MICHEL EMSALEM

Comportement des fonctions L p-adiques au voisinage de zéro

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 9, nº 1 (1981-1982), exp. nº 17, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1981-1982__9_1_A10_0>

Groupe d'étude D'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
9e année, 1981/82, n° 17, 19 p.
1er et 8 mars 1982

COMPORTEMENT DES FONCTIONS L p-ADIQUES AU VOISINAGE DE ZÉRO

par Michel EMSALEM (*)

0. Introduction.

L'objet de cet exposé est d'énoncer une conjecture de Gross sur le premier terme non nul dans le développement limité au voisinage de zéro des fonctions L p-adiques attachées à certaines représentations du groupe de Galois d'un corps de nombres totalement réel [G]. GROSS introduit un régulateur p-adique, dont il conjecture qu'il est non nul et qu'il représente la "partie transcendante" du coefficient du terme principal dans le développement limité de L_p au voisinage de zéro.

Bien qu'on ne sache pas établir de relation entre ce qui se passe en 0 et ce qui se passe en 1 , et qu'il n'y ait pas de lien connu entre le régulateur de Leopoldt et celui de Gross, il existe des ressemblances formelles entre les deux situations. On démontrera plus loin que la conjecture de Shanuel entraîne que le régulateur de Gross est non nul. De même, la démonstration de la non-nullité du régulateur de Gross dans le cas abélien sur $\underset{\sim}{Q}$ est semblable à celle de la non-nullité du régulateur de Leopoldt dans ce cas.

Dans les premiers paragraphes, suivant Gross [G], on expose les résultats concernant les fonctions L^* complexes, modifiées, et on cherche à introduire "naturellement" à partir de ces résultats la conjecture p-adique. Le lecteur pourra trouver également dans [K] et dans [T] des exposés de cette question.

1. Fonctions L d'Artin complexes au voisinage de 0 .

1.1 Notations. - k désigne un corps de nombres totalement réel, et K une extension galoisienne finie de k que l'on supposera de type C. M.

Pour w , place finie de k , on note N_w la norme absolue de w , et F_w un Frobenius relatif à w dans Gal(K/k) (défini à conjugaison près et à multiplication près par un élément du groupe d'inertie I_w d'un idéal au-dessus de w). On note encore D_w le groupe de décomposition d'un idéal au-dessus de w . (V , ρ) désignera une représentation impaire de Gal(K/k) sur un espace vectoriel de dimension finie sur $\underset{\sim}{C}$: $\rho : \mathrm{Gal}(K/k) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\underset{\sim}{C}}(V)$.

La fonction L d'Artin que l'on considérera est la fonction méromorphe sur $\underset{\sim}{C}$ qui vérifie :

$$(1) \qquad \forall\, s \in \underset{\sim}{C}\ ,\quad \mathrm{Re}(s) > 1\ ,\quad L(V\ ,\ s) = \prod_w \det(1 - (Nw)^{-s}\, F_w|_{V^{I_w}})^{-1}\ .$$

(*) Texte reçu le 10 juin 1982.
Michel EMSALEM, 23 rue Larrey, 75005 PARIS.

p est un nombre premier fixé dans toute la suite. On définit la fonction L^* modifiée :

$$(2) \qquad \forall\, s \in \underset{\sim}{C}\,, \quad L^*(V\,,\, s) = \prod_{w|p} \det(1 - (N_w)^{-s}\, F_w\big|_{V^{I_w}}) \,.\, L(V\,,\, s)\,.$$

PROPOSITION 1. - $\operatorname{ord}_{s=0} L^*(V\,,\, s) = \sum_{w|p} \dim V^{D_w}$.

Démonstration. - V étant une représentation totalement impaire, il en est de même de V^* ; elle ne contient aucun exemplaire de la représentation unité, et donc $L(V^*\,,\, s)$ est régulière en $s = 1$ et $L(V^*\,,\, 1) \neq 0$. L'équation fonctionnelle permet alors d'écrire :

$$\operatorname{ord}_{s=0} L(V\,,\, s) = \operatorname{ord}_{s=1} L(V^*\,,\, s) = 0\,.$$

Il vient donc :

$$\operatorname{ord}_{s=0} L^*(V\,,\, s) = \sum_{w|p} \operatorname{ord}_{s=0}(\det(1 - (N_w)^{-s}\, F_w\big|_{V^{I_w}}) = \sum_{w|p} \dim(V^{D_w})\,.$$

1.2. Interprétation. - On note S l'ensemble de toutes les places de k à l'infini et des places finies de k divisant p.

Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de K, on notera $\mathfrak{p}\,|\,S$ si la valuation induite par $\mathfrak{p}$ sur k appartient à S.

Définitions. - $X \subset \bigoplus_{\mathfrak{p}|S} \underset{\sim}{Z}\mathfrak{p}$; $X = \{\sum_{\mathfrak{p}|S} n_{\mathfrak{p}}\, \mathfrak{p}\ ;\ \sum_{\mathfrak{p}|S} n_{\mathfrak{p}} = 0\}$. X est de façon évidente un $\mathrm{Gal}(K/k)$-module.

On notera X^- la partie sur laquelle la conjugaison complexe c agit par multiplication par -1.

$$X^- = \{\sum_{\mathfrak{p}|S} n_{\mathfrak{p}}\, \mathfrak{p}\ ;\ n_{\mathfrak{p}} + n_{\mathfrak{p}^c} = 0\}\,.$$

On note $\underset{\sim}{C}X^- = X^- \otimes_{\underset{\sim}{Z}} \underset{\sim}{C}$ et $\underset{\sim}{C}_p\, X^- = X^- \otimes_{\underset{\sim}{Z}} \underset{\sim}{C}_p$.

LEMME 1. - $\dim(V \otimes \underset{\sim}{C}X^-)^G = \sum_{w|p} \dim V^{D_w}$, la somme étant étendue à toutes les places finies de k divisant p.

Démonstration. - Soit, pour chaque w de k divisant p, un idéal $\mathfrak{p}_w$ choisi de K au-dessus de w. Notons D_w le groupe de décomposition de $\mathfrak{p}_w$.

$$\underset{\sim}{C}X^- = \bigoplus_w (\sum_{\mathfrak{p}|w} \underset{\sim}{C}(\mathfrak{p} - \mathfrak{p}^c)) = \bigoplus_w (\underset{\sim}{C}X^-)_w\,,$$

où chacun des $(\underset{\sim}{C}X^-)_w$ est un $\mathrm{Gal}(K/k)$-module. En tant que représentation de $\mathrm{Gal}(K/k)$, $(\underset{\sim}{C}X^-)_w$ est isomorphe au sous-espace de la représentation de permutation de G/D_w, où la conjugaison complexe c agit par -1.

Donc $(\underset{\sim}{C}X^-)_w \simeq \mathrm{Ind}_{D_w}^G 1_{D_w} - \mathrm{Ind}_{(1,c)D_w}^G 1_{(1,c)D_w}$.

On applique alors la formule de réciprocité, et si χ est le caractère de la représentation V :

$$\langle \chi \cdot (\Sigma_{w|p} \mathrm{Ind}_{D_w}^G 1_{D_w} - \mathrm{Ind}_{(1,c)D_w}^G 1_{(1,c)D_w}) \cdot 1_G \rangle = \dim(V \otimes \underset{\sim}{C}X^-)^G .$$

$$\dim(V \otimes \underset{\sim}{C}X^-)^G = \Sigma_{w|p} \langle \mathrm{Res}_{D_w}^G \chi , 1_{D_w} \rangle_{D_w} - \langle \mathrm{Res}_{(1,c)D_w}^G \chi , 1_{(1,c)D_w} \rangle_{(1,c)D_w} .$$

$$\dim(V \otimes \underset{\sim}{C}X^-)^G = \Sigma_{w|p} \langle \mathrm{Res}_{D_w}^G \chi , 1_{D_w} \rangle_{D_w} = \Sigma_{w|p} \dim V^{D_w} .$$

(comme χ est impair, $\langle \mathrm{Res}_{(1,c)D_w}^G \chi , 1_{(1,c)D_w} \rangle_{(1,c)D_w} = 0$).

Remarque. - Le résultat précédent reste vrai si $\underset{\sim}{C}$ est remplacé par $\underset{\sim}{C}_p$.

Définition. - Posons $\mathrm{ord}_{s=0} L^*(V , s) = r(V)$.

COROLLAIRE 1. - *Pour tout automorphisme* α *de* $\underset{\sim}{C}$, *soit* V^α *la représentation transformée de* V *par* α ; $r(V) = r(V^\alpha)$.

Démonstration. - $\dim(V)^{D_w} = \dim(V^\alpha)^{D_w}$.

PROPOSITION 2. - *Lorsque* s *tend vers* 0,

$$L^*(V , s) \sim L(V)\ s^{r(v)} , \text{ avec } L(V) = A(V)(\log p)^{n(V)} ,$$

où $A(V)$ *est un nombre algébrique vérifiant* $\forall\, \alpha \in \mathrm{Aut}(\underset{\sim}{C})$, $A(V^\alpha) = A(V)^\alpha$.

Démonstration. - Soit f_w le degré résiduel en w ; on voit très facilement que, lorsque s tend vers 0,

$$L^*(V , s) \sim L(V , 0) \Pi_{w|p} (\det(1 - F_w|_{V^{I_w}/V^{G_w}}) f^{\dim V^{G_w}}) s^{r(V)} .$$

Il suffit clairement de montrer que, pour tout automorphisme α de $\underset{\sim}{C}$, $L(V^\alpha , 0) = (L(V , 0))^\alpha$.

Dans le cas d'une représentation abélienne, si on note χ le caractère associé à la représentation V, la série L peut s'écrire :

$$L(V\ ,\ s) = \sum_{\sigma\in \mathrm{Gal}(K/k)} \chi(\sigma)\ \zeta(\sigma\ ,\ s)$$

comme combinaison linéaire des fonctions zêta partielles. La proposition est une conséquence du théorème de Siegel qui assure en particulier la rationalité des valeurs $\zeta(\sigma\ ,\ 0)$. Dans le cas général, on se ramène au cas abélien en utilisant le théorème de Bratter sur les représentations induites.

Introduisons maintenant quelques définitions afin de réénoncer la proposition d'une façon plus adéquate pour la transcription p-adique.

Définitions et notations. - Si $\mathfrak{p}$ est une place finie de K , on note $K_{\mathfrak{p}}$ la complété de K en $\mathfrak{p}$, $N_{\mathfrak{p}}$ le degré local en $\mathfrak{p}$, $|\ |_{\mathfrak{p}}$ la valeur absolue normalisée par ${}_{N_{\mathfrak{p}}}|q|_{\mathfrak{p}} = 1/q$ (q est le nombre premier tel que $\mathfrak{p} \mid q$) et enfin $\|\ \|_{\mathfrak{p}} = |\ |_{\mathfrak{p}}^{N_{\mathfrak{p}}}$

$U = \{u \in K\ ;\ \forall\ \mathfrak{p}$ place de K , $\mathfrak{p} \nmid S$, $|u|_{\mathfrak{p}} = 1\}$ est l'ensemble des S-unités de K .

$$U^- = \{u \in K\ ;\ u^c = u^{-1}\}\ .$$

$$\lambda : \underset{\sim}{C}\, U \longrightarrow \underset{\sim}{C}X$$

$$1 \otimes u \longrightarrow \sum_{\mathfrak{p}|S} (\log \|u\|_{\mathfrak{p}})\ \mathfrak{p}$$

est un G-isomorphisme (d'après le théorème des unités).

$$g : \underset{\sim}{Q}\, U^- \longrightarrow \underset{\sim}{Q}X^-$$

$$1 \otimes u \longrightarrow \sum_{\mathfrak{p}|p} \mathrm{ord}_p(N_{K_{\mathfrak{p}}|\underset{\sim}{Q}p}(u))\ \mathfrak{p}$$

est également un G-isomorphisme qui est lié à λ par $\lambda_{|\underset{\sim}{C}U^-} = -\ (\log p)\ g$.

Remarque. - On vérifie directement très facilement, sans utiliser le théorème des unités que g est un isomorphisme.

Si α est un automorphisme de $\underset{\sim}{C}$, on notera λ^{α} le transformé de λ par α .

On peut énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 3. - Pour tout automorphisme α de $\underset{\sim}{C}$,

$$L(V)^{\alpha}/L(V^{\alpha}) = \det(1 \otimes \lambda^{\alpha} \circ \lambda^{-1}\Big|_{(V\otimes \underset{\sim}{C}X^-)^G})\ .$$

Démonstration. - C'est une conséquence immédiate de la proposition 2 ; il n'y a qu'à constater que

$$((\log p)^{\alpha}/\log p)^{r(V)} = \det(1 \otimes \lambda^{\alpha} \circ \lambda^{-1}\big|_{(V\otimes \underset{\sim}{C}X^{-})^{G}}) .$$

2. Fonctions L p-adiques. Enoncé des conjectures de Gross.

2.1. Notations. – Les notations sont celles du paragraphe précédent. On choisit un isomorphisme σ de corps $\sigma : \underset{\sim}{C} \longrightarrow \underset{\sim}{C}_p$.

A toute représentation V complexe de $\mathrm{Gal}(K/k)$ est associée une représentation V^{σ} sur $\underset{\sim}{C}_p$.

A une représentation paire W sur $\underset{\sim}{C}_p$ de $\mathrm{Gal}(K/k)$, on peut associer une fonction L p-adique méromorphe sur $\underset{\sim}{Z}_p$, régulière, aux entiers strictement négatifs, et vérifiant la formule d'interpolation :

$$L_p(W , 1 - n)^{\sigma-1} = L^*((W \otimes \omega^{-n})^{\sigma^{-1}} , 1 - n) \tag{3}$$

pour tout $n \geqslant 2$, où ω est le caractère de Teichmüller sur $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$.

On commence par définir ces fonctions dans le cas d'une représentation de degré 1 (voir [B], [C] ou [D R]), et on utilise le théorème de Brauer pour une représentation quelconque : si $W = \oplus_i m_i \mathrm{Ind}_{G_i}^{G} \chi_i$, où les m_i sont des éléments de $\underset{\sim}{Z}$ presque tous nuls, $L_p(W , s) = \prod_i (L_p(\chi_i , s))^{m_i}$. Ce qui nous intéresse, c'est la valeur en 0 de $L_p(W , s)$; or les fonctions $L_p(\chi_i , s)$, munies d'un exposant m_i négatif, peuvent s'annuler en $s = 0$, et l'égalité précédente ne nous donne aucune indication en zéro. D'où la restriction $n \geqslant 2$ dans la formule (3).

2.2. Définitions et notations. – Le logarithme p-adique $\log_p$ est normalisé sur $\underset{\sim}{Q}_p^*$ par $\log_p(p) = 0$. On définit un homomorphisme λ_p analogue de λ en remplaçant log par $\log_p$:

$$\lambda_p : \underset{\sim}{C}_p U^{-} \longrightarrow \underset{\sim}{C}_p X^{-}$$

$$1 \otimes u \longrightarrow \sum_{\mathfrak{p}|p} \log_p(N_{K_{\mathfrak{p}}|\underset{\sim}{Q}_p}(u))\, \mathfrak{p} .$$

Soit W une représentation impaire de $\mathrm{Gal}(K/k)$ sur un espace vectoriel de dimension finie sur $\underset{\sim}{C}_p$, on définit le régulateur de Gross :

$$R_p(W) = \det(1 \otimes \lambda_p \circ g^{-1}\big|_{(W\otimes \underset{\sim}{C}_p X^{-})^{G}}) .$$

2.3. Premier énoncé des conjectures de Gross. – Si V est une représentation complexe impaire de $\mathrm{Gal}(K/k)$. On pose

$$L_p(V^{\sigma} \otimes \omega , s) \sim L_p(V^{\sigma})\, s^{r_p(V^{\sigma})}$$

lorsque s tend vers 0 .

GROSS énonce les conjectures suivantes :

(G a') $r_p(V^\sigma) = r(V)$.

(G b') λ_p est un G-isomorphisme.

(G c') $L(V)^\sigma / L_p(V^\sigma) = \det(1 \otimes \lambda^\sigma \circ \lambda_p^{-1} |_{(V^\sigma \otimes \underset{\sim}{C}_p X^-)^G})$.

LEMME 2. - (G a') , (G b') et (G c') ne dépendent que de la représentation finale V^σ et non pas de V .

Démonstration. - C'est clair pour (G a') (d'après le corollaire 1) ; (G b') ne parle ni de V ni de σ ; pour (G c') , c'est une conséquence de la proposition 3.

Soit W une représentation p-adique de $\mathrm{Gal}(K/k)$.

Définition. - On pose $A(W) = A(W^{\sigma^{-1}})^\sigma$.

D'après la proposition 2, ceci ne dépend que de W et non de σ . De plus, pour tout automorphisme β de $\underset{\sim}{C}_p$, $A(W^\beta) = A(W)^\beta$.

2.4. Reformulation des conjectures de Gross.

(G a) $r_p(W) = \dim(W \otimes \underset{\sim}{C}_p X^-)^G$.

(G b) $R_p(W) \neq 0$.

(G c) $L_p(W) = (-1)^{r_p(W)} A(W) R_p(W)$.

Démonstration de l'équivalence de ces énoncés avec (G a') , (G b') et (G c') .

1° (G a) $\Longleftrightarrow$ (G a') : c'est clair.

2° Supposons que λ_p soit un G-isomorphisme. Alors pour toute représentation W sur $\underset{\sim}{C}_p$ de $\mathrm{Gal}(K/k)$,

$$\mathrm{Id} \otimes \lambda_p \circ g^{-1} : W \otimes \underset{\sim}{C}_p X^- \longrightarrow W \otimes \underset{\sim}{C}_p X^-$$

est un G-isomorphisme. Donc $R_p(W) \neq 0$.

Inversement, supposons que pour toute représentation impaire W de $\mathrm{Gal}(K/k)$, $R_p(W) \neq 0$. Prenons, en particulier, pour k le sous-corps réel maximal K^+ de K et, pour W , l'unique représentation impaire de $\mathrm{Gal}(K/K^+) = \{1 , c\}$. On a

$$(W \otimes \underset{\sim}{C}_p X^-)^G \simeq \underset{\sim}{C}_p X^- ,$$

et donc, d'après l'hypothèse, $\lambda_p \circ g^{-1}$ est un isomorphisme de $\underset{\sim}{C}_p X^-$ sur $\underset{\sim}{C}_p X^-$.

De même λ_p .

3° $\det(1 \otimes \lambda^\sigma \circ \lambda_p^{-1} |_{(V^\sigma \otimes_{\mathbb{C}_p} X^-)^G}) = \det(1 \otimes \lambda^\sigma \circ g^{-1} \circ g \circ \lambda_p^{-1} |_{(V^\sigma \otimes_{\mathbb{C}_p} X^-)^G})$

$= (-1)^{r(V)} \dfrac{(\sigma(\log p))^{r(V)}}{R_p(W)}$ (on a posé $W = V^\sigma$) .

(G c') peut donc s'écrire :

$$L_p(W) = L(V)^\sigma \frac{R_p(W)}{(-1)^{r(V)} (\sigma(\log p))^{r(V)}} = (-1)^{r(V)} A(W) R_p(W) .$$

3. Propriétés formelles des fonctions L p-adiques.

Voici quelques propriétés formelles des fonctions L p-adiques relatives aux différentes opérations sur les représentations. Leurs démonstrations reposent sur les propriétés analogues des fonctions L d'Artin complexes et sur la formule d'interpolation (3).

Notation. - Si k est un corps de nombres totalement réel, K une extension galoisienne de k , et W une représentation de $\mathrm{Gal}(K/k)$ sur $\mathbb{C}_p$, on notera la fonction L p-adique associée $L_p(W , K/k , s)$.

3.1. Enoncés.

(L_p.1) Si W_1 et W_2 sont deux représentations totalement impaires de $\mathrm{Gal}(K/k)$,

$$L_p((W_1 + W_2) \otimes \omega , K/k , s) = L_p(W_1 \otimes \omega , K/k , s)\, L_p(W_2 \otimes \omega , K/k , s) .$$

(L_p.2) Si $K' \supset K \supset k$ est une plus grande extension de k galoisienne sur k , et W une représentation totalement impaire de $\mathrm{Gal}(K/k)$ également considérée comme représentation de $\mathrm{Gal}(K'/k)$ (et notée W'),

$$L_p(W \otimes \omega , K/k , s) = L_p(W' \otimes \omega , K'/k , s) .$$

(L_p.3) Si $k \subset F \subset K$, où k et F sont des corps de nombres totalement réels, K une extension finie galoisienne de k , et W une représentation totalement impaire de $\mathrm{Gal}(K/F)$, alors $\mathrm{Ind}\, W = \mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(K/F)}^{\mathrm{Gal}(K/k)} W$ est une représentation totalement impaire de $\mathrm{Gal}(K/k)$ et

$$L_p(W \otimes \omega , K/F , s) = L_p((\mathrm{Ind}\, W) \otimes \omega , K/k , s) .$$

3.2. Démonstration. - On admet les propriétés suivantes des fonctions L^* d'Artin modifiées (cf. [L 1] pour la démonstration). Les notations sont les mêmes que celles du paragraphe précédent. Les lettres V_1 et V_2 désignent des représentations de $\mathrm{Gal}(K/k)$, et V une représentation de $\mathrm{Gal}(K/F)$.

$(L^*.1)$ $L^*(V_1 + V_2 , K/k , s) = L^*(V_1 , K/k , s) L^*(V_2 , K/k , s)$.

$(L^*.2)$ $L^*(V_1 , K/k , s) = L^*(V_1' , K'/k , s)$.

$(L^*.3)$ $L^*(V , K/F , s) = L^*(\mathrm{Ind}\, V , K/k , s)$.

Au vu de la propriété $(L^*.2)$, on peut introduire une nouvelle notation : $L^*(V_1 , K/k , s)$ sera notée $L^*(V_1 , k , s)$, étant entendu que V_1 est une représentation de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ qui se factorise par $\mathrm{Gal}(K/k)$, où K est une extension finie de k .

(a) $(L_p.1)$ est une conséquence immédiate de $(L^*.1)$ et de (3) ; il suffit de constater que

$$(W_1 + W_2) \otimes \omega^{1-n} \simeq W_1 \otimes \omega^{1-n} + W_2 \otimes \omega^{1-n} .$$

(b) De même, $(L_p.2)$ est une conséquence de $(L^*.2)$ et de (3).

(c) Les notations sont celles de $(L_p.3)$. Soit K_1 une extension de k , galoisienne sur k , assez grande ppur que $W \otimes \omega^{1-n}$ se factorise en une représentation de $\mathrm{Gal}(K_1/F)$. Posons

$$G_1 = \mathrm{Gal}(K_1/k) , \; H_1 = \mathrm{Gal}(K_1/F) , \; G = \mathrm{Gal}(K/k) \quad \text{et} \quad H = \mathrm{Gal}(K/F) .$$

On note θ la surjection canonique $\theta : G_1 \longrightarrow G$ qui envoie H_1 sur H . A toute représentation (ρ , W) de G , $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(W)$, on associe $(\theta^* \rho , \theta^* W)$, où $\theta^* \rho : G_1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(W)$, $\theta^* \rho = \rho \circ \theta$ est une représentation de G_1 .

LEMME 3. - $\mathrm{Ind}_{H_1}^{G_1}(\theta^* W) = \theta^*(\mathrm{Ind}_H^G W)$.

<u>Démonstration</u>. - On vérifie que $\theta^*(\mathrm{Ind}_H^G W)$ est solution du problème universel $\mathrm{Ind}_{H_1}^{G_1}(\theta^* W)$ (cf. [L 2]).

Nous aurons encore besoin des deux résultats suivants :

LEMME 4. - <u>Soit</u> G <u>un groupe fini, et</u> H <u>un sous-groupe de</u> G , <u>soit</u> W <u>une représentation de</u> G , <u>et</u> W' <u>une représentation de</u> H ; <u>on a</u>

$$\mathrm{Ind}_H^G(W' \otimes \mathrm{Res}_H^G W) \simeq (\mathrm{Ind}_H^G W') \otimes W .$$

LEMME 5. - <u>Les notations étant celles de</u> $(L_p.3)$, <u>soit</u> ω_k <u>le caractère de Teichmüller relatif à</u> k , $\omega_k : \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \longrightarrow \underset{\sim}{C}_p^*$, <u>et</u> ω_F <u>le caractère de Teichmüller relatif à</u> F , $\omega_F : \mathrm{Gal}(\bar{k}/F) \longrightarrow \underset{\sim}{C}_p^*$, <u>alors</u> ω_F <u>est la restriction de</u> ω_k <u>à</u>

$Gal(\bar{k}/F)$.

Montrons à présent $(L_p.3)$:

$$L^*((\theta^*(W) \otimes \omega_F^{1-n})^{\sigma-1}, F, s) = L^*((\mathrm{Ind}_{H_1}^{G_1} \theta^*(W) \otimes \omega_F^{1-n})^{\sigma-1}, k, s)$$

$$= L^*(((\mathrm{Ind}_{H_1}^{G_1} \theta^*(W) \otimes \omega_k^{1-n})^{\sigma-1}, k, s)$$

$$= L^*((\theta^*(\mathrm{Ind}_H^G W) \otimes \omega_k^{1-n})^{\sigma-1}, k, s)$$

$$= L^*(((\mathrm{Ind}_H^G W) \otimes \omega_k^{1-n})^{\sigma-1}, k, s) .$$

La formule (3) donne alors :

$$L_p(W \otimes \omega_F, F, 1-n) = L_p((\mathrm{Ind}_H^G W) \otimes \omega_k, k, 1-n)$$

pour tout entier $n \geqslant 2$. D'où l'égalité des deux fonctions.

3.3. Enoncés concernant le régulateur de Gross. – Ici k désigne toujours un corps de nombres totalement réel, et K une extension galoisienne de k de type C. M. Si W est une représentation impaire de $Gal(K/k)$, on notera

$$r'_p(W) = \dim(W \otimes \underset{\sim}{C}_p X^-)^G .$$

PROPOSITION 4. – *Sous les hypothèses de* $(L_p.1)$, $(L_p.2)$ *et* $(L_p.3)$, *on a*

(G.1) $r'_p(W_1 + W_2) = r'_p(W_1) + r'_p(W_2)$.

$R_p(W_1 + W_2) = R_p(W_1)\, R_p(W_2)$.

$A(W_1 + W_2) = A(W_1)\, A(W_2)$.

(G.2) $r'_p(W') = r'_p(W)$.

$R_p(W') = R_p(W)$.

$A(W') = A(W)$.

(G.3) $r'_p(\mathrm{Ind}\, W) = r'_p(W)$.

$R_p(\mathrm{Ind}\, W) = R_p(W)$.

$A(\mathrm{Ind}\, W) = A(W)$.

Démonstration.

(a) (G.1) provient de la relation évidente :

$$((W_1 + W_2) \otimes \underset{\sim}{C}_p X^-)^G \simeq (W_1 \otimes \underset{\sim}{C}_p X^-)^G + (W_2 \otimes \underset{\sim}{C}_p X^-)^G .$$

(b) Soit $K' \supset K \supset k$ une plus grande extension galoisienne de k et de type C. M. On peut définir une application norme naturelle de $\underset{\sim}{C}_p X^-_{K'} \xrightarrow{N} \underset{\sim}{C}_p X^-_K$, définie par

$$N(\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}'^c) = f_{\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}} (\mathfrak{p} - \mathfrak{p}^c) ,$$

où $\mathfrak{p}'$ est un idéal premier au-dessus de $\mathfrak{p}$, et où $f_{\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}}$ est le degré résiduel relatif.

En revenant aux définitions, on démontre le lemme suivant.

LEMME 6. - Soit W et W' comme dans $(L_p.2)$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
W' \otimes \underset{\sim}{C}_p X^-_{K'} & \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes (\lambda_p \circ g^{-1})} & W' \otimes \underset{\sim}{C}_p X^-_{K'} \\
\Big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{Id} \otimes N} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{Id} \otimes N} \\
W \otimes \underset{\sim}{C}_p X^-_K & \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes (\lambda_p \circ g^{-1})} & W \otimes \underset{\sim}{C}_p X^-_K
\end{array}$$

De plus, $\mathrm{Id} \otimes N$ vérifie la propriété suivante :

Pour tout élément σ' de $\mathrm{Gal}(K'/k)$, soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)$ sa restriction à K ; pour tout $z' \in W' \otimes \underset{\sim}{C}_p X^-_{K'}$,

$$(\mathrm{Id} \otimes N)(\sigma' Z') = \sigma\, \mathrm{Id} \otimes N\, (z') .$$

Donc $(W' \otimes \underset{\sim}{C}_p X^-_{K'})^{\mathrm{Gal}(K'/k)}$ s'envoie dans $(W \otimes \underset{\sim}{C}_p X^-_K)^{\mathrm{Gal}(K/k)}$.

LEMME 7. - $\mathrm{Id} \otimes N$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $(W' \otimes \underset{\sim}{C}_p X^-_{K'})^{\mathrm{Gal}(K'/k)}$ et $(W \otimes \underset{\sim}{C}_p X^-_K)^{\mathrm{Gal}(K/k)}$.

Démonstration. - On reprend la démonstration du lemme 1. Les notations sont les mêmes. On affectera d'un ' les lettres désignant des objets relatifs à l'extension K'/k $(G', D'_W, \mathfrak{p}')$. On a vu que

$$\underset{\sim}{C}_p\ X_K^- \simeq \bigoplus_w (\mathrm{Ind}_{D_w}^G\ 1_{D_w} - \mathrm{Ind}_{(1,c)D_w}^G\ 1_{(1,c)D_w}) ,$$

et puisque W est une représentation impaire,

$$(W \otimes \underset{\sim}{C}_p\ X_K^-)^G \simeq \bigoplus_w (W \otimes \mathrm{Ind}_{D_w}^G\ 1_{D_w})^G .$$

De même,

$$(W' \otimes \underset{\sim}{C}_p\ X_{K'}^-)^{G'} \simeq \bigoplus_w (W' \otimes \mathrm{Ind}_{D'_w}^{G'}\ 1_{D'_w})^{G'} .$$

Il reste à voir que $\mathrm{Id} \otimes N$ est, pour chaque place w de k au-dessus de p, un isomorphisme de $(W' \otimes \mathrm{Ind}_{D'_w}^{G'}\ 1_{D'_w})^{G'}$ sur $(W \otimes \mathrm{Ind}_{D_w}^G\ 1_{D_w})^G$.

Or ces espaces sont respectivement isomorphes à $(W')^{D'_w}$ et $(W)^{D_w}$ par

$$v' \in (W')^{D'_w} , \quad v' \longrightarrow \sum_{\sigma \in G'/D'_w} \sigma \cdot v' \otimes (\mathfrak{p}'^{\sigma} - \mathfrak{p}'^{c\sigma})$$

(resp. $v \in (W)^{D_w}$, $v \longrightarrow \sum_{\sigma \in G/D_w} \sigma \cdot v \otimes (\mathfrak{p}^{\sigma} - \mathfrak{p}^{c\sigma}))$.

Transporté par ces isomorphismes, $\mathrm{Id} \otimes N$ s'écrit : $v' \in (W')^{D'_w}$, $v' \longrightarrow gv'$, où g est le nombre d'idéaux $\mathfrak{P}'$ au-dessus de $\mathfrak{p}$, ce qui est bien un isomorphisme de $(W')^{D'_w}$ sur $(W)^{D_w}$ (on a pris $\mathfrak{p}'$ dans K' au-dessus de $\mathfrak{p}$ dans K).

On déduit immédiatement des lemmes 6 et 7 que $r'_p(W') = r'_p(W)$, et que $R_p(W') = R_p(W)$.

L'égalité $A(W') = A(W)$ est déjà contenue dans la propriété $(L^*.2)$.

(c) Les hypothèses sont celles de $(L_p.3)$, et K est un corps C. M.

D'abord il est clair que l'induite d'une représentation impaire est impaire.

Nous avons besoin dans ce paragraphe d'une notation qui rappelle le corps de base. Ainsi, $\underset{\sim}{C}_p\ X_K^-$ sera noté $(\underset{\sim}{C}_p\ X^-)_F$ en tant que représentation de $\mathrm{Gal}(K/F)$, et $(\underset{\sim}{C}_p\ X^-)_k$ en tant que représentation de $\mathrm{Gal}(K/k)$. Ainsi $(\underset{\sim}{C}_p\ X^-)_F$ est la restriction à $\mathrm{Gal}(K/F)$ de la représentation $(\underset{\sim}{C}_p\ X^-)_k$. Posons $G = \mathrm{Gal}(K/k)$ et $H = \mathrm{Gal}(K/F)$. D'après le lemme 4, on a :

$$\mathrm{Ind}_H^G(W \otimes (\underset{\sim}{C}_p\ X^-)_F) = (\mathrm{Ind}_H^G\ W) \otimes (\underset{\sim}{C}_p\ X^-)_k ,$$

pour toute représentation W de G .

Ajoutés à cette remarque, les lemmes suivants donnent (G.3) .

LEMME 8. - <u>Soit</u> W <u>une représentation de</u> H , <u>et</u> φ <u>l'injection canonique</u> $\varphi : W \hookrightarrow \mathrm{Ind}_H^G\ W$. <u>On a</u> $W^H \xrightarrow{\varphi} (\mathrm{Ind}_H^G\ W)^G$.

LEMME 9. - Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (W \otimes (\underset{\sim}{C}_p X^-)_F)^H & \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes (\lambda_p \circ g^{-1})} & (W \otimes (\underset{\sim}{C}_p X^-)_F)^H \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ ((\mathrm{Ind}\ W) \otimes (\underset{\sim}{C}_p X^-)_k)^G & \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes (\lambda_p \circ g^{-1})} & ((\mathrm{Ind}\ W) \otimes (\underset{\sim}{C}_p X^-)_k)^G . \end{array}$$

3.4. Conséquences de cette étude formelle. - Enonçons d'abord une version du théorème de Brauer adaptée aux groupes de Galois d'un corps C. M. sur un corps de base totalement réel.

PROPOSITION 5. - Soit k un corps de nombres totalement réel, et K un corps C. M. galoisien sur k. Soit ρ une représentation impaire de $G = \mathrm{Gal}(K/k)$. Il existe un nombre fini d'extensions F_i totalement réelles de k, contenues dans K, et de caractères impairs χ_i de degré 1 de $H_i = \mathrm{Gal}(K/F_i)$, et des entiers $m_i \in \underset{\sim}{Z}$ tels que $\rho \simeq \bigoplus m_i \mathrm{Ind}_{H_i}^G(\chi_i)$.

Démonstration. - Toute représentation ρ de $\mathrm{Gal}(K/k)$ admet une décomposition canonique $\rho = \rho^+ + \rho^-$ en une partie ρ^+ paire et une partie ρ^- impaire.

D'après le théorème de Brauer, une représentation ρ peut s'écrire $\rho \simeq \bigoplus n_i \mathrm{Ind}_{H_i'}^G \psi_i$, où les ψ_i sont des caractères de degré 1 de sous-groupes H_i' de G. Si H_i' ne contient pas la conjugaison complexe c, appelons H_i le sous-groupe de G engendré par H_i' et c. On a alors $\mathrm{Ind}_{H_i'}^{H_i} \psi_i = \chi_i^+ + \chi_i^-$, où χ_i^+ est un caractère pair de degré 1, et χ_i^- un caractère impair de degré 1. On a donc l'égalité :

$$\rho + \sum k_i \mathrm{Ind}_{H_i}^G(\chi_i) \simeq \sum \ell_j \mathrm{Ind}_{H_j}^G(\chi_j) ,$$

où les χ_i, χ_j sont des caractères de degré 1 de sous-groupes H_i, H_j de G contenant c, et où les entiers k_i, ℓ_j sont positifs. On décompose ces représentations en partie paire et partie impaire ; on vérifie aisément, la conjugaison complexe c commutant avec tous les éléments de $\mathrm{Gal}(K/k)$, que si χ est impair (resp. pair), $\mathrm{Ind}_H^G \chi$ est impair (resp. pair), il vient :

$$\rho^- \oplus \sum_{\chi_i \text{ impair}} k_i \mathrm{Ind}_{H_i}^G \chi_i \simeq \sum_{\chi_j \text{ impair}} \ell_j \mathrm{Ind}_{H_j}^G \chi_j .$$

Si ρ est impaire, $\rho = \rho^-$, et l'on obtient le résultat annoncé.

De cette étude on peut déduire les conséquences suivantes.

PROPOSITION 6. - *Si les conjectures de Gross sont vraies pour tout corps de nombres totalement réel, et toute extension abélienne imaginaire* K *de* k , *alors elles sont vraies en général.*

PROPOSITION 7. - *Sous les hypothèses de* $(L_p.2)$, *si* $K' \supset K \supset k$ *et* K' *un corps C. M., si les conjectures de Gross sont vraies pour* K'/k , *elles le sont pour* K/k .

4. Non-nullité du régulateur de Gross.

Au paragraphe 5, on montrera la non-nullité de R_p dans le cas où K est une extension abélienne de $\mathbb{Q}$ en utilisant le théorème d'indépendance linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de logarithmes p-adiques de nombres algébriques [Br]. On voudrait montrer ici comment une conjecture d'indépendance algébrique (conjecture de Shanuel p-adique (cf. [P]), entraîne la non-nullité de R_p .

PROPOSITION 8. - *La conjecture de Shanuel* p-*adique entraîne la non-nullité du régulateur de Gross.*

Démonstration. - Tout d'abord, grâce à la proposition 7, on peut se ramener au cas où K est galoisienne sur $\mathbb{Q}$: on remplace K par sa clôture galoisienne sur $\mathbb{Q}$, qui est encore un corps C. M. Posons $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$; K est considéré comme plongé dans $\mathbb{C}_p$. Soit $\sigma_1 = \mathrm{Id}$, ... , σ_d , $c\sigma_1$, ... , $c\sigma_d$ des éléments de G correspondant aux idéaux $\mathfrak{p}_1$, ... , $\mathfrak{p}_d$, $\mathfrak{p}_1^c$, ... , $\mathfrak{p}_d^c$ (ce sont les idéaux premiers de K au-dessus de p) : $\mathfrak{p}_i = \{x \in K \,;\, |\sigma_i(x)|_p < 1\}$.

Soit D le groupe de décomposition de $\mathfrak{p}_1$. La famille $\{\sigma_1 , \cdots , \sigma_d , c\sigma_1 , \cdots , c\sigma_d\}$ constitue un système de représentants des classes à gauche de G modulo D . La famille $\{\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_1^c , \ldots , \mathfrak{p}_d - \mathfrak{p}_d^c\}$ est une base de $\mathbb{C}_p X^-$, qui est permutée transitivement par G : $(\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_i^c) = (\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_1^c)^{\sigma_i^{-1}}$.

Soit α_1 un élément de K tel que l'idéal (α_1) soit égal à $\mathfrak{p}_1^h$, où h est le nombre de classes de K , et posons $e_1 = \alpha_1/\alpha_1^c$. On a $g(e_1) = hf(\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_1^c)$, où f est le degré résiduel en $\mathfrak{p}_1$. Ecrivons la matrice de l'application linéaire $\lambda_p \circ g^{-1}$ dans la base précédente.

Si $e_i = \sigma_i^{-1}(e_1)$, on a :

$$\lambda_p \circ g^{-1}(\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_i^c) = \frac{1}{hf} \sum_{1 \leqslant j \leqslant d} \log_p N_{K_{\mathfrak{p}_j}|\mathbb{Q}_p}(\sigma_i^{-1} e_1)(\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_j^c)$$

$$= \frac{1}{hf} \sum_{1 \leqslant j \leqslant d} \log_p N_{K_{\mathfrak{p}_1}|\mathbb{Q}_p}(\sigma_j \circ \sigma_i^{-1} e_1)(\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_j^c) \ .$$

Notation. - Pour tout élément σ de G , notons σ^* le représentant dans la famille $\{\sigma_1 , \dots , \sigma_d\}$ de σ modulo (à gauche) $(1 , c) D$. Pour alléger l'écriture, on notera $N_{K_{\mathfrak{p}_1}|\mathbb{Q}_p} = N_1$ dans la suite.

On a $\log_p N_1(\sigma_j \circ \sigma_i^{-1} e_1) = \varepsilon(i , j) \log_p N_1(\sigma_j \circ \sigma_i^{-1})^* e_1)$, où $\varepsilon(i , j) = \pm 1$.

Posons, pour $1 \leq i \leq d$, $X_{\sigma_i} = \log_p N_1(\sigma_i e_1)$. La matrice de $\lambda_p \circ g^{-1}$ s'écrit :

$$M^* = \frac{1}{hf} (\varepsilon(i , j) X_{(\sigma_j \circ \sigma_i^{-1})^*})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq d} . \tag{4}$$

On a clairement la propriété suivante :

LEMME 10. - Si σ_i et σ_j appartiennent à la même double classe modulo D_1 , $X_{\sigma_i} = X_{\sigma_j}$.

Considérons à présent dans l'expression (4) de la matrice M^* les X_{σ_i} comme des indéterminées. La matrice formelle obtenue a un déterminant non nul ; en effet, si l'on remplace X_{σ_i} par $\log \|e_1\|_{\mathfrak{p}_1}$ à la place de $\log_p N_1(\sigma_i e_1)$, on retombe sur la matrice de $\lambda \circ g^{-1}$, dont le déterminant est, on l'a vu, $(-1)^d (\log p)^d$ où $d = \dim_{\mathbb{C}} X^-$.

Donc, au vu du lemme 10, si l'on note $t_1 , \dots , t_s$ la liste des doubles classes modulo D_1 de $\sigma_1 , \dots , \sigma_d$, $Y_{t_1} , \dots , Y_{t_s}$ des indéterminées, et, pour tout élément σ de G , σ^{**} la double classe de σ modulo D_1 , la matrice M^{**} , obtenue à partir de M^* ,

$$M^{**}(Y_{t_1} , \dots , Y_{t_s}) = \frac{1}{hf} (\varepsilon(i , j) Y_{(\sigma_j \circ \sigma_i^{-1})^{**}})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq d} , \tag{5}$$

a pour déterminant un polynôme non nul en $\varphi_{t_1} , \dots , \varphi_{t_s}$ à coefficients entiers rationnels.

Pour conclure, en admettant la conjecture de Shanuel p-adique, il suffit de démontrer le lemme suivant.

LEMME 11. - La famille $\{\log_p N_1(t_i e_1)\}_{1 \leq i \leq s}$ est linéairement indépendante sur $\mathbb{Q}$.

(On a noté $\log_p N_1(t_i e_1) = \log_p N_1(\sigma e_1)$, où σ est un représentant quelconque de la classe de t_i).

Démonstration. - Supposons que l'on ait une relation $\sum_{1 \leq i \leq s} b_i \log_p N_1(t_i e_1) = 0$, où les b_i sont des entiers. Quitte à multiplier cette égalité par un entier, on obtient :

$$\prod_{1 \leq i \leq s} (N_1(t_i e_1))^{b_i} = p^k \text{ pour un certain entier } k .$$

On constate que le deuxième membre de cette égalité est laissé fixe par la conjugaison complexe c et que le premier membre est inversé. Donc :

$$\prod_{1\leq i\leq s} (N_1(t_i\ e_1))^{b_i} = 1 .$$

On écrit la décomposition en idéaux premiers du premier membre. Si l'on note τ_i un représentant de t_i pris dans $\{\sigma_1 , \dots , \sigma_d\}$, il vient

(6) $$\sum_{1\leq i\leq s, \sigma\in D_1} b_i(\sigma\ \tau_i)^* = 0 \quad \text{dans l'algèbre du groupe } \mathbb{Z}[G] .$$

Réindexons, suivant $\{1 , \dots , d\}$,

(7) $$\sum_{1\leq j\leq d, \sigma\in D_1} c_j(\sigma\ \sigma_j)^* = 0 ;$$

dans cette égalité il y a chaque fois au plus un c_j non nul parmi les c_k correspondant à des σ_k appartenant à la même double classe modulo D_1 .

Décomposons (7) suivant la base $\{\sigma_1 , \dots , \sigma_d\}$. On pose

$\varphi_{i,j} = 1$, si σ_i et σ_j appartiennent à la même double classe modulo D_1 , et

$\varphi_{i,j} = 0$ sinon .

(7) est équivalent au système d'équations.

(8) $$\sum_{1\leq j\leq d} \varphi_{i,j}\ c_j = 0 , \quad 1 \leq i \leq d .$$

D'après la remarque ci-dessus, ce système est en fait un système diagonal de s équations à s inconnues et tous les coefficients c_j sont donc nuls. Ainsi est achévée la démonstration de la proposition 8.

5. Le cas abélien sur $\mathbb{Q}$.

Le but de ce paragraphe est de démontrer les conjectures (G a) , (G b) et (G c) dans le cas où le corps K est abélien sur $\mathbb{Q}$. Soit V une représentation impaire de degré 1 de $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ de caractère χ . Les remarques faites au § 3 permettent de supposer que $K = \mathbb{Q}(\zeta)$, où ζ est une racine primitive N-ième de 1 et que χ est un caractère de Dirichlet primitif modulo N . La série L d'Artin relative à V coïncide avec la série L de Dirichlet associée à χ . On a clairement la propriété suivante :

LEMME 12. -

$$\dim(V \otimes \mathbb{C}_p\ X^-)^G = 1 \quad \underline{\text{si}} \quad \chi(p) = 1$$

<u>et</u>

$$\dim(V \otimes_{\mathbb{C}_p} X^-)^G = 0 \quad \underline{\text{si}} \quad \chi(p) \neq 1 \ .$$

Démonstration. - Il suffit de se rappeler que $\dim(V \otimes_{\mathbb{C}_p} X^-)^G = \dim V^D$, où D , le groupe de décompsotion de p , est le groupe multiplicatif engendré dans $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ par p .

5.1. Calcul du régulateur $R_p(\chi)$. - On reprend le calcul effectué au § 4 , où $\mathfrak{p}_1$ est un idéal premier fixé au-dessus de p , et $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_1^{\sigma_i^{-1}}$, où σ_i désigne l'élément de G défini par $\sigma_i(\zeta) = \zeta^i$ $(i \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*)$.

Posons

$$v = \Sigma_{i \in G/\pm D} \overline{\chi(i)} (\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_i^c) \in (V \otimes_{\mathbb{C}_p} X^-)^G \ .$$

On avait trouvé, au § 4, que

$$\lambda_p \circ g^{-1}(\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_i^c) = \frac{1}{hf} \Sigma_{1 \leq j \leq d} \log_p N_1(\sigma_j \circ \sigma_i^{-1} e_1)(\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_j^c) \ .$$

Cela nous donne :

$$\lambda_p \circ g^{-1}(v) = \frac{1}{hf} \ \Sigma_{j \in G/\pm D} (\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_j^c) \ \Sigma_{i \in G/\pm D} \overline{\chi(i)} \log_p N_1(\sigma_j \circ \sigma_i^{-1} e_1)$$

$$= \frac{1}{hf} \Sigma_{j \in G/\pm D} (\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_j^c) \ \overline{\chi(j)} \ \Sigma_{k \in G/\pm D} \chi(k) \log_p N_1(\sigma_k e_1) \ .$$

On trouve donc :

$$(9) \quad R_p(\chi) = \frac{1}{hf} \Sigma_{k \in G/\pm D} \chi(k) \log_p N_{K_{\mathfrak{p}_1}|\mathbb{Q}_p}(\sigma_k e_1) = \frac{1}{hf} \Sigma_{\ell \in G/\pm D} \overline{\chi(\ell)} \log_p N_{K_{\mathfrak{p}_1^{\sigma_\ell}}/\mathbb{Q}_p}(e_1) .$$

Ou encore :

$$(10) \qquad R_p(\chi) = \frac{1}{hf} \Sigma_{m \in G} \chi(m) \log_p(\sigma_m \alpha_1) \ .$$

(On rappelle que $e_1 = \alpha_1/\alpha_1^c$ et $(\alpha_1) = \mathfrak{p}_1^h$.)

PROPOSITION 9. - $R_p(\chi)$ n'est pas nul.

Démonstration. - On utilise le théorème de Brumer, version p-adique du théorème de Baker [B r], et le lemme 11 du § 4.

5.2. Démonstration de la conjecture (G a) .

La démonstration repose sur la formule de Gross-Koblitz [G K] et sur une formule donnant la valeur de la dérivée de la fonction L_p en 0 (cf. [F G] ou [Di].

Notations.

f désigne le degré résiduel d'un idéal premier de K au-dessus de p , et $q = p^f$.

$\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers de K .

$\underset{\sim}{F}_p$ (resp. $\underset{\sim}{F}_q$) le corps à p éléments (resp. q éléments).

Si $\mathfrak{p}_1$ est un idéal de $\mathcal{O}$ choisi au-dessus de p , $\mathcal{O}/\mathfrak{p}_1 \simeq \underset{\sim}{F}_q$.

Pour $a \in (\underset{\sim}{Z}/N\underset{\sim}{Z})^*$, χ_a est le caractère multiplicatif de $\underset{\sim}{F}_q$ à valeurs dans le groupe des racines N-ièmes de 1 défini par

$$\text{si } x \in \underset{\sim}{F}_q \text{ , } \chi_a(x) \in K_{\mathfrak{p}_1} \subset \underset{\sim}{C}_p \text{ , } \chi_a(x) \equiv (\omega_q(x))^{a(q-1)/N} \text{ ,}$$

où $\omega_q(x)$ est le représentant de Teichmüller de x dans $K_{\mathfrak{p}_1}$:

$$\omega_q(x)^{q-1} = 1 \quad \text{et} \quad \omega_q(x) \equiv x \pmod{\mathfrak{p}_1} \text{ .}$$

π désigne un élément de $\underset{\sim}{C}_p$ tel que $\pi^{p-1} = -p$ et $E_\pi(x) = \exp_p \pi(x - x^p)$ (cf. [K] où [Di]).

ψ_π est le caractère additif de $\underset{\sim}{F}_p$ défini par $\psi_\pi(x) = E_\pi(\omega_p(x))$, où $\omega_p(x)$ est le représentant de Teichmüller de x : $x \in \underset{\sim}{F}_p$, $\omega_p(x) \in \underset{\sim}{Q}_p$ $(\omega_p(x))^{p-1} = 1$ et $\omega_p(x) \equiv x \pmod{p}$.

Tr désigne la trace de $\underset{\sim}{F}_q$ sur $\underset{\sim}{F}_p$, et ψ le caractère de $\underset{\sim}{F}_q$: $\psi = \psi_\pi \circ \mathrm{Tr}$.

Pour $x \in \underset{\sim}{Q}$, $\{x\}$ désigne le plus petit reste positif strict de x modulo 1 .

Pour $y \in (\underset{\sim}{Z}/N\underset{\sim}{Z})^*$, $\langle y \rangle$ désigne le représentant de y compris entre 0 et N .

On considérera la somme de Gauss $g_a = g(\chi_a , \psi) = \sum_{x \in \underset{\sim}{F}_q} \chi_a(x)\, \psi(x)$.

$g_a^N \in K$, et le théorème de Stickelberger donne la décomposition en idéaux premiers de g_a^N :

$$(g_a^N) = \sum_{j \in G} (\mathfrak{p}_1^{\sigma_j})^{\langle aj^{-1} \rangle} \text{ .}$$

LEMME 13. - Si h <u>désigne toujours le nombre de classes de</u> K , g_a^{Nh} <u>et</u> $\prod_{j \in G} (\alpha^{\sigma_j})^{\langle aj^{-1} \rangle}$ <u>sont égaux à une racine de l'unité près.</u>

<u>Démonstration</u>. - Les deux nombres considérés ne sont composés que d'idéaux premiers au-dessus de p et ont même décomposition d'après le théorème de Stickelberger. Il suffit de vérifier qu'ils ont même valeur absolue pour n'importe quelle valuation archimédienne $|\ |$. Or l'on sait, d'une part que $|g_a^{Nh}| = q^{Nh/2}$, d'autre part, que

$$\begin{aligned} |\textstyle\prod_{j \in G} \sigma_j(\alpha_1)^{\langle aj^{-1} \rangle}|^2 &= |\textstyle\prod_{j \in G} \sigma_j(\alpha_1)^{\langle aj^{-1} \rangle} \prod_{j \in G} \sigma_{-j}(\alpha_1)^{\langle aj^{-1} \rangle}| \\ &= |\textstyle\prod_{j \in G} \sigma_j(\alpha_1)^{\langle aj^{-1} \rangle} \prod_{j \in G} \sigma_j(\alpha_1)^{N - \langle aj^{-1} \rangle}| = |\prod_{j \in G} \sigma_j(\alpha_1)|^N \\ &= |N_{\underset{\sim}{Q}}^K(\alpha_1)|^N = |N(\mathfrak{p}_1)|^{hN} = q^{Nh} \text{ .} \end{aligned}$$

Exprimons $L'_p(\chi\omega , 0)$:

$$L'_p(\chi\omega , 0) = \sum_{0<a<N} \chi(a) \log_p \Gamma_p(a/N) ,$$

où Γ_p est la fonction Γ p-adique de Morita ([Di] , [F G]).

$$L'_p(\chi\omega , 0) = \sum_{a\in G/D} \chi(a) \sum_{b\in D} \log_p \Gamma_p(\{ab/N\}) .$$

D'après la formule de Gross-Koblitz,

$$L'_p(\chi\omega , 0) = \sum_{a\in G/D} \chi(a) \log_p g_a = \frac{1}{Nh} \sum_{a\in G/D} \chi(a) \log_p g_a^{Nh} .$$

D'après le lemme 13,

$$L'_p(\chi\omega , 0) = \frac{1}{Nh} \sum_{a\in G/D} \chi(a) \sum_{j\in G} \langle aj^{-1}\rangle \log_p(\alpha_1^{\sigma_j}) ,$$

$$L'_p(\chi\omega , 0) = \frac{1}{Nhf} \sum_{a\in G, j\in G} \chi(a) \langle aj^{-1}\rangle \log_p(\alpha_1^{\sigma_j}) ,$$

$$L'_p(\chi\omega , 0) = \frac{1}{Nhf} (\sum_{0<k<N} \chi(k)\ k)(\sum_{j\in G} \chi(j) \log_p(\alpha_1^{\sigma_j})) ,$$

$$L'_p(\chi\omega , 0) = B_{1,\chi} R_p(\chi) = - L(\chi , 0) R(\chi) = - A(\chi) R(\chi) ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

BIBLIOGRAPHIE

[B] BARSKY (D.). - Fonctions zêta p-adiques d'une classe de rayon des corps de nombres totalement réels, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 5e année, 1977/78, n° 16, 23 p.

[Br] BRUMER (A.). - On the units of algebraic number fields, Mathematika, London, t. 14, 1967, p. 121-124.

[C] CASSOU-NOGUÈS (P.). - Valeurs sur les entiers des fonctions zêta des corps de nombres et des fonctions L des courbes elliptiques, Thèse d'état, Université de Bordeaux, 1978.

[D R] DELIGUE (P.) and RIBET (K.). - Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields, Inventiones Math., Berlin, t. 59, 1980, p. 227-286.

[Di] DIAMOND (J.). - On the values of p-adic L-functions at positive integers, Acta Arithmetica, Warszawa, t. 35, 1979, p. 223-237.

[F G] FERRERO (B.) and GREENBERG (R.). - On the behaviour of p-adic L-functions at $s = 0$, Inventiones Math., Berlin, t. 50, 1978, p. 91-102.

[G] GROSS (B.). - p-adic L-series at $s = 0$ (à paraître).

[G K] GROSS (B) and KOBLITZ (N.). - Gauss sums and the p-adic Γ-function, Annals of Math., t. 109, 1979, p. 569-581.

[K] KOBLITZ (N.). - p-adic analysis. - Cambridge, Cambridge University Press, 1980 (London mathematical Society Lecture Note Series, 46).

[L 1] LANG (S.). - Algebraic numbers theory. - New York, Addison-Wesley, 1970 (Addison-Wesley Series in Mathematics).

[L 2] LANG (S.). - Algebra. - New York, Addison-Wesley, 1965 (Addison-Wesley Series in Mathematics).

[P] PHILIPPON (P.). - Indépendance algébrique de valeurs de fonctions exponentielles p-adiques, J. für reine und angew. Math., t. 329, 1981, p. 42-51.

[T] TATE (J.). - Conjectures de Stark sur les fonctions L d'Artin en $s = 0$, Cours à Orsay, 1981 (à paraître).