GROUPE DE TRAVAIL
D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

DANIEL BARSKY

Congruences pour les nombres de Genocchi de 2e espèce

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 7-8 (1979-1981), exp. nº 34, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1979-1981__7-8__A15_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
8e année, 1980/81, n° 34, 13 p.

25 mai 1981

CONGRUENCES POUR LES NOMBRES DE GENOCCHI DE 2e ESPÈCE

(Extrait d'un travail en commun avec Dominique DUMONT)

par Daniel BARSKY (*)
[Université Paris-7]

Résumé. - Les nombres de Genocchi G_n sont définis par leur fonction génératrice exponentielle :

$$\sum_{n\geq 0} G_n \frac{t^n}{n!} = \frac{2t}{e^t + 1} .$$

DUMONT et VIENNOT ont défini la matrice de Seidel des G_n par

$$\sum_{n,k\geq 0} g_n^k \frac{u^k}{k!} \times \frac{t^n}{n!} = \frac{2e^u(t+u)}{e^{(t+u)} + 1} .$$

Les nombres de Genocchi de 2e espèce H_{2n+1} sont définis alors par

$$H_{2n+1} = g_n^{n+1} = g_{n+1}^n = g_n^{n+2} = - g_{n+2}^n .$$

DUMONT a montré, dans sa thèse de 3e cycle, que la génération de Gandhi des nombres de Genocchi entraînait des interprétations combinatoires intéressantes pour les nombres de Genocchi. Il s'est aperçu ultérieurement que l'existence d'une génération de type Gandhi pour les H_{2n+1} entrainerait aussi une interprétation combinatoire intéressante pour ces nombres.

On démontre dans la suite que les H_{2n+1} ont effectivement une génération de type Gandhi comme DUMONT l'avait conjecturé. On donne, comme application de cette génération, quelques congruences pour les H_{2n+1} .

1. Rappel sur les nombres de Genocchi.

Les nombres de Genocchi sont définis par leur fonction génératrice exponentielle :

$$\sum_{n\geq 0} G_n \frac{t^n}{n!} = \frac{2t}{e^t + 1} = t + \sum_{n\geq 0} G_{2n} \frac{t^{2n}}{2n!} , \tag{1}$$

et par conséquent si B_n est le n-ième nombre de Bernoulli (cf. [4]),

---

(*) Texte reçu le 5 juin 1981.

Daniel BARSKY, UER Mathématiques, Université Paris-7, 2 place Jussieu, 75251 PARIS CEDEX 05.

Dominique DUMONT, Mathématiques, Université de Strabourg, 7 rue René Descartes, 67084 STRASBOURG CEDEX.

(2) $$G_{2n} = 2(1 - 2^{2n})\, B_{2n} \quad \text{pour} \quad n \geq 1 .$$

DUMONT a alors montré, dans sa thèse de 3e cycle (cf. [5]), les théorèmes suivants :

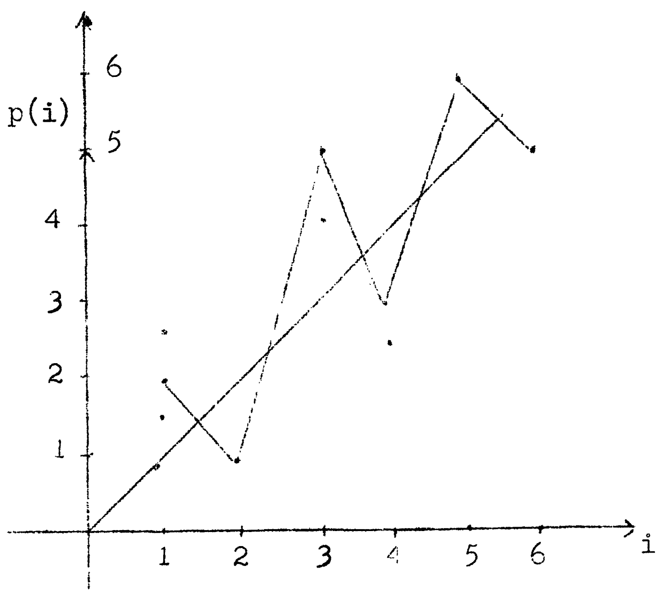
THÉORÈME A. - $|G_{2n+2}|$ *est le nombre de permutations* p *de l'ensemble* $\{1 , 2 , \ldots , 2n + 1\}$ *telles que* $p(i) - p(i + 1)$ *est du signe de* $(-1)^{p(i)}$.

THÉORÈME B. - $|G_{2n+2}|$ *est le nombre de permutations* p *de l'ensemble* $\{1 , \ldots , 2n\}$ *telles que* $i \leq p(i)$ *si, et seulement si,* $p(i)$ *est pair.*

THÉORÈME C. - $|G_{2n+2}|$ *est le nombre de permutations* p *de l'ensemble* $\{1 , 2 , \ldots , 2n\}$ *telles que* $i < p(i)$ *si, et seulement si,* $p(i)$ *est pair.*

THÉORÈME D. - $|G_{2n+2}|$ *est le nombre de permutations* p *de l'ensemble* $\{1 , 2 , \ldots , 2n\}$ *telles que* $i \leq p(i)$ *si, et seulement si,* i *est impair*

Le graphe des permutations décrites au théorème D (i. e. la ligne brisée joignant $(i , P(i))$ à $(i + 1 , p(i + 1))$ pour $1 \leq i \leq 2n - 1$) est coupé en exactement $2n - 1$ fois par toute droite d'équation $y = x + a$ avec $0 < a < 1$.



La démonstration de ces théorèmes repose sur la génération de Gandhi des nombres de Genocchi, [5] que nous allons rappeler.

LEMME 1 (CARLITZ [3], RIORDAN - STEIN [9])

$$\sum_{n\geq 0} G_{2n+2}\, X^{2n} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^{k+1}\,(k!)^2\, X^{2k}}{(1 - X^2) \ldots (1 - k^2 X^2)}$$

(3) $$= \sum_{m\geq 0} (-1)^{m+1} \frac{(m!)^2}{2m!} \sum_{k=-m}^{+m} \frac{(-1)^{m-k}\binom{2m}{m+k}}{1 - k X} .$$

La dernière égalité de (3) s'obtient simplement par décomposition en élément simple de le deuxième formule.

Donc, par transformation de Laplace inverse [2], tout revient à montrer que

$$\sum_{n\geq 0} G_{2n+2} \frac{X^{2n}}{2n!} = \sum_{m\geq 0} (-1)^{m+1} \frac{(m!)^2}{2m!} \sum_{k=-m}^{+m} (-1)^{m+k} \binom{2m}{m+k} e^{-kX}$$

$$(4) \qquad = \sum_{m\geq 0} (-1)^{m+1} \frac{(m!)^2}{2m!} (e^{X/2} - e^{-X/2})^{2m}$$

Or il est bien connu [8] que

$$2(\text{Arc sin } x)^2 = \sum_{m=1}^{\infty} (2x)^{2m}/m^2 \binom{2m}{m}$$

(on en redonnera une démonstration au corollaire 2), et par conséquent :

$$(5) \qquad \sum_{m\geq 1} \frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}} = \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x \text{ Arc sin } x}{(1-x^2)^{3/2}} .$$

Posons $x = i((e^{X/2} - e^{-X/2})/2)$.

Il reste donc à montrer, en comparant (4) et (5), que

$$(6) \quad \sum_{n\geq 1} G_{2n+2} \frac{X^{2n}}{2n!} = \frac{(-1)\left(i\,\frac{e^{X/2} - e^{-X/2}}{2}\right)^2}{1 - \left(i\,\frac{e^{X/2} - e^{-X/2}}{2}\right)^2}$$

$$+ \frac{(-1)\; i\,\frac{e^{X/2} - e^{-X/2}}{2} \text{ Arc sin } i\,\frac{e^{X/2} - e^{-X/2}}{2}}{\left(1 - \left(i\,\frac{e^{X/2} - e^{-X/2}}{2}\right)^2\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{e^X + e^{-X} - 2}{(e^{X/2} + e^{-X/2})^2} + \frac{2(e^{X/2} - e^{-X/2})\, X}{(e^{X/2} + e^{-X/2})^3}$$

Or, si $G(X) = 2X\, e^X/(e^X + 1)$, il vient

$$G''(X) = \frac{-4e^X}{(e^X + 1)^2} - \frac{2X\, e^X(1 - e^X)}{(e^X + 1)^3} .$$

On constate donc que le dernier membre de (6) est égal à $1 + G''(X)$, ce qui démontre le théorème.

LEMME 2.

$$(7)\quad \sum_{n\geq 1} G_{2n}\, X^{2n} = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k\, k!\,(k-1)!\, X^{2k}}{(1-X^2)\ldots(1-k^2X^2)}$$

$$= \sum_{m\geq 1} (-1)^m \frac{m!\,(m-1)!}{2m!} \sum_{k=-m}^{+m} \frac{(-1)^{m-k}\binom{2m}{m+k}}{1-kX}\,.$$

Tout revient à montrer que

$$\sum_{n\geq 1} G_{2n} \frac{X^{2n}}{2n!} = \sum_{m\geq 1} (-1)^m \frac{m!\,(m-1)!}{2m!} \left(e^{X/2} - e^{-X/2}\right)^{2m}$$

$$= \sum_{m\geq 1} (-1)^m \frac{m!\,(m-1)!}{2m!}\, 2^{2m}\, \mathrm{sh}^{2m}\frac{X}{2}$$

Or, on déduit aisément de la série de Taylor de $2(\mathrm{Arc}\sin x)^2$ que

$$\sum_{m\geq 1} (-1)^m \frac{(m!)^2}{2m!} \frac{2^{2m}}{m}\, \mathrm{sh}^{2m}\frac{X}{2} = -X\, \frac{\mathrm{sh}\frac{X}{2}}{\mathrm{ch}\frac{X}{2}} = \frac{2X}{e^X+1} - X\,,$$

d'où le lemme.

2. Rappel sur les matrices de Seidel [10].

Définition 1 (DUMONT - VIENNOT [6]). - Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ une suite de nombres réels (ou complexes). On définit la matrice de Seidel $(a_n^k)_{n\geq 0, k\geq 0}$ associée à $(a_n)_{n\geq 0}$ par

$$a_n^0 = a_n\,,$$

$$a_n^i = a_n^{i-1} + a_{n+1}^{i-1}\,.$$

LEMME 3 (DUMONT - VIENNOT [4]). - Soit

$$g(t, u) = \sum_{n,k\geq 0} a_n^k \frac{t^n}{n!} \times \frac{u^k}{k!}\,,$$

la fonction génératrice exponentielle de la matrice de Seidel associée à la suite $(a_n)_{n\geq 0}$.

Si $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^n}{n!} = G(t)$, alors

$$g(t, u) = e^u\, G(t+u)\,.$$

C'est évident à partir de la définition, car

$$a_n^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_{n+i}^0 .$$

COROLLAIRE 1. - Soit $\alpha(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$, et soit $(a_n^k)_{n\geq 0, k\geq 0}$ la matrice de Seidel associée à la suite $(a_n)_{n\geq 0}$. Alors

$$\beta(X) = \sum_{n\geq 0} a_0^n X^n = \frac{1}{1-X} \alpha\left(\frac{X}{1-X}\right) .$$

D'après le lemme 3, on a $\sum_{n\geq 0} a_0^n \frac{u^n}{n!} = e^u G(u)$, et donc, par transformation de Laplace formelle [2], on a

$$\sum_{n\geq 0} a_0^n u^n = \frac{1}{1-u} \sum_{n\geq 0} a_n \left(\frac{u}{1-u}\right)^n .$$

COROLLAIRE 2 (EULER).

$$\frac{2u}{\sqrt{1-u^2}} \operatorname{Arc\,sin} u = \sum_{n\geq 1} \frac{(2n)^{2n}}{\binom{2n}{n}\, n}$$

Considérons la matrice de Seidel associée à la suite $a_n = (-1)^n/(2n+1)$.

$$\begin{array}{cccccc}
1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{7} & +\frac{1}{9} & -\frac{1}{11} \\[2ex]
\frac{2}{1.3} & \frac{-2}{3.5} & \frac{+2}{5.7} & \frac{-2}{7.9} & & \\[2ex]
\frac{2.4}{1.3.5} & \frac{-2.4}{3.5.7} & \frac{2.4}{5.7.9} & & & \\
\vdots & & & & & \\
\frac{2.4\ \ldots\ 2n}{1.3\ \ldots\ 2n+1} & \ldots & & & & \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

Il est facile de montrer par récurrence que

$$a_0^n = \frac{2.4\ \ldots\ 2n}{1.3\ \ldots\ 2n+1} = \frac{2^{2n}}{\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}} = \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}(2n+1)} .$$

Or si

$$\alpha(X) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{Arctg} \sqrt{x}$$

et donc, d'après le corollaire 1,

$$\sum_{n\geq 0} \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}(2n+1)} x^n = \frac{1}{1-x} \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{1-x}}} \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{x}{1-x}} .$$

Posons $x = u^2$.

$$\sum_{n\geq 0} \frac{2^{2n} u^{2n}}{\binom{2n}{n}(2n+1)} = \frac{1}{1-u^2} \frac{\sqrt{1-u^2}}{u} \operatorname{Arctg} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{\operatorname{Arc\,sin} u}{u} ,$$

donc

$$\sum_{n\geq 0} 2^{2n+1} \frac{u^{2n+1}}{\binom{2n+2}{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \operatorname{Arc\,sin} u .$$

3. Les nombres de Genocchi de 2e espèce.

Définition 2. - On notera $(g_n^k)_{n\geq 0, k\geq 0}$ la matrice de Seidel associée aux nombres de Genocchi.

Définition 3 (DUMONT). - Les nombres de Genocchi de 2e espèce sont définis par

$$H_{2n+1} = g_n^{n+1} = g_{n+1}^n = g_n^{n+2} = - g_{n+2}^n .$$

Pour les propriétés élémentaires de la matrice de Seidel des nombres de Genocchi voir DUMONT - VIENNOT [6].

D. DUMONT s'est aperçu qu'à condition de disposer de fonctions génératrices pour les H_{2n+1} analogues à celles données au paragraphe 1 (Lemmes 1 et 2) pour les nombres de Genocchi, il pouvait donner des interprétations combinatoires de ces nombres très proches de celles données pour les G_{2n+2}. Par exemple, il peut montrer alors que le nombre de permutations p de $\{1, \dots, 2n\}$, telles que $i < p(i)$ si i impair, et $i > p(i)$ si i pair, vaut $|H_{2n+1}|$.

Ce paragraphe sera consacré à la démonstration des théorèmes 1 et 2 qui donnent des fonctions génératrices pour les H_{2n+1} "à la Gandhi". Ces théorèmes avaient été conjecturés par DUMONT depuis longtemps déjà.

LEMME 4. - Soit $a_n = v^n$, $n \geq 0$, et soit $(a_n^k)_{n\geq 0, k\geq 0}$ la matrice de Seidel associée à cette suite, alors

$$\sum_{n\geq 0} a_n^k X^n = \frac{(v+1)^k}{1 - vX}$$

$$\sum_{n\geq 0} a_n^{n+k} X^n = \frac{(v+1)^k}{1 - v(v+1)X}$$

(avec $v \neq -1$) .

Si $a_n = v^n$, alors

$$a_n^1 = v^n + v^{n+1} = (v+1)\, v^n$$

$$a_n^2 = (v+1)\, v^n + (v+1)\, v^{n+1} = (v+1)^2\, v^n$$

$$\vdots$$

$$a_n^k = (v+1)^{k-1}\, v^n + (v+1)^{k-1}\, v^{n+1} = (v+1)^k\, v^n ,$$

d'où le résultat.

LEMME 5. - Soit (a_n^k) la matrice de Seidel associée à la suite $(a_n)_{n\geq 0}$. Si $a_0 = a_1 = \dots = a_N = 0$, alors

$$a_0^i = a_1^i = \dots = a_{N-i}^i = 0 \quad \text{pour} \quad i \leq N .$$

En effet, par récurrence, il suffit de montrer ceci pour $i = 1$, $a_k^1 = a_k^0 + a_{k+1}^0$, donc $a_k^1 = 0$ si $k \leq N-1$, d'où le résultat.

Définition 4. - On notera $(h_n^k)_{n\geq 0, k\geq 0}$ la matrice de Seidel associée à la suite $h_n = G_{n+2}$. On a bien évidemment

$$h_n^k = g_{n+2}^k \quad \text{pour} \quad n \geq 0$$

et

$$H_{2n+1} = -\, h_n^n = h_{n-1}^n = h_{n-2}^{n+2} = h_{n-2}^{n+1} .$$

THÉORÈME 1 (BARSKY - DUMONT). - On a

$$\sum_{n\geq 0} H_{2n+1}\, X^n = \sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^m\, (m!)^2\, X^m}{(1-2X)(1-6X)\dots(1-m(m+1)\,X)} .$$

On note, si $j \in \mathbb{Z}$ et si $(a_n^k)_{n\geq 0, k\geq 0}$ est la matrice de Seidel associée à la suite $(a_n)_{n\geq 0}$, ω_j l'application de $\mathbb{Q}[[X]]$ dans $\mathbb{Q}[[X]]$, définie par

$$\omega_j\Big(\sum_{n\geq 0} a_n\, X^n\Big) = \sum_{n\geq 0} a_n^{j+n}\, X^n .$$

On a donc

$$\sum_{n\geq 0} H_{2n+1}\, X^n = -\sum_{n\geq 0} h_n^n\, X^n = -\,\omega_0\Big(\sum_{n\geq 0} G_{2n+2}\, X^{2n}\Big)$$

$$= -\,\omega_0\Big(\sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^{m+1}\, (m!)^2\, X^{2m}}{(1-X^2)(1-4X^2)\dots(1-m^2\, X^2)}\Big) ,$$

Or l'application ω_0 est $\mathbb{Q}$-linéaire, et elle est continue pour la topologie X-adique sur $K[[X]]$ d'après le lemme 5, car, si $F(X) \in X^{2m}\ \mathbb{Q}[[X]]$, alors $\omega_0(F(X)) \in X^m\ \mathbb{Q}[[X]]$.

On notera v_X la valuation X-adique sur $\mathbb{Q}[[X]]$. Donc comme

$$v_X\{\omega_0(\Sigma_{k=-m}^{+m} (-1)^{m+k} \binom{2m}{m+k} \frac{1}{1-kX})\} \geq m ,$$

on a

$$\omega_0(\Sigma_{n\geq 0} G_{2n+2}\ X^{2n}) = \Sigma_{m\geq 0} (-1)^{m+1} \frac{(m!)^2}{2m!} \Sigma_{k=-m}^{+m} (-1)^{m+k} \frac{\binom{2m}{m+k}}{1-k(k+1)X} ,$$

car

$$\omega_0(\frac{1}{1-kX}) = \frac{1}{1-k(k+1)X} .$$

Or $k(k+1) = (-k-1)((-k-1)+1)$, donc

$$\Sigma_{k=-m}^{+m} \frac{(-1)^{m+k} \binom{2m}{m+k}}{1-k(k+1)X}$$

$$= \Sigma_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{m-k} \binom{2m}{m+k} + (-1)^{m+k+1} \binom{2m}{m+k+1}}{1-k(k+1)X}$$

$$= \frac{P_m(X)}{(1-2X)(1-6X)\ \ldots\ (1-m(m+1)X)}$$

avec $P_m(X) \in \mathbb{Z}[X]$, degré de $P_m \leq m$, et $v_X(P_m) \geq m$. Donc nécéssairement

$$P_m(X) = (-1)^{2m} (\binom{2m}{m} - \binom{2m}{m-1})\ m!\ (m+1)!\ X^m .$$

Et par conséquent,

$$\Sigma_{n\geq 0} H_{2n+1}\ X^n = \Sigma_{m\geq 0} \frac{(-1)^m (m!)^2 X^m}{(1-2X)(1-6X)\ \ldots\ (1-m(m+1)X)} ,$$

d'où le théorème.

LEMME . – <u>Avec les notations précédentes</u>,

$$\Sigma_{n\geq 0} h_n^1\ X^n = \Sigma_{m\geq 0} (-1)^{m+1} \frac{(m!)^2}{2m!} \Sigma_{k=-m}^{+m} \frac{(-1)^{m+k} \binom{2m}{m+k} (k+1)}{1-kX} .$$

C'est immédiat à partir du lemme 4.

LEMME 7. - Soit $P_r(X) \in \mathbb{Z}[X]$ de degré r, avec $r \leq 2m - 1$, alors

$$\sum_{k=-m}^{+m} (-1)^{m+k} \binom{2m}{m+k} P_r(k) = 0 .$$

Il suffit de le montrer pour $P_r(X) = X^r$.

$$\sum_{k=-m}^{+m} (-1)^{m+k} \binom{2m}{m+k} k^r = 0 \quad \text{si} \quad r \leq 2m - 1 .$$

Cette égalité provient de l'égalité évidente

$$\frac{(m!)^2 X^{2m}}{(1 - X^2)(1 - 4X^2) \dots (1 - m^2 X^2)} = \sum_{k=-m}^{+m} \frac{(-1)^{m+k} \binom{2m}{m+k}}{1 - kX} .$$

THÉORÈME 2 (BARSKY - DUMONT). - On a

$$\sum_{n\geq 0} H_{2n+3} X^n = \sum_{m\geq 1} \frac{(-1)^{m+1} m! (m+1)! X^m}{(1 - 2X)(1 - 6X) \dots (1 - m(m+1) X)} .$$

On a

$$\sum_{n\geq 0} H_{2n+3} X^n = \sum_{n\geq 0} h_n^{n+1} X^n$$

donc, d'après le lemme 6,

$$\sum_{n\geq 0} H_{2n+3} X^n = \Phi_0(\sum_{n\geq 0} h_n^1 X^n)$$

$$= \Phi_0(\sum_{m\geq 0} (-1)^{m+1} \frac{(m!)^2}{2m!} \sum_{k=-m}^{+m} \frac{(-1)^{m+k} \binom{2m}{m+k}(k+1)}{1 - kX})$$

D'après le lemme 5,

$$v_X(\sum_{k=-m}^{+m} \frac{(-1)^{m+k} \binom{2m}{m+k}(k+1)}{1 - k(k+1) X}) \geq m - 1 ,$$

mais, en fait

$$v_X(\sum_{k=-m}^{+m} \frac{(-1)^{m+k} \binom{2m}{m+k}(k+1)}{1 - k(k+1) X}) \geq m ,$$

car

$$\sum_{k=-m}^{+m} (-1)^{m+k} \binom{2m}{m+k} (k(k+1))^{m-1} (k+1) = 0 ,$$

d'après le lemme 7.

Donc, comme $k(k+1) = (-1-k)((-1-k)+1)$, on a

$$\sum_{k=-m}^{+m} \frac{(-1)^{m+k}\binom{2m}{m+k}(k+1)}{1-k(k+1)X}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{m+k}\left(\binom{2m}{m+k}(k+1) - \binom{2m}{m+k+1}(-k)\right)}{1-k(k+1)X}$$

$$= \frac{P_m(X)}{(1-2X)(1-6X)\ldots(1-m(m+1)X)} ,$$

où $P_m(X) \in \underset{\sim}{Z}[X]$, degré $P_m \leq m$, et $v_X(P_m) \geq X$, donc

$$P_m(X) = \binom{2m}{m} m!\,(m+1)!\,X^m$$

et donc

$$\sum_{n\geq 0} h_n^{n+1} X^n = \sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^{m+1} m!\,(m+1)!\,X^m}{(1-2X)(1-6X)\ldots(1-m(m+1)X)} ,$$

d'où le théorème.

4. Congruences pour les nombres de Genocchi de 2e espèce.

LEMME 8. - *Soit* p *un nombre premier, et* v_p *la valuation* p*-adique sur* $\underset{\sim}{Q}$, *alors*

$$v_p\left(\frac{(m!)^2}{2m!}\right) \geq -2\,\frac{\log 2m}{\log p} .$$

En effet,

$$\frac{m}{p^i} - 1 \leq \left[\frac{m}{p^i}\right] \leq \frac{m}{p^i}$$

(où [ ] désigne la partie entière), donc

$$0 \geq \sum_{i=1}^{\log 2m/\log p} 2\left[\frac{m}{p^i}\right] - \left[\frac{2m}{p^i}\right] \geq -2\,\frac{\log 2m}{\log p} .$$

THÉORÈME 3. - *Si* $p \neq 2$, *soit*

$$N_p(h) = h + 2 + 2\,\frac{\log h}{\log p} ,$$

$$r_p(h) = h + 1 + 2\,\frac{\log h}{\log p} .$$

Alors, pour tout $n \geq N_p(h)$,

$$H_{2n+1} \equiv H_{2(n+(p-1)p^{r(h)})} \mod p^h .$$

Soit $m(h)$ tel que $|m(h)!|_p^2 \leq \frac{1}{p^h}$, où $|\ |_p$ désigne la valeur absolue p-adique sur $\underset{\sim}{Q}$ (cf. [1]). Alors

$$\sum_{n\geq 0} H_{2n+1} X^n \equiv \sum_{m=0}^{m(h)-1} \frac{(-1)^m (m!)^2 X^m}{(1-2X)\ldots(1-m(m+1)X)} \mod p^h \underset{\sim}{Z}[[X]] .$$

Donc, $\mod p^h \underset{\sim}{Z}[[X]]$,

$$\sum_{n\geq 0} H_{2n+1} X^n \equiv \sum_{m=0}^{m(h)-1} (-1)^m \frac{(m!)^2}{2m!} \sum_{k=-m}^{+m} \frac{(-1)^{m+k}\binom{2m}{m+k}}{1-k(k+1)X} .$$

Or, si $k(k+1) \not\equiv 0 \mod p$, on a

$$(k(k+1))^{(p-1)p^{r(k)}} \equiv 1 \mod p^{r(h)+1}$$

et si $k(k+1) \equiv 0 \mod p$, on a

$$(k(k+1))^{N(h)} \equiv 0 \mod p^{N(h)} .$$

En outre, si $m < m(h)$, on a

$$v_p\left(\frac{(m!)^2}{(2m!)}\right) \geq -2\,\frac{\log 2m(h)}{\log p} .$$

Or $m(h) \leq (p-1)\,\frac{h}{2}$, donc

$$v_p\left(\frac{(m!)^2}{2m!}\right) \geq -2-2\,\frac{\log h}{\log p} .$$

Donc,

$$\text{si } N(h) = h+2+2\,\frac{\log h}{\log p} \text{ et si } r(h) = h+1+2\,\frac{\log h}{\log p} ,$$

alors, $\forall\, n \geq N(h)$,

$$H_{2n+1} \equiv H_{2(n+(p-1)p^{r(h)})+1} \mod p^h ,$$

d'où le théorème.

THÉORÈME 4. - <u>On a</u>

$$\frac{H_{4n-1}}{2^{2n-1}} \equiv 1 \mod 2 \ \underline{\text{si}}\ n \geq 3 ,$$

$$\frac{H_{4n+1}}{2^{2n-1}} \equiv 3 \mod 4 \quad \underline{\text{si}} \quad n \geq 2 .$$

Ces résultats avaient été conjecturés par DUMONT. Démontrons-les

$$\sum_{n\geq 0} H_{2n+3}\, X^n = \sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^{m+1}\, m!\,(m+1)!\, X^m}{(1-2X)\ \ldots\ (1-m(m+1)\,X)}$$

donc

$$\sum_{n\geq 0} H_{2n+3}\, \frac{X^n}{2^n} = \sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^{m+1}\, m!\,(m+1)!\, X^m\, 2^{-m}}{(1-X)(1-3X)\ \ldots\ (1-\frac{m(m+1)}{2}\,X)} .$$

On constate que, si $m \geq 4$, alors

$$v_2\Big(\frac{m!\,(m+1)!}{2^m}\Big) \geq 2 .$$

Donc, mod 4 $\underset{\sim}{Z}[[X]]$, d'après le théorème 2,

$$\sum_{n\geq 0} H_{2n+3}\, \frac{X^n}{2^n} \equiv -1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\binom{2}{0}.0}{1} - \frac{\binom{2}{1}.1}{1} + \frac{\binom{2}{2}.2}{1-X}\Big)$$

$$- \frac{1}{1.2.3}\Big(\frac{-\binom{4}{0}}{1-X} - \frac{\binom{4}{1}.0}{1} + \frac{\binom{4}{2}.1}{1} - \frac{\binom{4}{3}.2}{1-X} + \frac{\binom{4}{4}.3}{1-3X}\Big)$$

$$+ \frac{1}{20}\Big(\frac{-2}{1-3X} + \frac{6}{1-X} - \binom{6}{3} + \frac{2.\binom{6}{4}}{1-X} - \frac{18}{1-3X} + \frac{4}{1-4X}$$

$$\equiv -1 + X + X^2(-2) + \sum_{m\geq 3} X^m\Big(1 + \frac{9-3^{m+1}}{6} + \frac{36+4^{m+1}-20.3^m}{20}\Big) .$$

Donc, si $n \equiv 0 \mod 2$ et $n \geq 3$, alors

$$\frac{1}{2^n}\, H_{2n+3} \equiv 6 \mod 4$$

et si $n \equiv 1 \mod 2$ et $n \geq 3$, alors

$$\frac{1}{2^n}\, H_{2n+3} \equiv \frac{59}{5} \mod 4 ,$$

d'où le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Yvette). - Les nombres p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1975 (Collection SUP, "Le Mathématicien", 14).

[2] BARSKY (Daniel). - On Morita's p-adic gamma functions, Math. Proc. Cambr. phil. Soc., t. 89, 1981, p. 23-27.

[3] CARLITZ (L.). - A conjecture concerning Genocchi numbers, Norske Vidensk. Selsk. Skr., Trondheim, 1971, n° 9, 4 p.

[4] COMTET (L.). - Analyse combinatoire. - Paris, Presses universitaires de France, 1970 (Collection SUP, "Le Mathématicien", 4-5).

[5] DUMONT (D.). - Interprétation combinatoire des nombres de Genocchi, Duke math. J., t. 41, 1974, p. 305-318.

[6] DUMONT (D.) et VIENNOT (G.). - A combinatorial interpretation of the Seidel generation of Genocchi numbers, "Combinatorial mathematics, optimal designs". Edited by J. Srivastava, p. 77-87. - Amsterdam, North Holland, 1980 (Annals of discrete Mathematics, 6).

[7] GANDHI (J. M.). - A conjectured representation of Genocchi numbers, Amer. math. Monthly, t. 77, 1977, p. 505-506.

[8] MOUROD (E.), ISMAIL (H.) and STEWART (Donald). - On Dumont's polynomials, 1981 (Preprint).

[9] RIORDAN (J.) and STEIN (R.). - Proof of a conjecture on Genocchi numbers, Discrete Math., Amsterdam, t. 5, 1973, p. 381-388.

[10] SEIDEL (L.). - Über eine einfache Entstehungsweise der Bernoullischen Zahlen und einiger verwandten Reihen, Sitzungsberichte math.-phys. Classe Bayer. Akad. Wiss. München, 1977, p. 157-187.