Philippe Robba

Une propriété de spécialisation continue

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 7-8 (1979-1981), exp. nº 26, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1979-1981__7-8__A12_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
8e année, 1980/81, n° 26, 11 p.

26 janvier et 23 février 1981

UNE PROPRIÉTÉ DE SPÉCIALISATION CONTINUE
(d'après ARTIN, BOSCH, LANG, VAN DEN DRIES)

par Philippe ROBBA (*)
[Université Paris-Sud, Orsay]

1. Introduction.

1.1. Soit $R \subset \bar{R}$ un couple d'anneaux commutatifs intègres. On suppose que $\bar{R}$ est muni d'une valuation, et que R est dense dans $\bar{R}$ pour la topologie associée.

Définition. - On dira que le couple $R \subset \bar{R}$ a la propriété de spécialisation continue si : Pour toute famille finie $\{f_i\}_{i \in I}$ de polynômes dans $R[Y]$, où $Y = [Y_1, \ldots, Y_n]$ dénote un ensemble de n indéterminées et pour toute solution $\bar{y} \in \bar{R}^n$ du système d'équations $f_i(\bar{y}) = 0$, $i \in I$, on peut trouver une solution $y \in R^n$ arbitrairement proche de $\bar{y}$ (un tel y est appelé une spécialisation de $\bar{y}$).

1.2. Si $n = 1$ (cas d'une seule indéterminée), comme les racines d'un polynôme sont isolées, on voit que si le couple $R \subset \bar{R}$ a la propriété de spécialisation continue, alors R est algébriquement clos dans $\bar{R}$. Serge LANG a conjecturé que si $R \subset \bar{R}$ est un couple "naturel" d'anneaux avec $\bar{R}$ complet et R algébriquement clos dans $\bar{R}$, alors le couple $R \subset \bar{R}$ a la propriété de spécialisation continue.

1.3. La propriété de spécialisation continue est vérifiée pour les couples d'anneaux suivants :

(i) $\bar{R}$ est un corps complet de caractéristique 0, et R est un corps algébriquement clos dans $\bar{R}$ (S. LANG [4]).

(ii) $\bar{R}$ est l'algèbre des séries formelles à m variables sur un corps valué K de caractéristique 0, et R est la sous-algèbre des séries convergeant au voisinage de 0, $\bar{R}$ étant muni de la topologie X-adique (M. ARTIN [1]).

(iii) K étant un corps valué ultramétrique complet de caractéristique 0, $\bar{R}$ est l'algèbre des séries entières à m variables convergeant dans la boule unité fermée de K^m, et R est l'algèbre des séries convergeant dans une boule de rayon > 1, $\bar{R}$ étant muni de la norme de Gauss.

[Précisément, si $u = \sum a_\nu X^\nu$, $\nu \in \underset{\sim}{N}^m$, $X = (X_1, \ldots, X_m)$,

---

(*) Texte reçu le 18 mai 1981.

Philippe ROBBA, 138 rue Nationale, 75013 PARIS.

$$u \in \bar{R} \iff |a_\nu| \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad |\nu| = \sum \nu_i \longrightarrow +\infty$$

$$u \in R \iff \exists \rho > 1 , \quad |a_\nu| \rho^\nu \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad |\nu| \longrightarrow +\infty ,$$

et la norme de Gauss de u est $\|u\| = \sup |a_\nu|$.]
(Cf. S. BOSCH [2] et, dans le cas $m = 1$, L. van den DRIES [5].)

En fait, ARTIN et BOSCH démontrent une propriété plus forte, car ils considèrent le cas où les équations $f_i(Y) = 0$ sont des équations analytiques, et pas seulement des équations algébriques. De plus, BOSCH ne suppose pas que le corps K soit de caractéristique 0 . Le schéma de la démonstration de BOSCH suit celui de ARTIN, et dans les deux cas on doit utiliser des résultats sophistiqués de géométrie algébrique.

Par contre, la démonstration de van den DRIES reste plus proche de la démonstration de LANG, et n'utilise que des résultats plus élémentaires d'algèbre.

1.4. Nous allons démontrer les résultats (i), (ii), et (iii) en suivant les idées de van den DRIES. Nous commencerons par donner un critère général assurant que le couple $R \subset \bar{R}$ a la propriété de spécialisation continue.

1.5. Définition. - On dira que le couple $R \subset \bar{R}$ a la propriété de division continue si : Pour toute famille de polynômes g , $f_1 , \ldots , f_r \in R[Y]$ avec $Y = (Y_1 , \ldots , Y_n)$, et pour tout $\bar{y} \in \bar{R}^n$ tel que $g(\bar{y})$ divise $f_i(\bar{y})$, $1 \leqslant i \leqslant r$, il existe $y \in R^n$ arbitrairement proche de $\bar{y}$, tel que $g(y)$ divise $f_i(y)$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

1.6. THÉORÈME. - *Si le couple d'anneaux* $R \subset \bar{R}$ *vérifie*

1° $\bar{R}$ *est complet pour sa valuation, et est de caractéristique* 0 ,

2° *le couple* $R \subset \bar{R}$ *a la propriété de division continue,*

3° R *est algébriquement clos dans* $\bar{R}$,

alors le couple $R \subset \bar{R}$ *a la propriété de spécialisation continue.*

1.7. Le cas particulier 1.3 (i), considéré par LANG, est un cas particulier de ce théorème car, dans le cas où R et $\bar{R}$ sont des corps, comme R est dense dans $\bar{R}$, la propriété de division continue est trivialement vérifiée.

1.8. Dans le paragraphe 2, nous énoncerons le lemme de Newton pour les anneaux values complets. On verra qu'une solution approchée d'un système d'équations algébriques peut être raffinée en une solution exacte, lorsqu'elle est divisible par le carré du déterminant jacobien de l'application algébrique considérée. La propriété de division continue s'interprête donc comme un préliminaire à l'utilisation du lemme de Newton.

Dans le paragraphe 3, nous démontrerons le théorème 1.6.

Dans les paragraphes suivants, nous démontrerons la propriété de spécialisation continue dans le cas 1.3 (ii), considéré par ARTIN (que nous appellerons cas des séries formelles), et dans le cas 1.3 (iii), considéré par BOSCH et van den DRIES (que nous appellerons cas des fonctions strictement analytiques).

Pour pouvoir appliquer le théorème 1.6, il faut montrer que dans ces deux cas R est algébriquement clos dans $\bar{R}$. C'est bien connu dans le cas des séries formelles. C'est également connu dans le cas des fonctions analytiques strictes (cf. [3]). Néanmoins, nous montrerons au paragraphe 4 comment on peut redémontrer ce résultat plus simplement en même temps que la propriété de spécialisation continue.

Dans le paragraphe 5, nous rappellerons le théorème de préparation de Weierstrass. Dans le paragraphe 6, nous démontrerons (simultanément pour les deux cas) que le couple $R \subset \bar{R}$ a la propriété de division continue, ce qui, par le théorème 1.6, entraînera la propriété de spécialisation continue.

La démonstration se fait par récurrence sur le nombre m de variables qui interviennent dans la définition de $\bar{R}$. Si l'on note R_m et $\bar{R}_m$ les anneaux considérés dans 1.3 (ii) et 1.3 (iii) respectivement, la démonstration prend la forme suivante.

– Le couple $R_0 \subset \bar{R}_0$ a la propriété de spécialisation continue (c'est évident puisque dans ce cas $R_0 = \bar{R}_0 = K$).

– (Proposition 6.2) Si le couple $R_{m-1} \subset \bar{R}_{m-1}$ a la propriété de spécialisation continue, alors le couple $R_m \subset \bar{R}_m$ a la propriété de division continue.

– (Dans le cas des fonctions strictement analytiques, proposition 4.2) Si le couple $R_m \subset \bar{R}_m$ a la propriété de division continue, alors R_m est algébriquement clos dans $\bar{R}_m$.

– (Par application du théorème 1.6, compte tenu de la clôture algébrique relative de R_m dans $\bar{R}_m$) Si le couple $R_m \subset \bar{R}_m$ a la propriété de division continue, il a la propriété de spécialisation continue.

En fait nous montrerons dans les deux cas que <u>si les coefficients des équations f_i sont des fonctions algébriques, la spécialisation</u> $y \in R^n$ <u>peut être choisie fonction algébrique.</u>

2. Le lemme de Newton dans les anneaux valués complets.

2.1. Soit $\bar{R}$ un anneau commutatif intègre valué complet.

Pour $y = (y_1 , \ldots , y_n) \in \bar{R}^n$, on pose $|y| = \max |y_i|$. Si $f(Y) = \sum_{\text{finie}} a_\nu Y^\nu$ est une application polynomiale de $\bar{R}^n$ dans $\bar{R}^n$, avec $a_\nu \in \bar{R}^n$, $\nu \in \underset{\sim}{N}^n$, $Y = (Y_1 , \ldots , Y_n)$, on pose $\|f\| = \sum_\nu |a_\nu|$.

(N. B. – On considère à la fois le cas archimédien et le cas non archimédien.)

Soit Φ une application polynomiale de $\bar{R}^n$ dans $\bar{R}^n$. On considère son développement taylorien au voisinage de $y_0 \in \bar{R}^n$:

$$\Phi(y_0 + v) = \Phi(y_0) + J\,v + Q(v) ,$$

où $J = J(y_0)$ est la matrice jacobienne, et $Q = Q(y_0)$ est une application polynomiale ne contenant que des termes au moins quadratiques.

Soit J^* la matrice transposée de la matrice des mineurs de J. D'après les formules de CRAMER, $J^* J = \delta\, I$, où $\delta = \det(J)$ et I est la matrice unité.

2.2. LEMME DE NEWTON. - <u>Posons</u> $M = \|J^* Q(y_0)\|$. <u>Si l'on a</u> $\Phi(y_0) = \delta(y_0)^2 h$ <u>avec</u> $|J^* h| < 1/2 \min(1 , 1/|\delta(y_0)| , 1/2M)$, <u>il existe</u> $u \in \bar{R}^n$ <u>avec</u> $|u| \leq 2\,|J^* h|$ <u>tel que</u> $\Phi(y_0 + \delta u) = 0$.

<u>Démonstration</u>. - On désire avoir

$$\Phi(y_0 + \delta u) = \delta^2 h + \delta J u + Q(\delta u) = 0 .$$

Multipliant par J^* et tenant compte du fait que, Q ne contenant que des termes au moins quadratiques, $Q(\delta u)$ est divisible par δ^2, il suffit que l'on ait

$$u = - J^* h - Q(\delta u)/\delta^2 .$$

Pour $|u|$, $|v| \leq \omega = \min(1 , 1/|\delta| , 1/2M)$, on a

$$|Q(\delta u)/\delta^2 - Q(\delta v)/\delta^2| \leq |u - v| \max(|u| , |v|)\, M \leq \frac{1}{2} |u - v| .$$

Posons $u_0 = 0$, et $u_n = - J^* h - (1/\delta^2)\, Q(\delta u_{n-1})$ pour $n \geq 1$.

D'après un raisonnement classique, on montre par induction que

$$|u_n - u_{n-1}| \leq \frac{1}{2^{n-1}} |u_1 - u_0| \leq \frac{1}{2^{n-1}} |J^* h|$$

et donc

$$|u_n| \leq 2\,|J^* h| \leq \omega .$$

Ceci montre que la suite u_n est de Cauchy, et donc converge vers une limite u qui est solution de notre problème et vérifie $|u| \leq 2\,|J^* h|$.

3. Démonstration du théorème 1.6.

Soient $\{f_j\}_{j\in I}$ avec $f_j \in R[Y]$, et I ensemble fini ; et soit $\bar{y} \in \bar{R}^n$ tel que $f_j(\bar{y}) = 0$, $j \in I$.

Soit $F = Fr(R)$ le corps des fractions de R. Il existe $\bar{t} = (\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_s) \in \bar{R}^s$, base de transcendance sur F, et $\bar{\alpha} \in \bar{R}$ algébrique sur $F(\bar{t})$ tels que $F(\bar{t} , \bar{\alpha}) = F(\bar{y})$. On a

$$\bar{y}_i = \sum_\nu \frac{\varphi_{i\nu}(\bar{t})}{\psi_{i\nu}(\bar{t})} \alpha^\nu = \frac{\varphi_i(\bar{t}\ ,\ \bar{\alpha})}{\psi_i(\bar{t})}\ ,$$

avec $\varphi_i \in R[T\ ,\ A]$, $\psi_i \in R[T]$ et $\psi_i(\bar{t}) \neq 0$, où $T = [T_1\ ,\ \dots\ ,\ T_s]$ et A sont des indéterminées.

Soit $g(\bar{t}\ ,\ A)$ le polynôme minimal de α sur $F(\bar{t})$. On peut supposer que $g \in R[T\ ,\ A]$. Comme F est de caractéristique 0 , $(\partial y/\partial A)(\bar{t}\ ,\ \bar{\alpha}) \neq 0$.

Posons $\delta = (\partial y/\partial A)(T\ ,\ A) \prod_{i=0}^n \psi_i(T)$. Comme $g(\bar{t}\ ,\ \bar{\alpha}) = 0$ et $\bar{y}_i\ \psi_i(\bar{t}) - \varphi_i(\bar{t}\ ,\ \bar{\alpha}) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, le polynôme $\delta^2(\bar{t}\ ,\ \bar{\alpha})$ divise $g(\bar{t}\ ,\ \bar{\alpha})$ et $\bar{y}_i\ \psi_i(\bar{t}) - \varphi_i(\bar{t}\ ,\ \bar{\alpha})$, $1 \leqslant i \leqslant n$, donc d'après la propriété de division continue, il existe $(t\ ,\ \beta\ ,\ z) \in \bar{R}^{s+1+n}$, arbitrairement proche de $(\bar{t}\ ,\ \bar{\alpha}\ ,\ \bar{y})$ tel que $\delta^2(t\ ,\ \beta\ ,\ z)$ divise $g(t\ ,\ \beta)$ et $z_i\ \psi_i(t) - \varphi_i(t\ ,\ \beta)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Considérons l'application Φ_t

$$(\alpha\ ,\ y) \longmapsto (g(t\ ,\ \alpha)\ ,\ (y_i\ \psi_i(t) - \varphi_i(t\ ,\ \alpha)\ ,\ 1 \leqslant i \leqslant n)\ ,$$

application polynômiale de $\bar{R}^{1+n}$ dans $\bar{R}^{1+n}$. On voit que le déterminant de sa matrice jacobienne est δ . En prenant $(t\ ,\ \beta\ ,\ z)$ suffisament proche de $(\bar{t}\ ,\ \bar{\alpha}\ ,\ \bar{y})$, on aura

$M(t\ ,\ \beta\ ,\ z) := \|J^*\ Q\|$ proche de $M(\bar{t}\ ,\ \bar{\alpha}\ ,\ \bar{g})$,

$\delta(r\ ,\ \beta\ ,\ z)$ proche de $\delta(\bar{t}\ ,\ \bar{\alpha}\ ,\ \bar{y}) \neq 0$,

$|\Phi_t(\beta\ ,\ z)/\delta^2|$ proche de $|\Phi_{\bar{t}}(\bar{\alpha}\ ,\ \bar{y})/\delta^2| = 0$.

On sera donc dans les conditions d'application du lemme de Newton et par conséquent il existe $(\alpha\ ,\ y) \in \bar{R}^{1+n}$ proche de $(\bar{\alpha}\ ,\ \bar{y})$ tel que $g(r\ ,\ \alpha) = 0$ et $y_i\ \psi_i(t) - \varphi_i(t\ ,\ \alpha) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Comme R est algébriquement clos dans $\bar{R}$ et que $g(t\ ,\ A) \in R[A]$, on voit que $\alpha \in R$. On voit ensuite, pour les mêmes raisons, que $y_i \in R$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Enfin, pour tout j , $f_j(\dots\ ,\ \dfrac{\varphi_i(T\ ,\ A)}{\psi_i(T)}\ ,\ \dots) = g(T\ ,\ A)\ h_j(T\ ,\ A)$ puisque $f_j(\dots\ ,\ \dfrac{\varphi_i(\bar{t}\ ,\ \bar{\alpha})}{\psi_i(\bar{t})}\ ,\ \dots) = 0$. On peut choisir t suffisament proche de $\bar{t}$ de sorte que les dénominateurs $\psi_i(t)$ et les dénominateurs de $h_j(t\ ,\ \alpha)$ ne s'annulent pas. On voit alors que, pour y construit précédement, on aura $f_j(y) = 0$.

4. Cas des fonctions strictement analytiques. Clôture algébrique relative de R dans $\bar{R}$.

4.1. Dans ce paragraphe K désigne un corps de caractéristique 0 , valué ultramétrique complet.

On note

$\bar{R}$:= anneau des séries entières convergeant dans la boule unité de K^m

$$= \{u = \sum a_\nu X^\nu \ ; \quad X = (X_1 , \dots , X_n) , \quad \nu \in \underset{\sim}{N}^n , \quad a_\nu \in K ,$$
$$|a_\nu| \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad |\nu| \longrightarrow +\infty\}$$

et

R := anneau des séries entières convergeant dans une boule de rayon > 1

$$= \{u = \sum a_\nu x^\nu \ ; \text{ il existe } \rho > 1 \text{ tel que } |a_\nu| \rho^{|\nu|} \longrightarrow 0$$
$$\text{quand } |\nu| \longrightarrow +\infty\} .$$

On muni $\bar{R}$ de la norme de Gauss, pour $u = \sum a_\nu X^\nu$,

$$|u| := \sup_\nu |a_\nu| .$$

Ceci définit une valeur absolue sur $\bar{R}$. L'anneau $\bar{R}$ est complet pour cette valeur absolue, et R est dense dans $\bar{R}$.

Il est connu que R est algébriquement clos dans $\bar{R}$ [3]. Nous allons indiquer comment on peut retrouver ce résultat plus simplement en même temps que le théorème de spécialisation.

4.2. PROPOSITION. - <u>Admettons que le couple $R \subset \bar{R}$, ainsi défini, possède la propriété de division continue. Alors R est algébriquement clos dans $\bar{R}$.</u>

<u>Démonstration</u>. - Soit $f \in R[Y]$ irréductible non nul, et $\bar{y} \in \bar{R}$ tel que $f(\bar{y}) = 0$. On a $f'(\bar{y}) \neq 0$ (car K est de caractéristique nulle).

Pour $\rho > 1$, posons $A_\rho := \{u = \sum a_\nu X^\nu \ ; \ |a_\nu| \rho^{|\nu|} \longrightarrow 0 \text{ quand } |\nu| \longrightarrow +\infty\}$.

Muni de la valeur absolue $|u|_\rho := \sup |a_\nu| \rho^\nu$, A_ρ est complet. On a $\bar{R} = A_1$ et $R = \bigcup_{\rho>1} A_\rho$. De plus, si $u \in A_{\rho_0}$, $\rho_0 > 1$, la fonction $\rho \longmapsto |u|_\rho$ est continue pour $1 \leqslant \rho \leqslant \rho_0$.

On peut choisir $z \in R$ arbitrairement proche de $\bar{y}$ tel que $f'(z)^2$ divise $f(z)$ (grâce à l'hypothèse de propriété de division continue). Considérons le développement de Taylor $f(z + v) = f(z) + f'(z)\, v + Q(v)$.

On peut supposer que z a été choisi suffisement proche de $\bar{y}$ pour avoir

$$|f(z)/f'(z)^2| < \frac{1}{2} (\min(1 , \frac{1}{|f'(z)|} , \|Q\|) .$$

Pour ρ suffisament proche de 1, on aura $f \in A_\rho[Y]$, $z \in A_\rho$, et encore

$$|f(z)/f'(z)^2|_\rho < \frac{1}{2} \min(1 , \frac{1}{|f'(z)|_\rho} , \|Q\|_\rho) .$$

Donc d'après le lemme de Newton, il existe $y \in A_\rho$ solution de $f(y) = 0$ et proche de z.

On construit ainsi des solutions dans R de l'équation $f(y) = 0$ arbitrairement proches de $\bar{y}$. Comme les solutions sont isolées c'est que $\bar{y} \in R$.

5. Le théorème de préparation de Weierstrass.

5.1. C'est un cas particulier du lemme de Hensel pour les anneaux valués ultramétriques complets. Nous allons rappeler le lemme de Hensel.

Soit A un anneau valué ultramétrique complet. Considérons la série

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} a_j X^j \quad \text{avec} \quad a_j \in A , \quad \sup_j |a_j| < +\infty .$$

Posons $\|u\| = \sup_j |a_j|$. On suppose qu'il existe j tel que $|a_j| = \|u\|$. Ceci se produit soit si la valuation de A est discrète (c'est cette hypothèse qui sera réalisée dans le cas des séries formelles), soit si $|a_j| \longrightarrow 0$ quand $j \longrightarrow +\infty$ (c'est cette hypothèse qui sera réalisée dans le cas des fonctions strictement analytiques).

On pose

$$n(u) = \inf(j \; ; \; |a_j| = \|u\|)$$

$$N(u) = \sup(j \; ; \; |a_j| = \|u\|) ,$$

(si $\lim_{j\to\infty} |a_j| = 0$, $N(u) < +\infty$).

LEMME de Hensel. - Sous les hypothèses précédentes

1° Soit $n = n(u)$. Si a_n est une unité de A, il existe un polynôme P unitaire de degré n et une série $v = \sum b_j X^j$ tels que $u = Pv$, $n(P) = n$ et $n(v) = 0$. De plus, le terme constant b_0 de v est une unité.

2° Soit $N = N(u) < +\infty$. Si a_N est une unité de A, il existe un polynôme Q unitaire de degré N et une série $w = \sum c_j X^j$ tels que $u = Qw$, $N(Q) = N$ et $N(w) = 0$. De plus, le terme constant c_0 de w est une unité.

5.2. Le cas des séries formelles.

Ici K désigne un corps de caractéristique 0. On note $\bar{R}_m := K[[X]]$ avec $X = (X_1 , \ldots , X_m)$, et R_m le sous-anneau des séries à m variables convergeant au voisinage de 0. Pour $u = \sum a_\nu X^\nu \neq 0 \in \bar{R}_m$, on pose

$$\mathrm{ord}(u) = \inf(|\nu| \; ; \; a_\nu \neq 0) .$$

Pour cette valuation, $\bar{R}_m$ est complet, et R_m est dense dans $\bar{R}_m$.

Rappelons que $u = \sum a_\nu X^\nu$ est une unité de $\bar{R}_m$ si, et seulement si, $a_0 \neq 0$.

On dira que la variable X_m est distinguée d'ordre s dans u si le coefficient de X_m^s n'est pas nul et si les coefficients de X_m^j pour $0 \leq j < s$ sont nuls.

THÉORÈME de préparation de Weierstrass. - Soit $u \in \bar{R}_m$. Supposons que X_m soit distingué d'ordre s dans u. Alors on a la décomposition $u = Pv$, où v est une unité de $\bar{R}_m$ et $P = X_m^s + \alpha_1 X_m^{s-1} + \dots + \alpha_s$ avec $\alpha_j \in \bar{R}_{m-1}$.

Démonstration. - On écrit $u = \sum c_j X_m^j$ avec $c_j \in \bar{R}_{m-1}$, et on applique le lemme de Hensel, partie 1°, avec $A = \bar{R}_{m-1}$. En effet, notre hypothèse exprime que $n(u) = s$ et $\mathrm{ord}(c_s) = 0$, donc c_s est une unité de $\bar{R}_{m-1}$. Si $v = \sum b_j X_m^j$, on voit que $\mathrm{ord}(b_0) = 0$, donc le terme constant de v n'est pas nul, et v est une unité de $\bar{R}_m$.

5.3 Le cas des fonctions strictement analytiques

Ici K désigne un corps valué ultramétrique complet de caractéristique 0. On pose

$$\bar{R}_m := \{u = \sum a_\nu X^\nu \; ; \; a_\nu \in K \; , \; X = (X_1 , \dots , X_m) \; , \; |a_\nu| \longrightarrow 0 \text{ quand } |\nu| \longrightarrow +\infty\}$$

et l'on considère le sous-anneau

$$\bar{R} := \{u = \sum a_\nu X^\nu \; ; \; \exists \rho > 1 \text{ tel que } |a_\nu| \rho^{|\nu|} \longrightarrow 0 \text{ quand } |\nu| \longrightarrow +\infty\} .$$

La norme de Gauss de $u = \sum a_\nu X^\nu$ est $\|u\| := \sup |a_\nu|$. Ceci définit une valeur absolue sur $\bar{R}_m$. Pour cette valeur absolue, $\bar{R}_m$ est complet, et R_m est dense dans $\bar{R}_m$.

Rappelons que $u = \sum a_\nu X^\nu \in \bar{R}_m$ est une unité de $\bar{R}_m$ si, et seulement si, le terme constant est strictement dominant, c'est-à-dire $|a_0| > |a_\nu|$ pour tout $|\nu| > 0$.

On dira que la variable X_m est distinguée d'ordre s dans u si le coefficient $a_{(0),s}$ de X_m^s est dominant, et domine strictement les termes d'ordre plus élevés, c'est-à-dire

$$|a_{(0),s}| = \sup_\nu |a_\nu|$$

et

$$|a_{(0),s}| > |a_\nu| \quad \text{pour } |\nu| > s .$$

Avec ces conventions, le théorème de préparation de Weierstrass s'exprime comme dans le paragraphe précédent.

THEOREME de préparation de Weierstrass. - Soit $u \in \bar{R}_m$. Supposons que X_m soit distingué d'ordre s dans u. Alors on a la décomposition $u = P v$ où v est une unité de $\bar{R}_m$ et $P = X_m^s + \alpha_1 X_m^{s-1} + \ldots + \alpha_s$ avec $\alpha_j \in \bar{R}_{m-1}$.

Démonstration. - On écrit $u = \sum c_j X_m^j$ avec $c_j \in \bar{R}_{m-1}$ et on applique le lemme de Hensel, partie 2°, avec $A = \bar{R}_{m-1}$.

En effet notre hypothèse exprime que $N(u) = s$ et que c_s est une unité de $\bar{R}_{m-1}$. On voit facilement que le terme constant de v est strictement dominant donc que v est une unité de $\bar{R}_m$.

6. Propriété de division continue.

6.1. Sauf mention explicite du contraire, tout ce que nous dirons dans ce paragraphe concernant les anneaux $\bar{R}_m$ et R_m s'appliquera au cas des séries formelles (§ 5.2) et au cas des fonctions strictement analytiques (§ 5.3).

On sait que R_m est algébriquement clos dans $\bar{R}_m$. Cela est bien connu dans le cas des séries formelles, et dans le cas des fonctions strictements analytiques, cela a été démontré au § 4 sous réserve que le couple $R_m \subset \bar{R}_m$ ait la propriété de division continue.

Nous noterons R'_m l'ensemble des éléments de $\bar{R}_m$ algébrique sur $K(X)$. Comme $K(X)$ est contenu dans R_m, il résulte de ce que nous venons de voir, que R'_m est contenu dans R_m. Il est évident que R'_m est algébriquement clos dans R_m.

6.2. PROPOSITION. - Supposons que le couple $R_{m-1} \subset \bar{R}_{m-1}$ (resp. $R'_{m-1} \subset \bar{R}_m$) ait la propriété de spécialisation continue. Alors le couple $R_m \subset R_m$ (resp. $R'_m \subset \bar{R}_m$) a la propriété de division continue.

Démonstration. - Soient $g\ f_1, \ldots, f_r \in R_m[Y]$ avec $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$, et soit $\bar{y} \in \bar{R}_m^n$ tel que $g(\bar{y})$ divise $f_i(\bar{y})$, $1 \leq i \leq r$.

On peut se ramener au cas où la variable X_m est distinguée d'ordre s dans $g(\bar{y})$ par un changement de variable $X \longmapsto UX$ où $U \in S\ell_m(K)$ dans le cas des séries formelles et $U \in S\ell_m(\mathcal{O}_K)$ dans le cas des fonctions strictement analytiques. Remarquons qu'un tel changement de variable laisse globalement invariants R_m et $\bar{R}_m$ (c'est évident dans le cas des séries formelles, cela résulte du fait qu'un tel changement de variable laisse invariantes les boules centrées en 0 de K^m dans le cas des fonctions strictements analytiques).

On applique le théorème de préparation de Weierstrass. On a donc

$$g(\bar{y}) = \bar{a}(X_m) \times \text{unité}$$

avec $\bar{a} = X_m^s + \bar{a}_1 X_m^{s-1} + \ldots + \bar{a}_s$, $\bar{a}_i \in \bar{R}_{m-1}$.

Effectuons la division euclidienne par $\bar{a}$ suivant les puissances de X_m

$$\bar{y}_\nu = \bar{a}\,\bar{z}_\nu + \sum_{j=0}^{s-1} \bar{y}_{\nu j}\, X_m^j \,, \quad \bar{z}_\nu \in \bar{R}_m \,, \quad \bar{y}_{\nu j} \in \bar{R}_{m-1} \,.$$

Posons

$$\bar{y}'_\nu = \sum_{j=0}^{s-1} \bar{y}_{\nu j}\, X_m^j = \bar{y}_\nu - \bar{a}\,\bar{z}_\nu \,, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant n \,.$$

En appliquant la formule de Taylor, on voit que $\bar{a}$ divise $g(\bar{y}')$ et $f_i(\bar{y}')$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Remplaçons $\bar{a}_j$ et $\bar{y}_{\nu j}$ par des variables A_j et $Y_{\nu j}$.

Faisons la division suivant les puissances de X_m de

$$g\left(\sum_{j=1}^{s-1} Y_{1j}\, X_m^j \,, \ldots\right) \,, \quad f_i\left(\sum_{j=1}^{s-1} Y_{1j}\, X_m^j \,, \ldots\right)$$

par $\bar{a} = X_m^s + A_1\, X_m^{s-1} + \ldots + A_s$,

$$g = \bar{a}\, Q + \sum_{j=0}^{s-1} G_j\, X_m^j$$

$$f_i = \bar{a}\, Q_i + \sum_{j=0}^{s-1} F_{ij}\, X_m^j \,,$$

où G_j, $F_{ij} \in \bar{R}_{m-1}\,[A_i \,, Y_{\nu j}]$.

Par construction, $\bar{a}_j$ et $\bar{y}_{\nu j}$ sont solutions des équations $G_j = 0$, $F_{ij} = 0$. D'après l'hypothèse de spécialisation continue pour le couple $R_{m-1} \subset \bar{R}_{m-1}$, on peut trouver des solutions arbitrairement proches a_j et $y_{\nu j} \in R_{m-1}$. On pose

$$a = X_m^s + a_1\, X_m^{s-1} + \ldots + a_s$$

$$y'_\nu = \sum_{j=1}^{s-1} y_{\nu j}\, X_m^j \,, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant n \,.$$

Alors a divise $g(y')$ et $f_i(y')$.

On choisit $z \in R_m^n$ arbitrairement proche de $\bar{z}$, et on pose $y_\nu = a\, z_\nu + y'_\nu$. Donc y appartient à R_m^n et est arbitrairement proche de $\bar{y}$. De plus, a divise $g(y)$ et $f_i(y)$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Comme $g(y)$ est arbitrairement proche de $g(\bar{y})$, on peut supposer que, dans $g(y)$, X_m est aussi distingué d'ordre s et, comme $\deg a = s$, on a $g(y) = a \times$ unité, donc $g(y)$ divise $f_i(y)$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

La démonstration reste inchangée si partout on remplace R_m et R_{m-1} par R'_m et R'_{m-1}.

7. Propriété de spécialisation continue

On garde les conventions du § 6.

PROPOSITION. - <u>Le couple $R_m \subset \bar{R}_m$ et le couple $R'_m \subset \bar{R}_m$ ont la propriété de spécialisation continue.</u>

<u>Démonstration</u>. - Elle se fait par récurrence sur m.

La propriété est évidente pour $m = 0$, car $R_0 = R'_0 = \bar{R}_0 = K$.

Supposons la propriété démontrée pour $m - 1$. Alors, d'après la proposition 6.2, les couples $R_m \subset \bar{R}_m$ et $R'_m \subset \bar{R}_m$ ont la propriété de division continue.

L'anneau R_m est algébriquement clos dans $\bar{R}_m$. Cela est bien connu dans le cas des séries formelles, et découle de la proposition 4.2 dans le cas des fonctions strictement analytiques. Il est par ailleurs évident que R'_m est algébriquement clos dans $\bar{R}_m$.

La propriété de spécialisation continue pour les couples $R_m \subset \bar{R}_m$ et $R'_m \subset \bar{R}_m$ est alors une conséquence immédiate du théorème 1.6.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (M.). - On the solutions of analytic equations, Invent. Math., Berlin, t. 5, 1968, p. 277-291.

[2] BOSCH (S.). - A rigid analytic version of M. Artin's theorem on analytic equations (Preprint).

[3] BOSCH (S.), DWORK (B.) et ROBBA (P.). - Un théorème de prolongement pour les fonctions analytiques, Math. Annalen, t. 252, 1980, p. 165-173.

[4] LANG (Serge). - On quasi algebraic closure, Annals of Math., t. 55, 1952, p. 373-390.

[5] VAN DEN DRIES (L.). - A specialization theorem for the Washnitzer-Monsky ring (Preprint).