. Nous utilisons les notations suivantes :

(a) \vec{e} désigne une arête orientée ; l'origine et le terminal de \vec{e} sont notés par $\vec{e}(0)$ et $\vec{e}(1)$; l'arête opposée de \vec{e} est notée par $-\vec{e}$.

(b) un courant (à valeurs dans \mathbb{Z}) sur G est une application μ des arêtes orientées de G dans \mathbb{Z} avec $\mu(-\vec{e}) = -\mu(\vec{e})$ et telle que, pour chaque sommet a de G , on a $\sum_{\vec{e}(0)=a} \mu(\vec{e}) = 0$,

(c) le groupe des courants sur G est noté par $\mathcal{C}(G)$.

(*) Texte reçu le 25 janvier 1982.

(1.1) PROPOSITION. - Il existe une suite exacte $0 \rightarrow K^* \rightarrow \mathcal{O}(\Omega)^* \rightarrow \mathcal{C}(T) \rightarrow 0$.

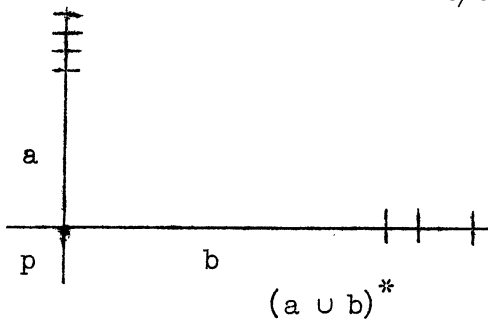
Remarque. - $\mathcal{O}(\Omega)$ est l'algèbre des fonctions holomorphes sur Ω , et $\mathcal{O}(\Omega)^*$ est le groupe des fonctions holomorphes inversibles sur Ω . Nous allons décrire l'application $\mathcal{O}(\Omega)^* \rightarrow \mathcal{C}(T)$. Un sommet a de T est une droite, composante de $\bar{\Omega}$. Soit $a^* = a - \bigcup_{b \neq a} a \cap b$. Alors $r^{-1}(a^*)$ est un affinoïde de Ω avec réduction canonique a^* . On voit aisément que $r^{-1}(a^*)$ possède la forme (pour un paramètre convenable z de \tilde{P}^1) :

$$\{z \in K; |z| = 1 \text{ et } |z - \lambda_1| = \dots = |z - \lambda_n| = 1\}, \text{ où } |\lambda_1| = \dots = |\lambda_n| = 1.$$

Une fonction inversible f sur Ω est alors de valeur absolue constante sur $r^{-1}(a^*)$. On note cette valeur par $|f|_a$.

Soit maintenant \vec{e} une arête orientée, $\vec{e}(0) = a$ et $\vec{e}(1) = b$.

$$\text{Soit } (a \cup b)^* = a \cup b - \bigcup_{c \neq a, b} c \cap (a \cup b)$$



Alors $r^{-1}((a \cup b)^*)$ est un affinoïde dans Ω avec réduction canonique $(a \cup b)^*$. Pour un paramètre convenable z de \tilde{P}^1 l'affinoïde $r^{-1}((a \cup b)^*)$ possède la forme :

$$\{z \in K; |\pi_e| \leq |z| \leq 1; |z - a_i| = 1; |z - b_j| \geq |\pi_e|; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\},$$

$$\text{où } 0 < |\pi_e| < 1; |a_1| = \dots = |a_n| = 1; |b_1| = \dots = |b_m| = |\pi_e|.$$

Une fonction f , holomorphe et inversible sur $r^{-1}((a \cup b)^*)$, s'écrit comme $f = z^n \lambda g$, où $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in K^*$, et g est une fonction holomorphe sur $r^{-1}((a \cup b)^*)$ avec valeur absolue 1.

$$\text{Alors } |f|_a = |\pi_e|^n |\lambda|; |f|_b = |\lambda|. \text{ Donc } |f|_b |f|_a^{-1} = |\pi_e|^{-n}.$$

La fonction $\overline{f/\lambda}$, vue comme fonction rationnelle sur b , satisfait

$$\text{ordre}_p \text{ sur } b \left(\overline{f/\lambda} \right) = n.$$

De même,

$$\text{ordre}_p \text{ sur } a \left(\overline{f/\lambda \pi_e^n} \right) = -n.$$

Le courant μ_f , associé à $f \in \mathcal{O}(\Omega)^*$, est défini par $\mu_f(\vec{e}) = -n$. Bien sûr $\mu_f(-\vec{e}) = -\mu_f(\vec{e})$. La formule $\sum_{\vec{e}(0)=a} \mu_f(\vec{e}) = 0$ se déduit de : "le degré du diviseur de $\overline{f/\lambda}$, vue comme fonction rationnelle sur b , est zéro".

Le noyau de l'application $f \mapsto \mu_f$ est formé des fonctions holomorphes sur Ω

à valeur absolue constante. Une fonction holomorphe bornée sur Ω est constante. Donc le noyau est égal à K^* . Dans [1], on a montré la surjectivité de $f \mapsto \mu_f$. Toutes les constructions précédentes sont canoniques, et en particulier les constructions sont invariantes par Γ . On déduit de (1.1) une suite exacte de cohomologie :

$$(1.2) \quad 0 \longrightarrow H^0(\Gamma, \mathcal{C}(T)) \longrightarrow H^1(\Gamma, K^*) \longrightarrow H^1(\Gamma, \mathcal{O}(\Omega)^*) \longrightarrow H^1(\Gamma, \mathcal{C}(T)) \longrightarrow 0.$$

Notons que Γ est un groupe libre à g générateurs $\gamma_1, \dots, \gamma_g$. Pour un tel groupe $H^i(\Gamma, -) = 0$ pour $i \geq 2$. Plus explicitement, pour un Γ -module M , on forme le complexe $M \xrightarrow{d} M^{\mathcal{G}}$ avec $d(m) = (m - \gamma_1(m), \dots, m - \gamma_g(m))$. Alors, $H^0(\Gamma, M) = \ker d$ et $H^1(\Gamma, M) = \text{coker } d$.

Dans le reste de l'exposé on va interpréter, et "calculer", les groupes qui figurent dans la suite (1.2). D'abord, $H^0(\Gamma, \mathcal{C}(T))$ s'identifie à $\mathcal{C}(T/\Gamma)$ = le groupe des courants sur le graphe T/Γ . Le graphe T/Γ est le graphe de la réduction stable de $X = \Omega/\Gamma$. Ensuite, $H^1(\Gamma, K^*)$ s'identifie canoniquement à $\text{Hom}(\Gamma, K^*) \cong (K^*)^{\mathcal{G}}$. On peut compléter la suite (1.1) avec la proposition suivante.

(1.3) PROPOSITION. - La suite $0 \longrightarrow \mathcal{O}(\Omega)^* \longrightarrow \mathcal{K}(\Omega)^* \longrightarrow \text{Div}(\Omega) \longrightarrow 0$ est exacte.

Remarque. - $\mathcal{K}(\Omega)$ désigne le corps des fonctions méromorphes sur Ω . Posons $\mathcal{K}(\Omega)^* = \mathcal{K}(\Omega) - \{0\}$, et $\text{Div}(\Omega)$ est le groupe des diviseurs sur Ω à support discret. Par définition, un sous-ensemble S de Ω est discret si $S \cap F$ est fini pour chaque affinoïde $F \subset \Omega$. L'image de $f \in \mathcal{K}(\Omega)^*$ est $\text{div}(f) = \sum_{p \in \Omega} \text{ordre}_p(f) \cdot p$. Pour vérifier que la suite est exacte, il faut trouver pour $D = \sum n_i x_i \in \text{Div}(\Omega)$ une fonction méromorphe avec diviseur D . Supposons que $\infty \in \Omega$. Pour $\lambda \in \Omega$, et $\lambda \neq \infty$, on désigne par $\text{pr}(\lambda)$ un point du compact \mathcal{E} avec

$$|\lambda - \text{pr}(\lambda)| = \min \{ |\lambda - \mu| ; \mu \in \mathcal{E} \}.$$

On pose $\text{pr}(\infty) = x_0$ un point quelconque de \mathcal{E} .

On voit aisément que le produit infini $f = \prod \left(\frac{z - x_i}{z - \text{pr}(x_i)} \right)^{n_i}$ définit un élément de $\mathcal{K}(\Omega)^*$ avec diviseur D .

(1.3) est un cas spécial d'un théorème montré dans [1], chapitre I. La suite de Γ -module (1.3) induit la suite exacte de cohomologie :

$$(1.4) \quad 0 \longrightarrow K^* \longrightarrow \mathcal{K}(X)^* \longrightarrow \text{Div}(X) \longrightarrow H^1(\Gamma, \mathcal{O}(\Omega)^*) \\ \longrightarrow H^1(\Gamma, \mathcal{K}(\Omega)^*) \longrightarrow H^1(\Gamma, \text{Div}(\Omega)) \longrightarrow 0.$$

On a identifié ici $H^0(\Gamma, \mathcal{O}(\Omega)^*) = K^*$; $H^0(\Gamma, \mathcal{K}(\Omega)^*) \simeq \mathcal{K}(X)^*$ et $H^0(\Gamma, \text{Div}(\Omega)) \simeq \text{Div}(X)$.

(1.5) PROPOSITION.

$$(i) \quad H^1(\Gamma, \mathcal{O}(\Omega)^*) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X^*) .$$

$$(ii) \quad H^1(\Gamma, \mathbb{F}(\Omega)^*) = H^1(\Gamma, \text{Div}(\Omega)) = 0 .$$

La proposition (1.5) est une conséquence de la proposition suivante.

(1.6) PROPOSITION. - Soit \mathcal{S} un faisceau sur X tel que le faisceau $\pi^* \mathcal{S}$ sur Ω satisfait $H^1(\Omega, \pi^* \mathcal{S}) = 0$. Alors $\pi^* \mathcal{S}(\Omega)$ est un Γ -module ;

$$H^0(\Gamma, \pi^* \mathcal{S}(\Omega)) \cong \mathcal{S}(X) \quad \text{et} \quad H^1(\Gamma, \pi^* \mathcal{S}(\Omega)) \cong H^1(X, \mathcal{S}) .$$

Démonstration de (1.6). - Soit $\pi : \Omega \rightarrow X$ l'application canonique, et soit \mathcal{S} un faisceau (abélien) sur X . Pour chaque $w \in \Gamma$, on a $\pi w = w$, et alors $w^* \pi^* \mathcal{S} \xrightarrow{\sim} \pi^* \mathcal{S}$. Pour un sous-ensemble admissible $V \subset \Omega$, invariant par Γ , cet isomorphisme induit un isomorphisme $[w] : \pi^* \mathcal{S}(V) \rightarrow \pi^* \mathcal{S}(V)$. En particulier, $\pi^* \mathcal{S}(\Omega)$ est un Γ -module.

Un affinoïde $U \subset X$ est appelé "petit" s'il existe un affinoïde $U_0 \subset \Omega$ tel que $\pi U_0 = U$ et que $U_0 \cap w U_0 = \emptyset$ pour $w \in \Gamma$, $w \neq \text{id}$. Dans ce cas $\pi : U_0 \rightarrow U$ est un isomorphisme. On a :

$$\begin{aligned} (\pi^* \mathcal{S})(\pi^{-1} U) &\xrightarrow{\sim} \prod_{w \in \Gamma} \pi^* \mathcal{S}(w U_0) \xrightarrow{\sim} \text{Appl}(\Gamma, \mathcal{S}(U)) \\ &= \text{l'ensemble des applications de } \Gamma \text{ dans } \mathcal{S}(U) . \end{aligned}$$

La structure de Γ -module de $\text{Appl}(\Gamma, \mathcal{S}(U))$ est donnée par $(\delta c)(\gamma) = c(\delta^{-1} \gamma)$, où $\gamma, \delta \in \Gamma$, et où $c \in \text{Appl}(\Gamma, \mathcal{S}(U))$.

L'isomorphisme ci-dessus est un isomorphisme de Γ -module et alors $(\pi^* \mathcal{S})(\pi^{-1} U)$ est un Γ -module induit, et l'application canonique $\mathcal{S}(U) \rightarrow H^0(\Gamma, \pi^* \mathcal{S}(\pi^{-1} U))$ est un isomorphisme. Soit $\{U_1, \dots, U_n\}$ un recouvrement de X par des affinoïdes petits. Alors $\{\pi^{-1} U_1, \dots, \pi^{-1} U_n\}$ est un recouvrement admissible de Ω , et la suite

$$0 \rightarrow \pi^* \mathcal{S}(\Omega) \rightarrow \sum_{i=1}^n \pi^* \mathcal{S}(\pi^{-1} U_i) \rightarrow \sum_{i < j} \pi^* \mathcal{S}(\pi^{-1} U_{ij})$$

est exacte.

En prenant $H^0(\Gamma, -)$ de cette suite on trouve que l'application canonique $\mathcal{S}(X) \rightarrow H^0(\Gamma, \pi^* \mathcal{S}(\Omega))$ est un isomorphisme.

Supposons que \mathcal{S} est un faisceau mou sur X , alors $\pi^* \mathcal{S}$ est aussi mou, et la suite de Čech est exacte :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \pi^* \mathcal{S}(\Omega) \rightarrow \sum_{i=1}^n \pi^* \mathcal{S}(\pi^{-1} U_i) \rightarrow \sum_{i < j} \pi^* \mathcal{S}(\pi^{-1} U_{ij}) \\ \rightarrow \sum_{i < j < h} \pi^* \mathcal{S}(\pi^{-1} U_{ijh}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Cette suite est une résolution du Γ -module $\pi^* \mathcal{S}(\Omega)$ par des Γ -modules induits. Alors $H^i(\Gamma, \pi^* \mathcal{S}(\Omega))$ est égale au i -ième groupe de cohomologie du complexe

$$0 \longrightarrow H^0(\Gamma, \sum_{i=1}^n \pi^* \mathcal{S}(\pi^{-1} u_i)) \longrightarrow H^0(\Gamma, \sum_{i < j} \pi^* \mathcal{S}(\pi^{-1} u_{ij})) \longrightarrow \dots$$

Mais ce complexe est égal à

$$0 \longrightarrow \sum_{i=1}^n \mathcal{S}(u_i) \longrightarrow \sum_{i < j} \mathcal{S}(u_{ij}) \longrightarrow \sum_{i < j < h} \mathcal{S}(u_{ijh}) \longrightarrow \dots$$

Par conséquent, $H^1(\Gamma, \pi^* \mathcal{S}(\Omega)) = 0$ puisque $H^1(u, \mathcal{S}) = 0$.

Soit maintenant \mathcal{S} un faisceau sur X tel que $H^1(\Omega, \pi^* \mathcal{S}) = 0$. Alors \mathcal{S} est un sous-faisceau d'un faisceau mou \mathcal{E} . De la suite exacte de faisceaux sur X , $0 \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0$, on déduit des suites exactes :

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}(X) \longrightarrow \mathcal{E}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{S}) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \pi^* \mathcal{S}(\Omega) \longrightarrow \pi^* \mathcal{E}(\Omega) \longrightarrow \pi^* \mathcal{C}(\Omega) \longrightarrow 0,$$

et

$$0 \longrightarrow H^0(\Gamma, \pi^* \mathcal{S}(\Omega)) \longrightarrow H^0(\Gamma, \pi^* \mathcal{E}(\Omega)) \longrightarrow H^0(\Gamma, \pi^* \mathcal{C}(\Omega)) \longrightarrow H^1(\Gamma, \pi^* \mathcal{S}(\Omega)) \longrightarrow 0.$$

Cela montre $H^1(X, \mathcal{S}) \simeq H^1(\Gamma, \pi^* \mathcal{S}(\Omega))$.

Démonstration de (1.5). - Sur X , on considère la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow \mathbb{K}_X^* \longrightarrow \text{Div}_X \longrightarrow 0.$$

La suite exacte $0 \longrightarrow \pi^* \mathcal{O}_X^* \longrightarrow \pi^* \mathbb{K}_X^* \longrightarrow \pi^* \text{Div}_X \longrightarrow 0$ sur Ω est égale à $0 \longrightarrow \mathcal{O}_\Omega^* \longrightarrow \mathbb{K}_\Omega^* \longrightarrow \text{Div}_\Omega \longrightarrow 0$. On trouve, d'après (1.6), un diagramme commutatif et exact :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K^* & \longrightarrow & \mathbb{K}(X)^* & \longrightarrow & \text{Div}(X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ 0 & \longrightarrow & H^0(\Gamma, \mathcal{O}(\Omega)^*) & \longrightarrow & H^0(\Gamma, \mathbb{K}(\Omega)^*) & \longrightarrow & H^0(\Gamma, \text{Div}(\Omega)) \longrightarrow H^1(\Gamma, \mathcal{O}(\Omega)^*) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Le faisceau Div_X est mou, et alors $H^1(X, \text{Div}_X) = 0$. Il est moins clair que $H^1(X, \mathbb{K}_X^*) = 0$ parce que \mathbb{K}_X^* n'est pas un faisceau constant sur X . Mais on sait que $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) = H_{\text{alg}}^1(X, \mathcal{O}_X^*) =$ le groupe de cohomologie de \mathcal{O}_X^* pour la topologie de Zariski sur X . En outre, $\mathbb{K}(X)$ est égale au corps des fonctions rationnelles sur X , et on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow K^* \longrightarrow \mathbb{K}(X)^* \longrightarrow \text{Div}(X) \longrightarrow H_{\text{alg}}^1(X, \mathcal{O}_X^*) \longrightarrow 0.$$

Cela montre que $H^1(X, \mathcal{M}_X^*) = 0$.

(1.7) PROPOSITION. - $H^0(\Gamma, \mathcal{C}(T)) \cong \Gamma_{ab} \cong \mathbb{Z}^g$; $H^1(\Gamma, \mathcal{C}(T)) \cong \mathbb{Z}$, et l'application $\text{Div}(X) \rightarrow H^1(\Gamma, \mathcal{O}(\Omega)^*) \rightarrow H^1(\Gamma, \mathcal{C}(T)) \cong \mathbb{Z}$ associe à chaque diviseur D sur X son degré.

Démonstration. - On a une suite exacte de Γ -modules

$$0 \rightarrow \mathcal{C}(T) \rightarrow E(T) \xrightarrow{d} H(T) \rightarrow 0,$$

où $E(T)$ est le groupe des fonctions μ sur les arêtes orientées à valeurs dans \mathbb{Z} telles que $\mu(-\vec{e}) = -\mu(\vec{e})$, où $H(T)$ désigne le groupe des fonctions à valeurs dans \mathbb{Z} sur les sommets, et où $d(\mu)(a) = \sum_{\vec{e}(0)=a} \mu(\vec{e})$.

La suite de cohomologie pour le groupe Γ est

$$0 \rightarrow \mathcal{C}(T/\Gamma) \rightarrow E(T/\Gamma) \rightarrow H(T/\Gamma) \rightarrow H^1(\Gamma, \mathcal{C}(T)) \rightarrow 0.$$

En effet, $E(T)$ est un Γ -module induit, et alors $H^1(\Gamma, E(T)) = 0$. La première partie de (1.7) se déduit du lemme suivant.

(1.8) LEMME. - Soit G un graphe connexe et fini. Il existe une suite exacte
 $0 \rightarrow \mathcal{C}(G) \rightarrow E(G) \xrightarrow{d} H(G) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \rightarrow 0$, et il existe un isomorphisme canonique
 $\pi_1(G)_{ab} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(G)$.

Démonstration. - L'application φ est donnée par $\varphi(f) = -\sum_{a \in G} f(a)$. Il est clair que $\varphi d = 0$ et que φ est surjective. Il nous reste à montrer que $\ker \varphi \subseteq \text{im } d$. Pour cela, on prend G^* un sous-arbre maximal de G .

Pour G^* , la suite $0 \rightarrow E(G^*) \xrightarrow{d} H(G^*) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ est exacte; $E(G^*)$ est un sous-groupe de $E(G)$ tel que $E(G)/E(G^*) \cong \mathbb{Z}^g$, où g est le nombre des arêtes de $G - G^*$. En outre, $H(G) = H(G^*)$. Cela montre que la suite est exacte. L'isomorphisme canonique $\pi_1(G)_{ab} \rightarrow \mathcal{C}(G)$ est construit comme le suivant. Soit γ un lacet dans G . On peut écrire γ comme une suite d'arêtes orientées $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, où $\vec{e}_i(1) = \vec{e}_{i+1}(0)$ ($1 \leq i \leq n$) et $\vec{e}_n(1) = \vec{e}_1(0)$. Au lacet γ on associe le courant μ_γ par

$$\mu_\gamma(\vec{e}) = \sum_{i=1}^n \{\vec{e}_i, \vec{e}\} \quad \text{et} \quad \{\vec{e}, \vec{f}\} = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{e} \neq \vec{f} \\ -1 & \text{si } \vec{e} = -\vec{f} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

On voit aisément que μ_γ est un courant, que μ_γ ne dépend que de la classe d'homotopie libre de γ , et que $\mu_{\gamma_1 \gamma_2} = \mu_{\gamma_1} + \mu_{\gamma_2}$. Pour voir que l'application $\pi_1(G)_{ab} \rightarrow \mathcal{C}(G)$ est un isomorphisme, on utilise encore un sous-arbre maximal G^* de G . Soit $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_g, -\vec{e}_1, \dots, -\vec{e}_g$ l'ensemble des arêtes orientées

de $G - G^*$. Pour $\vec{e} \in G - G^*$, on construit un lacet $\gamma(\vec{e}) = \vec{e} \vec{f}_1 ; \dots ; \vec{f}_s$, où $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_s$ est le chemin unique (sans aller-retour) de $\vec{e}(1)$ à $\vec{e}(0)$ dans G^* . Alors, $\gamma(\vec{e}_1), \dots, \gamma(\vec{e}_g)$ est une base libre de $\pi_1(G)_{ab}$, et les $\mu_i = \mu_{\gamma(\vec{e}_i)}$ ont les propriétés $\mu_i(\vec{e}_j) = \delta_{ij}$.

Soit maintenant μ un courant sur G . Alors $\tilde{\mu} = \mu - \sum_{i=1}^g \mu(\vec{e}_i) \mu_i$ satisfait $\tilde{\mu}(\vec{e}_i) = 0$. Alors $\tilde{\mu}$ est un courant sur G^* .

Donc $\tilde{\mu} = 0$. Cela montre que $\pi_1(G)_{ab} \rightarrow \mathcal{C}(G)$ est un isomorphisme.

Suite de la démonstration de (1.7). - Pour voir que l'application $\text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, de (1.7), associe à D son degré, il suffit de prendre $D = x$. Soit $y \in \Omega$ avec $\pi(y) = x$. Alors, $\pi^{-1}(x) = \Gamma y \in H^0(\Gamma, \text{Div}(\Omega))$, et il existe une fonction $f \in \mathcal{M}(\Omega)^*$ avec $\text{div}(f) = \Gamma y$. Le 1-cocycle $w \mapsto f(wz) f(z)^{-1}$ dans $H^1(\Gamma, \mathcal{O}(\Omega)^*)$ est l'image de x . Pour simplifier, nous prenons le cas où $r(y)$ est un point simple de $\bar{\Omega}$ (l'autre cas est laissé au lecteur). Posons

$$|f|_a = \max\{|f(z)| ; z \in r^{-1}(a^*)\},$$

et $\mu_f(\vec{e})$, avec $\vec{e}(0) = a$, $\vec{e}(1) = b$, est défini par

$$|f|_b |f|_a^{-1} = |\pi_e| \mu_f(\vec{e}).$$

L'application $\mu_f \in E(T)$ n'est pas un courant. En effet,

$$-\sum_{\vec{e}(0)=a} \mu_f(\vec{e}) = \text{le nombre des points de } \Gamma y \text{ situés dans } r^{-1}(a^*).$$

Alors $d_{\mu_f} \in H(T)$ est invariant par Γ et se trouve alors dans $H(T/\Gamma)$. l'image de d_{μ_f} dans $H^1(\Gamma, \mathcal{C}(T))$ est $w \mapsto \mu_f(w\vec{e}) - \mu_f(\vec{e})$. C'est aussi l'image de $(w \mapsto f(wz) f(z)^{-1}) \in H^1(\Gamma, \mathcal{O}(\Omega)^*)$ dans $H^1(\Gamma, \mathcal{C}(T))$. Ensuite

$$\varphi(d_{\mu_f}) = - \sum_{a \in T/\Gamma} (d_{\mu_f})(a) = \sum_{a \in T/\Gamma} \text{le nombre des points de } \Gamma y \cap r^{-1}(a^*) = 1.$$

(1.9) Définition. - Une fonction thêta pour Γ est un élément $\theta \in \mathcal{O}(\Omega)^*$ tel que $\theta(wz) = c(w) \theta(z)$ avec $w \in \Gamma$, $c(w) \in K^*$.

PROPOSITION. - Le groupe des fonctions thêta pour Γ est isomorphe à

$$K^* \times \Gamma_{ab} \cong K^* \times \mathbb{Z}^g.$$

Démonstration. - La définition équivaut à : l'image de θ dans $\mathcal{C}(T)$ est invariante par Γ . Comme $\Gamma_{ab} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(T/\Gamma)$, le résultat est clair.

Les fonctions thêta (et l'isomorphisme) peuvent être données explicitement. Soit $w \in \Gamma$, et soit $y \in \Omega$ tel que $r(y) \in \bar{\Omega}$ est régulier. Le produit infini

$u_w = \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{z - \gamma w(y)}{z - \gamma(y)}$ converge sur Ω , et est un élément de $\mathcal{O}(\Omega)^*$. Pour \vec{e} , avec $\vec{e}(0) = a$, $\vec{e}(1) = b$, et $\{p\} = a \cap b$, l'espace $\bar{\Omega} - p$ a deux composantes connexes : $\bar{\Omega}^+$ qui contient b^* , et $\bar{\Omega}^-$ qui contient a^* . Ecrivons $\Omega^+ = r^{-1}(\bar{\Omega}^+)$ et $\Omega^- = r^{-1}(\bar{\Omega}^-)$. Pour une fonction f de la forme $(z - x_1)/(z - x_2)$ sans zéro ou pôle dans $r^{-1}(p)$, on a $|f|_b |f|_a^{-1} = |\pi_e|^\delta$, où

$$\delta = \begin{cases} +1 & \text{si } x_1 \in \Omega^+ \text{ et } x_2 \in \Omega^- \\ -1 & \text{si } x_1 \in \Omega^- \text{ et } x_2 \in \Omega^+ \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

A l'aide de cette formule on peut calculer :

$$\mu_{u_w}(\vec{e}) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_\gamma \quad \text{où} \quad \delta_\gamma = \begin{cases} +1 & \text{si } \gamma w(y) \in \Omega^+ \text{ et } \gamma(y) \in \Omega^- \\ -1 & \text{si } \gamma w(y) \in \Omega^- \text{ et } \gamma(y) \in \Omega^+ \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Il est clair que le courant μ_{u_w} est invariant par Γ . Donc, u_w est bien une fonction thêta.

(1.10) PROPOSITION. - Le courant de la fonction thêta $u_w = \prod \frac{z - \gamma w(y)}{z - \gamma(y)}$ est égale au courant $\mu_w \in \mathcal{C}(T/\Gamma)$ associé à l'élément $w \in \Gamma = \pi_1(T/\Gamma)$.

Démonstration. - Supposons que $r(y) \in a \subset \bar{\Omega}$ et $r(wy) \in b \subset \bar{\Omega}$. Le chemin (sans aller-retour) $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ dans T de a vers b possède comme projection dans T/Γ le lacet d'origine a correspondant à w . Le courant μ_w , vu comme courant invariant sur T , satisfait à

$$\mu_w(\vec{e}) = \sum_{i=1, \dots, n; \gamma \in \Gamma} \{\gamma \vec{e}, \vec{e}_i\},$$

et on calcule facilement que

$$\delta_\gamma = \sum_{i=1}^n \{\gamma \vec{e}, \vec{e}_i\}.$$

2. La forme quadratique associée à une courbe de Mumford.

Les calculs du § 1 montrent que la suite exacte (1.2) peut s'écrire

$$(2.1) \quad 0 \longrightarrow \Gamma_{ab} \xrightarrow{c} \text{Hom}(\Gamma_{ab}, K^*) \longrightarrow \text{Jac}(X) \longrightarrow 0,$$

où $\text{Jac}(X) = \frac{\text{Div}_0(X)}{\sim}$ désigne la variété de Jacobi de $X = \Omega/\Gamma$.

Nous écrivons $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = c(\gamma_1)(\gamma_2)$.

(2.2) PROPOSITION.

(i) \langle , \rangle est bilinéaire, symétrique, et est à valeurs dans K^* .

(ii) $(,) = -\log |\langle , \rangle|$ est une forme réelle, bilinéaire, symétrique et définie positive.

Démonstration.

(i) Soit θ_{γ_1} une fonction thêta avec courant μ_{γ_1} . Alors

$$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = \theta_{\gamma_1}(\gamma_2 z) \theta_{\gamma_1}(z)^{-1}.$$

Avec le choix $u_j(z) = \prod_{\delta \in \Gamma} (Z - \delta\gamma(a))/(z - \delta(a))$, on a

$$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = u_{\gamma_1}(\gamma_2 z) u_{\gamma_1}(z)^{-1}.$$

Dans [2] (p. 190), on fait un calcul explicite pour démontrer la symétrie de \langle , \rangle . L'essentiel est de regarder u_{γ} comme fonction de deux variables zêta. Il serait intéressant de trouver une démonstration qui ne dépende pas de la forme explicite de u_{γ} . On peut essayer la suivante. L'homomorphisme $\Gamma_{ab} \xrightarrow{\sim} c(T/\Gamma)$ relève d'un homomorphisme $\gamma \mapsto u_{\gamma}$, de $\Gamma_{ab} \rightarrow \theta(\Omega)^*$. L'homomorphisme peut aussi relever d'un 1-cocycle $\gamma \mapsto f_{\gamma}$ dans $H^1(\Gamma, \theta(\Omega)^*)$. Bien sûr, $f_{\gamma} = c(\gamma) u_{\gamma}$, où c est une application $\Gamma \rightarrow K^*$. On voit aisément que

$$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = c(\gamma_1 \gamma_2) c(\gamma_1)^{-1} c(\gamma_2)^{-1}.$$

En utilisant le fait que \langle , \rangle est une application bilinéaire $\Gamma_{ab} \times \Gamma_{ab} \rightarrow K^*$, on peut essayer de montrer que $c(\gamma)$ dépend seulement de l'image de $\gamma \in \Gamma$ dans Γ_{ab} . Cela implique évidemment que \langle , \rangle est symétrique. Notons que la symétrie de $(,)$ sera montrée indépendamment de (i).

(ii) La démonstration de cette partie utilise encore T et T/Γ . Posons $\text{Pot}(T) =$ le groupe des potentiels sur $T =$ les fonctions V sur les sommets de T à valeurs dans $\underline{\mathbb{R}}$ telles que l'application dV :

$$\vec{e} = (a, b) \mapsto \frac{V(b) - V(a)}{-\log |\pi_e|} \text{ est un courant sur } T.$$

(En particulier, $V(b) - V(a) \in \underline{\mathbb{Z}} \log |\pi_e|$). On obtient ainsi un diagramme commutatif de Γ -modules dont les lignes sont exactes :

$$(*) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K^* & \longrightarrow & \theta(\Omega)^* & \longrightarrow & c(T) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ -\log | & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \underline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \text{Pot}(T) & \xrightarrow{d} & c(T) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Cela montre que la forme $(,) = - \log | \langle , \rangle |$ se déduit de la suite de cohomologie de (*)

$$0 \rightarrow \mathcal{C}(T/\Gamma) \rightarrow \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{R}) \rightarrow H^1(\Gamma, \text{Pot}(T)) \dots$$

Soit μ un courant sur T , et p_0 un sommet fixé de T . On peut aisément construire un potentiel V_μ avec $dV_\mu = \mu$. En effet, pour $q \in T$, on désigne par $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ le chemin unique (sans aller-retour) de p_0 vers q dans T . Le potentiel est donné par

$$V_\mu(q) = \sum_{i=1}^n h(e_i) \mu(\vec{e}_i), \text{ où } h(e) := - \log |\pi_e|.$$

Soit V_γ le potentiel avec $dV_\gamma = \mu_\gamma =$ le courant correspondant à $\gamma \in \Gamma$. On trouve donc :

$$(\gamma_1, \gamma_2) = V_{\gamma_1}(\gamma_2 p_0) - V_{\gamma_1}(p_0) = \sum_{i=1}^n h(e_i) \mu_{\gamma_1}(\vec{e}_i),$$

où $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ est le chemin unique de p_0 vers $\gamma_2 p_0$.

Comme μ_{γ_1} est invariant par Γ , on peut regarder cette formule comme une expression dans T/Γ en remplaçant p_0 et \vec{e}_i par leurs images dans T/Γ . Donc

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \sum_{i=1}^n h(e_i) \mu_{\gamma_1}(e_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h(e_i) \{ \vec{e}_i, \vec{f}_j \},$$

où $\vec{f}_1 \dots \vec{f}_m$ est le chemin dans T/Γ correspondant à γ_1 .

$$\text{De plus, } \sum_{\vec{e} \in T/\Gamma} \{ \vec{e}_i, \vec{e} \} \{ \vec{f}_j, \vec{e} \} = 2 \{ \vec{e}_i, \vec{f}_j \}.$$

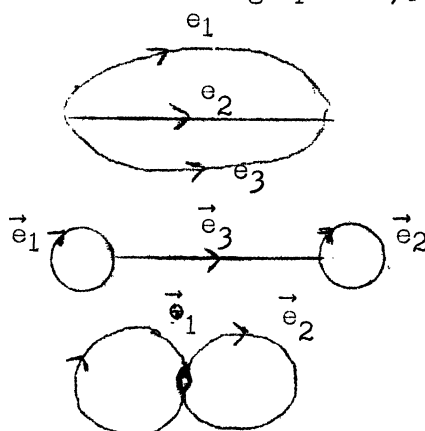
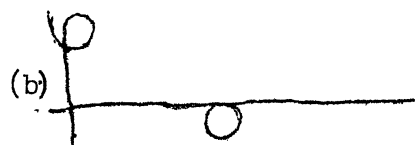
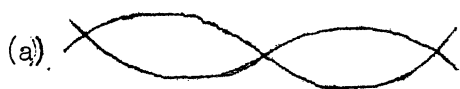
Cela montre $(\gamma_1, \gamma_2) = 1/2 \sum_{\vec{e} \in T/\Gamma} \mu_{\gamma_1}(\vec{e}) \mu_{\gamma_2}(\vec{e}) h(e)$. Alors $(,)$ est bilinéaire, symétrique, et défini positif.

(2.3) Exemples. - X courbe de Mumford de genre 2.

Les réductions stables de X ont les formes suivantes :

réduction stable = \bar{X}/Γ

le graphe T/Γ



Nous allons calculer les formes quadratiques.

(a) Ecrivons $h_i = h(e_i)$. On peut supposer $h_1 \leq h_2 \leq h_3$.

Une base des courants sur T/Γ est $\{\mu_1, \mu_2\}$ où

$$\mu_1(\vec{e}_1) = 1, \quad \mu_1(\vec{e}_2) = -1, \quad \mu_1(\vec{e}_3) = 0$$

$$\mu_2(\vec{e}_1) = 1, \quad \mu_2(\vec{e}_2) = 0, \quad \mu_2(\vec{e}_3) = -1.$$

La matrice de la forme $(,)$ est alors

$$\begin{pmatrix} h_1 + h_2 & h_1 \\ h_1 & h_1 + h_3 \end{pmatrix}$$

Pour (b) et (c), les matrices sont $\begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}$.

Ce qu'on a fait, c'est d'associer à un graphe muni d'une fonction positive (réelle ou même entière) sur les arêtes, une forme quadratique sur $\underline{\mathbb{Z}}^g$. On peut se demander si on trouve ainsi toutes les classes d'équivalence (sous l'action de $Gl(g, \underline{\mathbb{Z}})$) des formes quadratiques positives. C'est bien le cas pour $g = 2$. En effet, la matrice d'une telle forme est $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $a, d > 0$ et $ad - b^2 = D > 0$. La classe d'équivalence est

$$\{M^t \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} M : M \in Gl(2, \underline{\mathbb{Z}})\}$$

Comme le discriminant D est invariant, il suffit de noter (a, b) au lieu de la matrice. Le groupe $PGL(2, \underline{\mathbb{Z}})$ est engendré par les éléments

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et l'action de ces éléments sur (a, b) est donnée par

$$(a, b) \xrightarrow{I} (a, -b); \quad (a, b) \xrightarrow{T} (a, a+b); \quad (a, b) \xrightarrow{S} (d, -b)$$

Un calcul simple montre que chaque classe d'équivalence contient un élément (a, b) avec $2b \leq a \leq d = (D + b^2)/a$

Pour $b \neq 0$, on trouve $\begin{pmatrix} h_1 + h_2 & h_1 \\ h_1 & h_1 + h_3 \end{pmatrix}$, et pour $b = 0$, la matrice $\begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}$

On vérifie sans peine, en utilisant les longueurs des éléments de $\underline{\mathbb{Z}}^2$, que ces formes sont inéquivalentes entre eux.

Dans un preprint "L. GERRITZEN : Der Satz von Torelli für Graphen, Bochum, décembre

1981", on montre que, pour $g > 3$, les graphes ne donnent pas toutes les classes d'équivalence des formes sur Z^g . En plus, il est montré que le graphe, muni d'une fonction positive sur les arêtes, est (modulo une équivalence banale) déterminé par sa forme quadratique. ("théorème de Torelli").

(2.4) Les propriétés de \langle , \rangle dans (2.2) impliquent d'après [1], que le tore analytique $(\text{Hom}(\Gamma_{ab}, K^*)) / (c(\Gamma_{ab})) = (K^*)^g / \Lambda$ est une variété abélienne.

Finalement, on veut montrer que l'isomorphisme de $(K^*)^g / \Lambda$ et $\text{Jac}(X)$ est un isomorphisme de variétés abéliennes. D'après le théorème GAGA en analyse rigide, il suffit de montrer que l'application $(K^*)^g = \text{Hom}(\Gamma_{ab}, K^*) \rightarrow \text{Jac}(X)$ est analytique. Pour cela on regarde le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \underbrace{X \times X \times \dots \times X}_g & \xrightarrow[\alpha]{\text{algébrique}} & \text{Jac}(X) \\
 \uparrow \text{analytique} & & \uparrow \\
 \underbrace{\Omega \times \Omega \times \dots \times \Omega}_g & \xrightarrow[\text{analytique, surjective}]{\beta} & \text{Hom}(\Gamma_{ab}, K^*)
 \end{array}$$

On fixe un point $a_0 \in \Omega$. Soit $x_0 \in X$ l'image de a_0 . Alors α est donné par $\alpha(x_1, \dots, x_g) = \sum x_i - gx_0$ modulo équivalence linéaire.

Soit $(a_1, \dots, a_g) \in \Omega^g$. On fabrique la fonction

$$f = \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{(z - \gamma(a_1)) \dots (z - \gamma(a_g))}{(z - \gamma(a_0))^g}.$$

Alors $\gamma \rightarrow \frac{f(\gamma z)}{f(z)} \in K^*$ est un élément de $\text{Hom}(\Gamma_{ab}, K^*)$.

Cet élément dépend analytiquement de (a_1, \dots, a_g) . En outre on peut montrer que l'application est surjective. Cela implique que $\text{Hom}(\Gamma_{ab}, K^*) \rightarrow \text{Jac}(X)$ est analytique et cela termine la démonstration.

REFERENCES

- [1] FRESNEL (J.) and VAN DER PUT (M.). - Géométrie analytique rigide et applications. - Basel, Birkhäuser, 1982 (Progress in Mathematics, 18).
- [2] GERRITZEN (L.) and VAN DER PUT (M.). - Schottky groups and Mumford curves. - Berlin, Springer-Verlag, 1980 (Lecture Notes in Mathematics, 817).