DANIEL BARSKY

Majoration du nombre de zéros dans un disque des fonctions L p-adiques

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 7-8 (1979-1981), exp. nº 29, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1979-1981__7-8__A13_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
8e année, 1980/81, n° 29, 10 p.

MAJORATION DU NOMBRE DE ZÉROS DANS UN DISQUE DES FONCTIONS L p-ADIQUES

par Daniel BARSKY (*)
[Université Paris-7]

Résumé. - Soit χ un caractère de Dirichlet primitif pair de conducteur f_χ, et soit $L_p(s, \chi)$ la fonction L p-adique associée. Si $f_\chi = mqp^n$ avec $(m, p) = 1$ et n suffisament grand (la borne ne dépendant que de m et p), alors la fonction L_p n'a pas de zéros. On montre aussi que le nombre de zéros, $N_p(\rho, \chi)$, de la fonction $(s-1)\, L_p(s, \chi)$ dans le disque de centre -1 et de rayon $0 \leq \rho < \rho_p$ avec $\rho_p = p^{1-(1/(p-1))}$ si $p \neq 2$ (resp. $\rho_2 = 2$) est majoré par

$$N_p(\rho, \chi) \leq \frac{(3\varphi(f_\chi p) + 1) \log_p(p f_\chi) + 2\varphi(p f_\chi) \log_p 54}{\log \rho_p - \log \rho},$$

et on indique comment on peut améliorer ce résultat si $f_\chi = mqp^n$ avec n suffisament grand.

1. Notations et rappel.

Toutes les notations non définies sont celles d'AMICE [1] ou IWASAWA [4].

Soit p un nombre premier, $\mathbb{C}_p$ le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ (on choisit un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}_p$) ; $\mathbb{C}_p$ est muni d'une valeur absolue p-adique notée $|\ |$, et normalisée par $|p| = p^{-1}$.

Si $a \in \mathbb{C}_p$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on note

$$D(a, r)^+ = \{x \in \mathbb{C}_p ; \ |x - a| \leq r\}$$

$$D(a, r)^- = \{x \in \mathbb{C}_p ; \ |x - a| < r\} .$$

Les caractères de Dirichlet sont supposés primitifs et prolongés à $\mathbb{Z}$. On désigne par $\sum'^{N}_{a=0}$ une sommation sur les entiers premiers à p compris entre 0 et N.

Définition 1. - Soit χ un caractère de Dirichlet de conducteur f_χ divisant f $(\neq 0)$. On pose

$$(1) \qquad \sum_{n\geq 0} B_{n,\chi} \frac{X^n}{n!} = \sum_{a=0}^{f-1} \chi(a) \frac{X e^{aX}}{e^{fX} - 1} .$$

(*) Texte reçu le 25 mai 1981.

Daniel BARSKY, UER Mathématiques, Université Paris-7, 2 place Jussieu, 75251 PARIS CEDEX 05.

Si $\chi = \epsilon$ caractère trivial, on pose $B_n = B_{n,\epsilon}$.

PROPOSITION 1. - Soit χ un caractère de Dirichlet de conducteur f_χ divisant f $(\neq 0)$. Alors

$$(2) \qquad B_{n,\chi} = \frac{1}{f} \sum_{a=0}^{f-1} \chi(a) \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m+1} \times \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} (a + fk)^n .$$

C'est évident en identifiant les coefficients de X^n dans les 2 membres de (1).

2. Analyse p-adique

On définit par $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{C}_p)$ l'espace des applications continues de $\underset{\sim}{Z}_p$ dans $\underset{\sim}{C}_p$, par $\mathcal{UC}^1(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{C}_p)$ l'espace des applications continûment et uniformément différentiables de $\underset{\sim}{Z}_p$ dans $\underset{\sim}{C}_p$, muni de la norme

$$\|g\|_1 = \max\{\sup_{x\in \underset{\sim}{Z}_p} |g(x)| , \quad \sup_{(x,y)\in \underset{\sim}{Z}_p^2} |\frac{g(x) - g(y)}{x - y}|\} .$$

Le dual topologique de $\mathcal{UC}^1(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{C}_p)$, qui est noté $\mathcal{UC}^1(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{C}_p)'$, est appelé l'espace des distributions sur $\underset{\sim}{Z}_p$.

Définition 2. - Soit

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1) \dots (x-n+1)}{n!} , \quad n \neq 0 \quad (\text{resp. } \binom{x}{0} = 1) .$$

Alors il existe une unique distribution sur $\underset{\sim}{Z}_p$, μ , telle que

$$\forall\ n \geq 0 , \quad \int_{\underset{\sim}{Z}_p} \binom{x}{n} \, d\mu(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} .$$

En effet, il est bien connu [3] que $g \in \mathcal{UC}^1(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{C}_p) \Longleftrightarrow$ il existe une suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\underset{\sim}{C}_p$ telle que

$$(i) \qquad \lim_{n\to\infty} n|\lambda_n| = 0 \quad \text{et} \quad \forall\ x \in \underset{\sim}{Z}_p , \quad g(x) = \sum_{n\geq 0} \lambda_n \binom{x}{n} .$$

L'existence et l'unicité de μ sont alors évidents [7].

LEMME 1. - Si $g \in \mathcal{UC}^1(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{C}_p)$, alors

$$\int g d\mu = \sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^m}{m+1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} g(k) = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{rp^h} \sum_{a=0}^{rp^h - 1} g(a) .$$

La première égalité est la définition même de $\int g \, d\mu$, car

$$g(x) = \sum_{n\geq 0} \lambda_n \binom{x}{n} \quad \text{et} \quad \lambda_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g(k) .$$

La deuxième égalité provient de ce que $\sum_{a=0}^{m-1} g(a) = \sum_{n\geq 0} \lambda_n \binom{m}{n+1}$, donc

$$\frac{1}{rp^h} \sum_{a=0}^{rp^h-1} g(a) = \sum_{n\geq 0} \frac{\lambda_n}{n+1} \binom{rp^h-1}{n} .$$

Or, par hypothèse, $\lim_{n\to\infty} n|\lambda_n| = 0$, donc

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\lambda_n}{n+1} \binom{rp^h-1}{n} = \frac{(-1)^n}{n+1} \lambda_n$$

uniformément en n. Donc

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{rp^h} \sum_{a=0}^{rp^h-1} g(a) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} \lambda_n .$$

On pose, si $a \in \underset{\sim}{Z}_p$,

$$\omega(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } |a| < 1 , \\ \lim_{n\to\infty} a^{p^n} & \text{si } (a) = 1 , \end{cases}$$

ω est le caractère de Teichmüller sur $\underset{\sim}{Z}_p$.

On a, si $|a| = 1$,

$$\omega(a)^{p-1} = 1 \quad \text{et} \quad |\omega(a) - a| < 1 \quad [4] .$$

On pose

$$\rho_p = \begin{cases} p^{1-(1/(p-1))} & \text{si } p \neq 2 , \\ 2 & \text{si } p = 2 . \end{cases}$$

<u>Définition</u> 3 [4]. - On pose, pour $s \in D(1, \rho_p)^-$,

$$(3) \qquad (s+1) L_p(s+2, \chi) = \frac{1}{pf} {\sum_{a=0}^{pf-1}}' \chi(a) \int_{\underset{\sim}{Z}_p} \left(\frac{\omega(a)}{a+pfu}\right)^{s+1} d\mu(u) ,$$

où χ est un caractère de Dirichlet primitif pair de conducteur f_χ et où $f = rf_\chi$ avec $r \in \underset{\sim}{N}^*$.

Il est évident que dans (3) la valeur de $(s+1) L_p(s+2, \chi)$ ne dépend pas de $r \in \underset{\sim}{N}^*$; par ailleurs, il est facile de voir [4] que si χ est impair, alors $(s+1) L_p(s+2, \chi) \equiv 0$.

Soit $\mathcal{O}_p$ l'anneau des entiers de $\underset{\sim}{C}_p$

$$\mathcal{O}_p = \{x \in \underset{\sim}{C}_p \ ; \ |x| \leq 1\} .$$

Nous allons rappeler un résultat d'IWASAWA.

Soit χ_n un caractère primitif de Dirichlet, de conducteur $f_n = mqp^n$ avec $(m , p) = 1$, $q = p$ si $p \neq 2$, $q = 4$ si $p = 2$, tel que $\chi_n(-1) = 1$.

Soit θ le premier facteur de χ_n (cf. [4], p. 66), c'est-à-dire que l'on décompose $\chi_n = \theta\,\pi_n$, où θ est un caractère de conducteur m ou mq , et π_n est un caractère d'ordre p^n et de conducteur qp^n .

THEOREME A [4]. - Soit χ_n un caractère de Dirichlet primitif pair de conducteur mqp^n , et soit θ et π_n son premier et second facteur. Soit ζ_n la racine primitive p^n-ième de l'unité définie par $\pi_n(1 + mq) = \zeta_n^{-1}$. Soit

$$A_p = \mathcal{O}_p \cap \underset{\sim}{Q}_p[\theta(1) , \theta(2) , \ldots , \theta(mq - 1)] .$$

Alors il existe deux séries

$$f(\theta , T) = \sum_{k\geq 0} a_k T^k \in A_p[[T]]$$

$$g(\theta , T) = \sum_{k\geq 0} b_k T^k \in A_p[[T]] .$$

telle que, pour $|s| < qp^{-1/(p-1)}$,

$$L_p(s , \chi_n) = \frac{f(\theta , \zeta_n(1 + mq)^s - 1)}{g(\theta , \zeta_n(1 + mq)^s - 1)} \tag{4}$$

PROPOSITION 2 ([2] ou [9]. - Pour $s \in D(1 , \rho_p)^-$, on a

$$(5) \quad (s + 1)\, L_p(s + 2 , \chi)$$

$$= \sum_{k\geq 0} (pf)^{k-1} B_k \binom{-s-1}{k} {\sum_{a=0}^{pf-1}}' \chi(a)\, \omega(a)^{-k} \left(\frac{\omega(a)}{a}\right)^{s+k+1}$$

Par définition on a

$$(s + 1)\, L_p(s + 2 , \chi) = \frac{1}{pf} {\sum_{a=0}^{pf-1}}' \chi(a) \int_{\underset{\sim}{Z}_p} \left(\frac{\omega(a)}{a + pfu}\right)^{s+1} d\mu(u)$$

$$= \frac{1}{pf} {\sum_{a=0}^{pf-1}}' \chi(a) \left(\frac{\omega(a)}{a}\right)^{s+1} \int_{\underset{\sim}{Z}_p} \frac{d\mu(u)}{\left(1 + \frac{pfu}{a}\right)^{s+1}}$$

$$= \frac{1}{pf} \sum_{k\geq 0} (pf)^k \binom{-s-1}{k} {\sum_{a=0}^{pf-1}}' \chi(a)\, \omega(a)^{-k} \left(\frac{\omega(a)}{a}\right)^{s+k+1} \times \int_{\underset{\sim}{Z}_p} u^k\, d\mu(u) .$$

Or $\int u^k \, d\mu(u) = B_k$

COROLLAIRE 1. - On a, en convenant que $f_\epsilon = p$,

$$\sup_{s \in D(1,\rho_p)^-} |(s+1)\, L_p(s+2\,,\,\chi)| \leqslant |f_\chi^{-1}| \,. \tag{6}$$

D'après (5), il est clair que

$$\sup_{s \in D(1,\rho_p)^-} |(s+1)\, L_p(s+2\,,\,\chi)| \leqslant \sup_{s \in D(1,\rho_p)^-} \left| \frac{\sum\nolimits'^{\,pf-1}_{a=0} \chi(a) \left(\frac{\omega(a)}{a}\right)^{s+1}}{pf_\chi} \right| \,.$$

Or, si $s \in D(1\,,\,\rho_p)^-$,

$$\sum\nolimits'^{\,pf_\chi-1}_{a=0} \chi(a) \left(\frac{\omega(a)}{a}\right)^{s+1} = \sum_{a=0}^{f_\chi-1} \chi(a) \sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{\omega(a+if_\chi)}{a+if_\chi}\right)^{s+1}$$

$$= \sum_{a=0}^{f_\chi-1} \chi(a) \sum_{k\geqslant 0} \binom{s+1}{k} \sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{\omega(a+if_\chi)}{a+if_\chi} - 1\right)^k .$$

Or, d'après la démonstration du lemme 2,

$$\left| \sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{\omega(a+if_\chi)}{a+if_\chi} - 1\right)^k \right| \leqslant p^{-k-1} \,,$$

d'où le résultat.

3. Majoration du nombre de zéros dans un disque des fonctions L p-adiques.

Nous allons tout d'abord étudier le cas où le conducteur de χ est de la forme mqp^n, avec n suffisament grand.

THEOREME 1. - Soit m un entier premier à p fixé. Soit $n \geqslant 0$, et χ_n un caractère de Dirichlet primitif pair de conducteur mqp^n. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, la fonction L p-adique $L_p(s\,,\,\chi_n)$ soit sans zéro dans le disque $D(1\,,\,\rho_p)$.

D'après le théorème A ci-dessus, $L_p(s\,,\,\chi_n)$ a un zéro seulement si $f(\theta\,,\,\zeta_n(1+mq)^s - 1)$ a un zéro.

Or on peut écrire [1]

$$f(\theta\,,\,T) = p^\mu(b_0 + b_1 T + \dots + b_{\lambda-1} T^{\lambda-1} + T^\lambda) \times h(\theta\,,\,T)\,,$$

où $|b_i| < 1$ pour $0 \leqslant i < \lambda$ et $h(\theta\,,\,T) \in A_p[[T]]$ et est inversible dans $A_p[[T]]$.

Soit $\alpha_1 , \dots , \alpha_\lambda$ les racines dans $\underset{\sim}{C}_p$ du polynôme $b_0 + b_1 T + \dots + T^\lambda$. Il est clair que $|\alpha_i| < 1$ pour $1 \leq i \leq \lambda$.

Remarquons maintenant que :

$$L_p(s , \chi_n) = 0 \Longleftrightarrow \exists \, i , \; 1 \leq i \leq \lambda , \text{ tel que } \zeta_n(1 + mq)^s - 1 = \alpha_i ,$$

donc $(1 + mq)^s = (1 + \alpha_i) \zeta_n$.

Montrons que cette égalité (avec i fixé) n'a, au plus, qu'un couple (s , n) de solutions. En effet, si

$$(1 + mq)^s = (1 + \alpha_i) \zeta_n$$

$$(1 + mq)^{s'} = (1 + \alpha_i) \zeta_{n'}$$

alors $(1 + mq)^{s-s'} = \zeta_n / \zeta_{n'}$, donc il existe un entier N tel que

$$(1 = mq)^{N(s-s')} = 1 ;$$

ce qui impose $s = s'$ et donc $\zeta_n = \zeta_{n'}$. Donc le cardinal de l'ensemble des s, tels que $L_p(s , \chi_n) = 0$ pour un certain n, est inférieur ou égal à λ, et donc $L_p(s , \chi_n) \neq 0$ si n assez grand.

Afin de compléter ce résultat, nous allons donner une majoration du nombre de zéros de $(s + 1) \, L_p(s + 2 , \chi)$ dans un disque strictement contenu dans le disque de convergence.

On notera par $\varphi(f)$ le nombre d'entiers inférieurs ou égaux à f et premiers à f.

LEMME 2. - Soit χ un caractère de Dirichlet primitif pair, de conducteur f_χ, soit n un entier pair > 0, alors

$$|B_{n,\chi}| \geq \frac{1}{|f_\chi|} \frac{1}{(2^n f^{n+1}(n + 1)^{2(n+1)})} \varphi(f) . \tag{7}$$

On a

$$f_\chi B_{n,\chi} = \sum_{a=0}^{f_\chi - 1} \chi(a) \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m + 1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} (a + kf_\chi)^n . \tag{8}$$

On pose, par convention, que $f_\varepsilon = p$.

Il est clair que, pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\underset{\sim}{Q})$, où

$$K = \underset{\sim}{Q}(\chi(1) , \chi(2) , \dots , \chi(f_\chi - 1)) ,$$

χ^σ est un caractère primitif pair.

Il est clair, d'après (8), que $f_{\chi}\ B_{n,\chi}$ est un entier algébrique de $\bar{\mathbb{Q}}$. Donc, pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$,

$$|f_{\chi}\ B_{n,\chi}| \leq 1 ,$$

donc

$$|B_{n,\chi}| \geqslant (\textstyle\prod_{\sigma\neq id} |f_{\chi}\ B_{n,\chi}^{\sigma}|)|B_{n,\chi}| \ , \quad |B_{n,\chi}| \geqslant (\textstyle\prod_{\sigma\neq id} |f_{\chi}|)\,|N_{K/\mathbb{Q}}(B_{n,\chi})| \ .$$

Or $N_{K/\mathbb{Q}}(B_{n,\chi}) \in \mathbb{Q}$. On pose donc

$$N_{K/\mathbb{Q}}(B_{n,\chi}) = \frac{N_n}{D_n} \quad \text{avec } N_n \text{ et } D_n \in \mathbb{Z} \ .$$

En utilisant (7), il est facile de montrer, en notant $|\ |_{\infty}$ la norme archimédienne sur $\mathbb{Q}$, que

(9) $$|N_n|_{\infty} \leq 2^n\ (f_{\chi}(n+1))^n\ (n+1)!\ f_{\chi}\ n)^{\varphi(f)} ,$$

car $\varphi(f) \geq \#\ \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

Pour obtenir (9), on a majoré trivialement dans (8), $(a + k\ f_{\chi})^n$ par $(f(n+1))^n$ et $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}$ par 2^n .

On a aussi, de manière immédiate,

$$|D_n|_{\infty} = \left(\frac{1}{f(n+1)!}\right)^{\varphi(f)} ,$$

et en utilisant le fait bien connu que si $N_n \in \mathbb{Z}$ et si $|N_n|_{\infty} \leqslant A$ avec $A \in \mathbb{N}$, alors $|N_n| \geqslant \frac{1}{A}$. Donc

$$|B_{n,\chi}| \geqslant |f_{\chi}|^{-1} \frac{1}{(2^n\ f_{\chi}^{n+1}\ (n+1)^{2(n+1)})^{\varphi(f)}}$$

d'où le résultat.

COROLLAIRE 2. - <u>Si</u> χ <u>est un caractère primitif pair, de conducteur</u> f_{χ} , <u>alors</u>

(10) $$|L_p(-1\ ,\ \chi)| \geqslant \frac{1}{|p\ f_{\chi}|}\ \frac{1}{((pf_{\chi})^3\ 2^2\ 3^6)^{\varphi(f_{\chi}p)}} \ .$$

D'après [4], on sait que l'on a

$$-\ n\ L_p(1-n\ ,\ \chi) = (1 - \chi\,\omega^n(p)\ p^{n-1})\ B_{n,\chi\omega^n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \ .$$

Donc, si $n = 2$, $|L_p(-1\ ,\ \chi)| = |B_{2,\chi\omega^2}|$; on applique alors (7) avec $n = 2$ et f_{χ} remplacé par $p\ f_{\chi}$, il vient

$$|B_{2,\chi\omega^2}| \geq \frac{1}{((p\, f_\chi)^3\, 2^2\, 3^6)^{\varphi(pf_\chi)}} \times \frac{1}{|p\, f_\chi|},$$

d'où le résultat.

THÉORÈME 2. - Soit χ un caractère de Dirichlet primitif pair, de conducteur f_χ. Soit $N_p(\rho\, ,\, \chi)$ le nombre de zéros de la fonction $(s-1)\, L_p(s\, ,\, \chi)$ dans le disque $D(-1\, ,\, \rho)^+$ avec $0 \leq \rho < \rho_p$. On a

$$N_p(\rho\, ,\, \chi) \leq \left[\frac{(3\varphi(p\, f_\chi) + 1)\, \log(p\, f_\chi) + 2\varphi(p\, f_\chi)\, \log_p 54}{\log \rho_p - \log \rho} \right] \tag{11}$$

(où [ ] désigne la partie entière).

Soit $h \in \underset{\sim}{N}^*$ tel que

$$p^{-h} \leq \frac{1}{((p\, f_\chi)^3\, 3^6\, 2^2)^{\varphi(f_\chi p)}} \times \frac{1}{|p\, f_\chi|} .$$

Remarquons que

$$\frac{d^k}{d\, s^k} \left(\frac{\omega(a)}{a}\right)^{s+1} = \left(\frac{\omega(a)}{a}\right)^{s+1} \log^k \frac{\omega(a)}{a}$$

et que

$$\left|\log \frac{\omega(a)}{a}\right| \leq p^{-1}$$

(ici le log est le log p-adique [4]).

Donc, d'après les estimations précédentes et la proposition 2, on a

$$\left|\frac{d^k}{d\, s^k} \{(s+1)\, L_p(s+2\, ,\, \chi)\}\right| \leq |(f_\chi\, p)^{-1}|\, p^{-k} ,$$

et par conséquent,

$$\left|\frac{1}{k!} \times \frac{d^k}{d\, s^k} \{(s+1)\, L_p(s+2\, ,\, \chi)\}\right| \leq |(fp^{-1}|\, \rho_p^{-k} . \tag{12}$$

Donc, si l'on pose $(s-1)\, L_p(s\, ,\, \chi) = \sum_{k\geq 0} a_k\, (s+1)^k$,

$$\begin{cases} |a_0| & \text{vérifie la minoration (10) du corollaire 2 ,} \\ |a_k| & \text{, pour } k \geq 1 \text{ , vérifie la majoration (12) .} \end{cases} \tag{13}$$

Nous noterons $\log_p$ le logarithme réel en base p.

De (13), on déduit immédiatement que le polynôme de Newton [1] de $(s-1)\, L_p(s,\chi)$

ne peut pas avoir de côté de pente strictement inférieure à

$$1 - \frac{1}{p-1} - \log_p(|p\ f_\chi^{-1}) - h - 1 ,$$

et plus généralement le côté de pente $(k\ \rho_p - \log_p(|p\ f_\chi|^{-1}) - h)\ 1/k$ est au plus de longueur k. Donc, d'après la théorie du polynôme de Newton, le nombre de zéros de $(s-1)\ L_p(s, \chi)$, dont la valuation p-adique est inférieure ou égale à $-\log_p \rho$, est au plus de $(h + \log_p |f_\chi\ p|^{-1})/(\log_p \rho_p - \log_p \rho)$.

Donc

$$N_p(\rho , \chi) \leq \frac{h + \log_p |f_\chi\ p|^{-1}}{\log_p \rho_p - \log_p \rho} .$$

Or on peut prendre

$$h = 3\varphi(p\ f_\chi)\ \log p\ f_\chi + 2\varphi(p\ f_\chi)\ \log_p(54) ,$$

et on remarque que $\log |p\ f_\chi|^{-1} \leq \log_p(p\ f_\chi)$. D'où le résultat.

<u>Remarque 1</u>. - Ce résultat peut être amélioré dans le cas $p = 2$ ou $p = 3$ sous la forme :

(14) $$N_p(\rho , \chi) \leq A(p\ f_\chi) + \frac{B \log(p\ f_\chi) + C}{\log \rho_p - \log \rho} ,$$

où A, B, C ne dépendent pas de χ, mais il faut alors utiliser un théorème sur les zéros des polynômes exponentiels dû à VAN DER POORTEN - ROBBA ([6] ou [8]).

<u>Remarque 2</u>. - Si l'on suppose que $f_\chi = m\ q\ p^n$ avec n assez grand, on peut aussi améliorer le théorème 2 et obtenir une formule de type (14), en tenant compte de ce qu'il y a un certain nombre de $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\underset{\sim}{Q})$ qui se prolongent en des isométries de $\underset{\sim}{C}_p$. Mais, en fait, à cause du théorème 1, cette amélioration est probablement illusoire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Yvette). - Les nombres p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1975 (Collection SUP, "Le Mathématicien", 14).

[2] DIAMOND (Jack). - On the value of p-adic L functions at positive integers, Acta Arithm., Warszawa, t. 35, 1979, p. 223-237.

[3] HELSMOORTEL (Eve). - Comportement local des fonctions continues sur un compact régulier d'un corps local, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, 1970, série A, p. 546-548.

[4] IWASAWA (Kenkichi). - p-adic L functions. - Princeton, Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1972 (Annals of Mathematics Studies, 74).

[5] MAHLER (K.). - An interpolation serie for continuous functions of a p-adic variable, J. für reine und angew. Math., t. 199, 1958, p. 23-34.

[6] ROBBA (Philippe). - Nombre de zéros de fonctions exponentielles polynômes, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 4e année, 1976/77, n° 9, 3 p.

[7] SERRE (Jean-Pierre). - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France (Institut des hautes Etudes scientifiques, Publications mathématiques, 12, p. 69-85).

[8] VAN DER POORTEN (A. J.). - Hermite interpolation and p-adic exponential polynomials, J. Australian math. Soc., t. 22, 1976, p. 12-26.

[9] WASHINGTON (L. C.). - A note on p-adic L functions, J. of Number Theory, t. 8, 1976, p. 245-250.