ALAIN ESCASSUT

Principe du maximum et théorème de Lubin-Hensel dans $H(D)[[Y]]$

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 9, n° 1 (1981-1982), exp. n° 9, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1981-1982__9_1_A5_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
9e année, 1981/82, n° 9, 11 p.

7 décembre 1981

PRINCIPE DU MAXIMUM
ET THÉORÈME DE LUBIN-HENSEL DANS $H(D)[[Y]]$

par Alain ESCASSUT (*)

Définition. - Rappelons d'abord qu'un fermé borné D de K est dit calibré si $\text{diam}(D) \in |K|$ et si, pour tout trou T de D, $\text{diam}(T) \in |K|$ [2].

En outre, nous dirons ici qu'une partie D de K est fortement infraconnexe si, pour tout trou $T = d^-(a, r)$, il existe une suite b_n de D telle que

$$|b_n - a| = |b_n - b_m| = r , \quad \forall n \neq m .$$

Remarque. - On montre aisément qu'un ensemble fortement infraconnexe est infraconnexe. En effet, si un ensemble n'est pas infraconnexe, il admet au moins une couronne vide qui contient des trous $d^-(a, r)$ tels que $C(b, r) \cap D = \emptyset$.

THÉORÈME 1. - *Soit D un infraconnexe fermé borné. Alors les 2 propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) *D est fortement infraconnexe et calibré*

(ii) *Pour tout $f \in H(D)$, il existe $\alpha \in D$ tel que $|f(\alpha)| = \|f\|_D$.*

On montre le théorème 1 essentiellement à l'aide de la proposition 1 suivante, qui est par ailleurs utilisée dans la démonstration du théorème de Lubin-Hensel.

PROPOSITION 1. - *Soit D un fermé borné fortement infraconnexe, et soit $f \in H(D)$ tel que $\|f\|_D \in |K|$. Alors il existe α tel que $|f(\alpha)| = \|f\|_D$.*

D'après les propriétés Mittag-Lefflériennes de f, on sait que ou bien

(1) il existe $f_0 \in H(\mathbb{D})$ tel que $\|f_0\|_{\mathbb{D}} = \|f\|_D$

(avec $\mathbb{D}$ = enveloppe cerclée de D), ou bien

(2) il existe un trou T de D de la forme $d^-(b, R)$

et il existe $f_1 \in H(C\, T)$ tel que $\lim_{|x|\to\infty} f_1(x) = 0$ et tel que $\|f_1\|_{C\,T} = \|f\|_D$.

Par exemple, supposons que nous somme dans le cas (1), et soit

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (x - a)^n \quad \textbf{où} \quad \lambda_n \in K .$$

Alors $\|f_0\|_{\mathbb{D}}$ est de la forme $|\lambda_q| R^q$, d'où $R^q \in |K|$, et donc $R \in |K|$ (puisque K est algébriquement clos).

(*) Alain ESCASSUT, Laboratoire de mathématiques et d'informatique associé au CNRS, Université de Bordeaux-I, 351 cours de la Libération, 33405 TALENCE CEDEX.

On procèderait de même dans le cas (2) pour $f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n/(x-b)^n$, et on montrerait que $r \in |K|$.

Soit $a \in D$. Alors, puisque D est fortement infraconnexe, il existe une suite a_n de D telle que

$$|a_n - a| = |a_n - a_m| = R \,, \quad \forall\ n \neq m \quad \text{dans le cas (1)}$$

$$|a_n - b| = |a_n - a_m| = r \,, \quad \forall\ n \neq m \quad \text{dans le cas (2)} .$$

Par suite, pour n assez grand, on sait que

$$v(f_0(a_n)) = v_a(f_0 \,, -\log R) = -\log\|f_0\|_{\mathbb{D}} \quad \text{dans le cas (1)}$$

$$v(f_1(a_n)) = v_b(f_1 \,, -\log r) = -\log\|f_1\|_{C\,T} \quad \text{dans le cas (2)} .$$

Ainsi $\|f\|_D$ est bien atteint.

Preuve du théorème 1. – Soit $R = \mathrm{diam}(D)$. Il est facile de voir que (ii) entraine (i). En effet, supposons D non calibré. Par exemple, supposons $R \notin |K|$. Soit $a \in D$; alors

$$\|x - a\|_D = R > |\alpha - a| \,, \quad \forall\ \alpha \in D .$$

De même si le diamètre r d'un trou $T = d^-(a\,,\,r)$ n'appartient pas à $|K|$, l'élément $h(x) = 1/(x-a)$ montre que

$$\left\|\frac{1}{x-a}\right\| = \frac{1}{r} > |h(\alpha)| \,, \quad \forall\ \alpha \in D .$$

Enfin, supposons D non fortement circonférencié, et soit $T = d^-(a\,,\,r)$ un trou de D tel que seul un nombre fini de classes du cercle $C(a\,,\,r)$ rencontre D ; notons $d^-(a_i\,,\,r)_{1\leq i\leq n}$, ces classes, et soit

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)/(x-a)^{n+1} .$$

Alors $\|h\|_D = 1/r$, mais $|h(x)| < 1/r$, $\forall\ x \in K$ tel que $|x-a| \geqslant r$, donc en particulier $|h(x)| < \|h\|_D$, $\forall\ x \in D$.

Montrons maintenant que si D est calibré et fortement infraconnexe, alors il existe $\alpha \in D$ tel que $|f(\alpha)| = \|f\|_D$. Pour cela, il suffit de montrer que $\|f\|_D \in |K|$ et d'appliquer la proposition 1.

En effet :
ou bien $\log\|f\|_D$ est de la forme

(3) $$v_a(f_0 \,, \log R) \,, \quad f_0 \in H(\mathbb{D}) \,,$$

et alors puisque D est calibré, $R \in |K|$, d'où $v_a(f_0 \,, -\log R) \in v(K)$

ou bien $\log\|f\|_D$ est de la forme

(4) $$v_b(f_1 , -\log r) , \quad f_1 \in H(\complement\, T) ,$$

où $T = d^-(b , r)$, et alors $r \in |K|$, d'où $v_b(f_1 , -\log r) \in v(K)$. Ainsi $\|f\|_D \in |K|$ dans tous les cas ce qui achève la démonstration.

<u>Théorème de Lubin-Hensel</u>. - Avant d'énoncer le théorème 2 précisons quelques notations.

Soit D un fermé borné de K , et soit

$$F(Y) = \sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(x)\ Y^s \in H(D)[[Y]] .$$

Pour tout $\alpha \in D$ fixé, on notera

$$F_\alpha(Y) = \sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(\alpha)\ Y^s .$$

THÉORÈME 2. - <u>Soit</u> D <u>un ouvert fermé borné fortement infraconnexe de</u> K , <u>sans</u> T-<u>filtre, et soit</u>

$$F(Y) = \sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(x)\ Y^s \in H(D)[[Y]]$$

<u>tel que</u>

$$\limsup_{s\to\infty} \left\| \frac{\xi_s^{n-\ell}\ \xi_\ell^{s-n}}{\xi_n^{s-n}} \right\|_D < 1 ,$$

pour tout $\ell = 0 , \ldots , n-1$.

<u>Soit</u> M <u>l'ensemble des</u> $\alpha \in D$ <u>tels que</u> $\xi_i(\alpha) = 0$ <u>pour tout</u> $i = 0 , \ldots , n-1$. <u>Supposons qu'il existe une fonction bornée</u> r <u>dans</u> $D \setminus M$ <u>à valeurs dans</u> $\mathbb{R}_+$, <u>telle que, pour tout</u> $x \in D \setminus M$, <u>le disque</u> $d(0 , r(x))$ <u>contienne exactement</u> n <u>zéros</u> $(y_1(x) , \ldots , y_n(x))$ <u>de</u> F_x <u>(distincts ou confondus). Alors</u> F <u>se factorise dans</u> $H(D)[[Y]]$ <u>sous la forme</u> $F = PG$, <u>où</u>

$$P(Y) = \prod_{i=1}^{n} (Y - y_i(x)) \in H(D)[Y]$$

<u>et où</u> $G \in H(D)[[Y]]$.

COROLLAIRE. - <u>Soit</u> D <u>un ouvert fermé borné fortement infraconnexe de</u> K , <u>sans</u> T-<u>filtre, et soit</u>

$$F(Y) = \sum_{s=0}^{q} \xi_s(x)\ Y^s \in H(D)[Y] .$$

<u>Soit</u> $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant q$, <u>et soit</u> M <u>l'ensemble des</u> $\alpha \in D$ <u>tels que</u> $\xi_i(\alpha) = 0$ <u>pour tout</u> $i = 0 , \ldots , n-1$. <u>On suppose que, pour tout</u> $x \in D \setminus M$, <u>il existe un disque</u> $d(0 , r(x))$ <u>contenant exactement</u> n <u>zéros (distincts ou confondus)</u>

$(y_1(x), \dots, y_n(x))$ de F_x.

Alors F se factorise dans $H(D)[Y]$ sous la forme $F = PG$, où

$$P(Y) = \prod_{i=1}^{n} (Y - y_i(x)) \in H(D)[Y] ,$$

et où $G(Y) \in H(D)[Y]$ $(\deg G = q - n)$.

Preuve. - Quand $F \in H(D)[Y]$, la condition sur la lim sup du théorème 2 est inutile.

Remarque 1. - Le polynôme $F(Y) = x + x^2 Y$, montre qu'il est indispensable de supposer la fonction r bornée dans $D \setminus M$, même si par exemple on choisit pour M l'ensemble des $x \in D$ tels que $\xi_0(x) = \dots = \xi_{n-1}(x) = 0$.

Remarque 2. - Le polynôme $F(Y) = 1 + Y + xY^2$ montre que l'hypothèse " D fortement infraconnexe" est elle aussi indispensable. Considérons en effet $D = d^-(0, 1)$. Alors, pour tout $x \in D$, il existe bien un disque $d(0, r(x))$, où $r(x) = 1$, qui contient un seul zéro $a(x)$ de F_x.

Soit $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{1/2}{i}(-4x)^i$; alors $a(x) = (\varphi(x) - 1)/2x$.

Or on va voir que $\varphi \notin H(D)$ et, par suite, le polynôme $P(Y) = Y - a(x)$ n'appartient pas à $H(D)[[Y]]$. En effet, supposons $\varphi \in H(D)$; alors il existe $P/Q \in R(D)$ tel que $\|\varphi - P/Q\|_D < 1$, d'où $\|\varphi^2 - P^2/Q^2\|_D < 1$, et par suite, $\|\varphi^2 Q^2 - P^2\|_D < 1$. Or $\varphi^2 = 1 - 4x$ d'où, dans l'anneau résiduel $K[X]$, on obtient $(\bar{1} - \bar{4}x)\bar{Q}^2 = \bar{P}^2$ ce qui est impossible si $\bar{2} \neq 0$. (On pourrait choisir un exemple différent si la caractéristique résiduelle est 2).

Pour établir le théorème 2, on commence par démontrer la proposition 2 en reprenant la démonstration classique du lemme de Hensel.

PROPOSITION 2. - Soit D un fermé borné de K, et soit

$$F(Y) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(x) Y^i \in H(D)[[Y]]$$

On suppose qu'il existe un entier n tel que $\xi_n = 1$ et une fonction bornée μ définie dans D, à valeur dans $\underset{\sim}{R}$ ainsi qu'un réel $\lambda > 0$ tels que, pour tout $x \in D$, on ait

$$v(\xi_i(x)) + i\mu(x) \geq v(\xi_n(x)) + n\mu(x) \quad \text{si } i = 0, \dots, n-1$$

et

$$v(\xi_i(x)) + i\mu(x) \geq \lambda + n\mu(x) \quad \text{si } i > n .$$

Alors il existe un polynôme unitaire $P(Y) \in H(D)[Y]$ de degré n tel que, pour tout $x \in D$, P_x soit le polynôme unitaire qui admet pour zéros, les zéros *de* F_x *dans* $d(0\,,\,p^{-\mu(x)})$.

Preuve. – On notera μ_1 et μ_2 deux réels tels que $\mu_1 < 0 < \mu_2$ et

$$\mu_1 \leqslant \mu(x) \leqslant \mu_2\,, \quad \forall\ x \in D\,.$$

Soit $P_1 = \sum_{i=0}^{n} \xi_i(x)\ Y$. Puisque P_1 est unitaire, on peut effectuer la division euclidienne dans l'anneau $H(D)[[Y]]$, de $F(Y)$ par P_1 , et l'on obtient

$$G_1(Y) \in H(D)[[Y]] \quad \text{et} \quad R_1 \in H(D)[Y]$$

tels que $F = P_1\,G_1 + R_1$, et $\deg R_1 < n$.

En outre G_1 et R_1 sont uniques satisfaisant ces propriétés.

Plus généralement supposons obtenus pour chaque entier $j = 0\,,\,\dots\,,\,m$,

$P_j \in H(D)[Y]$, unitaire, de degré n ,

$G_j \in H(D)[[Y]]$

$R_j \in H(D)[Y]$ tel que $\deg R_j < n$, et tels que $F = P_m\,G_m + R_m$.

On pose alors $P_{m+1} = P_m + R_m$, et on voit que P_{m+1} est encore unitaire et de degré n .

Il existe donc $G_{m+1} \in H(D)[[Y]]$ et $R_{m+1} \in H(D)[Y]$ tel que $\deg R_{m+1} < n$ et tels que $F = P_{m+1}\,G_{m+1} + R_{m+1}$, et $G_{m+1}\ R_{m+1}$ sont uniques. On peut donc construire

- une suite de polynômes unitaires, R_m de degré n ,
- une suite de polynômes Q_m de degré $< n$,
- une suite G_m de $H(D)[[Y]]$

telles que, pour tout $m \in \underset{\sim}{N}$, F se décompose dans $H(D)[[Y]]$ sous la forme $F = P_m\,G_m + R_m$.

Par hypothèse, et compte tenu que $\xi_n = 1$, on a

$$v(\xi_i(x)) + i\mu(x) \geqslant n\mu(x) + \lambda \quad \text{pour tout} \quad i > n\,,$$

d'où

(5) $$v((F - P_1)_x\,,\,\mu(x)) \geqslant n\mu(x) + \lambda\,, \quad \forall\ x \in D\,.$$

Posons $h(x) = v((F - P_1)_x\,,\,\mu(x)) - n\mu(x)$. Supposons que jusqu'au rang q , $P_m\,,\,G_m\,,\,R_m$ vérifient

(6) $v((P_m - P_{m-1})_x\,,\,\mu(x)) \geqslant (m-1)\,h(x) + n\mu(x)$

(7) $v((P_m)_x\,,\,\mu(x)) = n\mu(x)$

(8) $v((R_m)_x\,,\,\mu(x)) \geqslant mh(x) + n\mu(x)$

(9) $v((G_m - G_{m-1})_x\,,\,\mu(x)) \geqslant (m-1)\,h(x)$

(10) $v((G_m)_x\,,\,\mu(x)) = 0$.

Alors nous allons montrer que les relations (6), (7), (8), (9) et (10) sont encore vraies au rang $q+1$.

Remarquons d'abord que (6) est satisfaite au rang $q+1$ grâce à (8) vrai au rang q, et que (7) est satisfaite au rang $q+1$, car $v((P_{q+1})_x, \mu(x)) \geqslant n\mu(x)$ du fait que P_{q+1} est unitaire, et $v((P_{q+1})_x, \mu(x)) \leqslant n\mu(x)$ d'après (7) et (8) vrais au rang q.

D'autre part, on a

$$P_q G_q + R_q = (P_q + R_q) G_{q+1} + R_{q+1} ,$$

d'où

$$- R_q G_{q+1} = P_q(G_{q+1} - G_q) + R_{q+1} - R_q .$$

Et on reconnait ici la division euclidienne de $-R_q G_{q+1}$ par P_q.

Par suite, et toujours d'après le lemme 4.4.2 de [1], on a donc

$$v((G_{q+1} - G_q)_x , \mu(x)) \geqslant v((R_q G_{q+1})_x , \mu(x)) - v(P_q , \mu(x))$$

d'où, d'après (7) et (8) vrais au rang q,,

$v((G_{q+1} - G_q)_x , \mu(x)) \geqslant qh(x) + n\mu(x) + v((G_{q+1})_x , \mu(x)) - n\mu > v((G_{q+1})_x , \mu(x))$

ce qui prouve que $v((G_{q+1})_x , \mu(x)) = v((G_q)_x , \mu(x))$ et par suite

$$v((G_{q+1} - G_q)_x , \mu(x)) \geqslant qh(x) , (9).$$

Alors, toujours d'après le lemme 4.4.2 de [1], on voit que

$$v((R_{q+1} - R_q)_x , \mu(x)) \geqslant v((- R_q G_{q+1})_x , \mu(x)) = v((R_q)_x , \mu(x)) = qh(x) .$$

Nous allons en déduire la relation (8) au rang $q+1$. En effet, considérons la division euclidienne de $R_q(1 - G_{q+1})$ par P_q. On obtient

$$R_q(1 - G_{q+1}) = P_q(G_{q+1} - G_q) + R_{q+1} ,$$

d'où l'on déduit que

(11) $v((G_{q+1} - G_q)_x , \mu(x))$

$$\geqslant v((R_q)_x , \mu(x)) + v(1 - (G_{q+1})_x , \mu(x)) - v((P_q)_x , \mu(x)) .$$

Et $v((R_{q+1})_x , \mu(x)) \geqslant v((R_q)_x , \mu(x)) + v((1 - G_{q+1})_x , \mu(x))$.

Or $v((R_q)_x , \mu(x)) \geqslant qh(x) + n\mu(x)$, et il reste donc à montrer que

$$v((1 - G_{q+1})_x , \mu(x)) \geqslant h(x) .$$

Pour cela, remarquons d'abord que (11) ainsi que (7) et (8) vrais au rang q, et

(10) déjà vérifié au rang $q+1$, nous donnent

(12) $$v((G_{q+1} - G_q)_x , \mu(x)) \geq qh(x) \geq h(x) .$$

Considérons

$$v(1 - (G_{q+1})_x , \mu(x)) \geq \min[v((G_1)_x - 1 , \mu(x)) , \inf_{2\leq m\leq q} v((G_{m+1} - G_m)_x , \mu(x))]$$

Grâce à (9) déjà vrai pour $m \leq q$, et à (11), on voit que

$$\inf_{2\leq m\leq q} v((G_{m+1} - G_m)_x , \mu(x)) \geq h(x)$$

et que la division de $F - P$ par P donne

$$v((G_1)_x - 1 , \mu(x)) \geq v((F - P_1)_x , \mu(x)) - v((P_1)_x , \mu(x)) = h(x)$$

d'où finalement

$$v(1 - (G_{q+1})_x , \mu(x)) \geq h(x) .$$

Alors d'après (8) vrai au rang q , on a donc bien

$$v((R_{q+1})_x , \mu(x)) \geq (q + 1)h + n\mu(x) \quad \text{au rang } q + 1 .$$

Les relations (6), (7), (8), (9), (10) sont donc vraies par récurrence, pour tout $m \in \mathbb{N}$ (puisqu'elles sont vraies de façon évidentes pour $m = 1$), et on en déduit aisément, que la suite R_m converge vers 0 dans $H(D)[Y]$ pour la norme de Gauss définie sur $H(D)[Y]$ par

$$\|\Sigma_{i=0}^q a_i(x) Y^i\|_D^* = \max_{0\leq i\leq q}\|a_i(x)\|_D ,$$

puisque d'après (10), on a $-\log\|R_m\|_D^* \geq m\lambda + n\mu_1$.

Alors la suite P_m converge elle aussi dans $H(D)[Y]$ vers un polynôme unitaire P de degré n .

Maintenant, d'après la démonstration classique du lemme de Hensel dans $K[[Y]]$ appliquée à F_x , on sait que, pour tout x fixé, la suite $(P_m)_x$ converge vers le polynôme unitaire dont les zéros sont les zéros de F_x dans $d^-(0 , p^{-\mu(x)})$, ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 3. - <u>Soit</u> D <u>un fermé borné de</u> K , <u>et soit</u> $F(Y) \in H(D)[[Y]]$. <u>On suppose qu'il existe un polynôme unitaire</u> $P(Y) \in H(D)[Y]$ <u>de degré</u> n , <u>et une fonction</u> r <u>définie dans</u> D , <u>à valeurs dans</u> $\mathbb{R}_+$ <u>tels que, pour tout</u> $x \in D$, <u>les</u> n <u>zéros de</u> P_x <u>soient les zéros de</u> F_x <u>dans</u> $d(0 , r(x))$.

<u>Alors</u> F <u>se factorise dans</u> $H(D)[[Y]]$ <u>sous la forme</u>

$$F(Y) = P(Y)\ G(Y) \quad (G(Y) \in H(D)[[Y]]) .$$

<u>Preuve</u>. - Considérons la division euclidienne de F par le polynôme unitaire P

dans $H(D)[[Y]]$.

On a donc $F = PG + R$, où $G \in H(D)[[Y]]$ et $R \in H(D)[Y]$, $\deg R < n$.

Particulièrement, $F_x = P_x G_x + R_x$. Mais, puisque les zéros de P_x dans $d(0, r(x))$ sont ceux de F_x , on reconnaît ici le lemme de Hensel connu dans $K[[Y]]$ et, par suite, $R_x = 0$. Comme ceci est vrai pour tout $x \in D$ on a donc $R = 0$.

Rappelons maintenant le classique théorème de Riemann.

LEMME 1. - <u>Soit</u> $D = d(a, r) \setminus \{a\}$, <u>et soit</u> $f \in H(D)$ <u>tel que</u> $\|f\|_D < +\infty$. <u>Alors</u> f <u>se prolonge en un élément de</u> $H(d(a, r))$.

Rappelons également une propriété classique des éléments quasi inversibles.

LEMME 2. - <u>Soit</u> D <u>un fermé borné et soient</u> $f_1, \dots, f_n$ <u>des éléments quasi inversibles de</u> $H(D)$ <u>tels que l'ensemble des</u> $x \in D$ <u>pour lesquels</u>

$$f_i(x) = 0 , \quad \forall\, i = 1, \dots, n ,$$

<u>est vide. Alors il existe</u> $\delta > 0$ <u>tel que</u>

$$\max_{1 \leq i \leq n} |f_i(x)| \geq \delta , \quad \forall\, x \in D .$$

<u>Preuve du théorème</u> 2. - D'après les hypothèses faites sur D , on sait que tout élément non nul de $H(D)$ est quasi inversible, et en particulier les éléments qui n'ont pas de zéro dans D sont inversibles.

D'autre part, d'après la proposition 3, on voit qu'il suffit de montrer que le polynôme $P(Y) = \prod_{i=1}^{n} (Y - y_i(x))$ appartient à $H(D)[Y]$.

Enfin, on peut toujours se ramener au cas où $r(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i(x)|$, ce que nous supposerons donc, et on a alors les relations classiques

$$(13) \qquad |\xi_n(x)|\ r(x)^n = \max_{0 \leq i \leq n-1} |\xi_i(x)|\ r(x)^i .$$

$$(14) \qquad |\xi_n(x)|\ r(x)^n > |\xi_s(x)|\ r(x)^s \quad \text{pour tout} \quad s > n .$$

D'après (13), on voit que ξ_n ne s'annule pas dans $D \setminus M$.

Supposons d'abord que $M = \emptyset$. Alors ξ_n est inversible dans $H(D)$ et on peut supposer $\xi_n = 1$ car $\xi_n^{-1} F$ satisfait encore les hypothèses du théorème.

Maintenant, d'après le lemme 2, on sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\max_{0 \leq i \leq n-1} |\xi_i(x)| \geq \delta$$

quel que soit $x \in D$. Alors on voit, grâce à (13) que, pour tout $x \in D$, il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que $\delta \leq r(x)^{n-h}$.

Donc la fonction $\mu(x) = -\log r(x)$ est bornée dans D (puisque r est bornée par hypothèse).

Pour appliquer la proposition 2, il suffit maintenant de montrer que les relations (15) et (16) suivantes sont satisfaites pour tout $x \in D$.

(15) $$v(\xi_i(x)) + i\mu(x) \geq n\mu(x) \quad (0 \leq i \leq n-1)$$

(16) $$v(\xi_s(x)) + s\mu(x) \geq \lambda + n\mu(x) \quad \text{pour tout} \quad s > n .$$

En fait (15) est équivalente à (13), et il reste donc à trouver $\lambda > 0$ tel que (16) soit satisfaite.

Par hypothèse on a

$$\lim_{s \to \infty} \sup \|\xi_s^{n-\ell} \ \xi_\ell^{s-n}\|_D < 1 \quad (0 \leq \ell \leq n-1) ,$$

et il existe donc $\gamma > 0$, et $N \in \underset{\sim}{N}$ tel que pour $s \geq N$, et pour tout $\ell = 0 , \ldots , n-1$, on ait

(17) $$v(\xi_s^{n-1}(x) \ \xi_\ell^{s-n}(x)) \geq \gamma \quad \text{quel que soit} \quad x \in D .$$

Fixons $x \in D$ et soit $h < n$ tel que $r(x)^{n-\ell} = |\xi_h(x)|$. Alors, pour tout $\ell \leq n-1$, on a $r(x)^{n-\ell} \geq |\xi_\ell(x)|$.

Soit $s > n$, on sait que $|\xi_s(x)| \ r(x)^s < r(x)^n$ et par suite

$$r(x) \geq |\xi_\ell(x)| \ 1/(n-\ell) ,$$

d'où

$$\xi_s(x) \ (\xi_\ell(x)) \ (s-n)/(n-\ell) < 1$$

c'est-à-dire

(18) $$v((\xi_s(x))^{n-\ell} \ (\xi_\ell(x))^{s-n}) > 0 \quad (\ell = 0 , \ldots , n-1 , \quad s > n) .$$

Ceci est vrai en particulier pour $s = n+1 , \ldots , N$.

Maintenant, puisque D est fortement infraconnexe, on peut appliquer la proposition 1, et on en déduit que

$$\inf_{x \in D} v(\xi_s(x)^{n-\ell} \ \xi_\ell(x)^{s-n}) > 0 \quad (\text{pour tout} \quad s > n , \ \ell < n) .$$

En effet, supposons

$$\inf_{x \in D} v(\xi_s(x)^{n-\ell} \ \xi_\ell(x)^{s-n}) = 0$$

pour tout couple d'entier (s , ℓ) $s > n$, $\ell < n$. Alors

$$\|\xi_n^{n-\ell} \ \xi_\ell^{s-n}\|_D = 1$$

et la proposition 1 montre qu'il existe $\alpha \in D$ tel que

$$|\xi_s(\alpha)^{n-\ell} \ \xi_\ell(\alpha)^{s-n} = 1 ,$$

ce qui contredit (18).

Posons $\gamma_{\ell,s} = -\log\|\xi_s^{n-\ell}\,\xi_\ell^{s-n}\|_D$ pour $n+1 \leq s \leq N$, $\ell \leq n$ et $\lambda = 1/n \min(\gamma, \min_{0\leq\ell\leq n-1}(\gamma_{\ell,s}))$. Alors on a la relation

$$(19) \qquad -\log\|\xi_s^{n-\ell}\,\xi_\ell^{s-n}\|_D \geq n\lambda$$

quel que soit $s > n$, et $\ell \leq n-1$. On peut facilement en déduire (16). Fixons $x \in D$ et soit $h \in \mathbb{N}$ tel que $h < n$ et $r(x) = |\xi_h(x)|^{1/(n-h)}$. Alors pour tout $s > n$, on a

$$v(\xi_s(x)) + s\mu(x) - n\mu(x) = v(\xi_s(x)) + \frac{s-n}{n-h}\,v(\xi_h(x))$$

donc d'après (19), $v(\xi_s(x)) + (s-n)\,\mu(x) \geq \lambda$ et c'est bien la relation (16). Le théorème est donc établi quand $M = \emptyset$.

Il reste donc à établir le théorème quand $M \neq 0$. Remarquons d'abord que μ est fini puisque les éléments de $H(D)$ sont quasi inversibles. Soit $M = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_q\}$ et pour chaque $\rho > 0$, soit

$$D_\rho = D \setminus \bigcup_{i=1}^q d^-(\alpha_i, \rho).$$

Alors puisque $D_\rho \cap M = \emptyset$, on peut appliquer le théorème, déjà établi quand $M = \emptyset$, à F dans $H(D_\rho)[[Y]]$. Alors $P \in H(D_\rho)[Y]$ quel que soit $\rho > 0$.

Soit $P(Y) = \sum_{i=0}^n a_i(x)\,Y^i$, $(a_n = 1)$. On voit donc que $a_i \in H(D_\rho)$, $\forall \rho > 0$. Mais puisque la fonction r est bornée dans $D \setminus M$, on voit que les a_i sont aussi bornés, puisque P est unitaire, et par suite, M étant fini, on peut prolonger chaque a_i en un élément de $H(D)$ grâce au théorème de Riemann ultramétrique, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Yvette). - Les nombres p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1975 (Collection SUP, "Le Mathématicien", 14).

[2] ESCASSUT (Alain). - Algèbres d'éléments analytiques en analyse non archimédienne, Koninkl. nederl. Akad. Wetensch., Proc., Série A, t. 77, 1974, p. 339-351.

[3] ESCASSUT (Alain). - Eléments analytiques et filtres percés sur un ensemble infraconnexe, Annali di Mat. pura ed appl., Série 4, t. 110, 1976, p. 335-352.

[4] ESCASSUT (Alain). - T-filtres, ensembles analytiques et transformation de Fourier p-adique, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 25, 1975, n° 2, p. 45-80.

[5] ESCASSUT (Alain). - Algèbres de Banach ultramétriques et algèbres de Krasner-Tate, "Prolongement analytique et algèbres de Banach ultramétriques", Astérisque, n° 10, 1973, p. 1-107.

[6] ESCASSUT (Alain). - Éléments spectralement injectifs et générateurs universels dans une algèbre de Tate, Collect. Mat., Barcelona, t. 28, 1977, p. 131-148.

[7] DWORK (Bernard). - On the zeta function of a hypersurface. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des hautes Etudes scientifiques, Publications mathématiques, 12, p. 5-68).

[8] DWORK (Bernard). - p-adic cycles. - Paris, Presses universitaires de France, 1969 (Institut des hautes Etudes scientifiques, Publications mathématiques, 37, p. 27-116).

[9] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique dans les corps valués complets : préservation de l'analycité par la convergence uniforme et par la dérivation ; théorème de Mittag-Leffler généralisé pour les éléments analytiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 244, 1957, p. 2570-2573.

[10] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique dans les corps valués complets : démonstration du théorème de Mittag-Leffler ; Singularités au bord, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 245, 1957, p. 1285-1288.

[11] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, Colloques internationaux du CNRS, 143 : "Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres [1964. Clermont Ferrand]", p. 97-141. - Paris, Editions du Centre national de la Recherche scientifique, 1966.

[12] LAZARD (Michel). - Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des hautes Etudes scientifiques, Publications mathématiques, 14, p. 47-75).

[13] LUBIN (J.). - Article non publié, 1969.

[14] LUBIN (Jonathan). - Canonical subgroups of formal groups, Trans. Amer. math. Soc., t. 251, 1979, p. 103-127.

[15] MOTZKIN (E.) and ROBBA (Philippe). - Prolongement analytique en analyse p-adique, Séminaire de Théorie des Nombres, Bordeaux, 1968/69, n° 3.

[16] ROBBA (Philippe). - Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets, "Prolongement analytique et algèbres de Banach ultramétrique", Astérisque, n° 10, 1973, p. 109-216.