Michel Matignon

Sous-corps fermés du complété de la clôture algébrique d'un corps local

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 6 (1978-1979), exp. n° 10, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1978-1979__6__A6_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
6e année, 1978/79, n° 10, 7 p.

5 février 1979

SOUS-CORPS FERMÉS DU COMPLÉTÉ DE LA CLÔTURE ALGÉBRIQUE D'UN CORPS LOCAL

par Michel MATIGNON (*)
[Univ. Bordeaux-I]

0. Introduction.

Soit K un corps muni d'une valuation admettant un unique prolongement à sa clôture algébrique $\tilde{K}$. Soit G le groupe des K-automorphismes de $\tilde{K}$. On sait que tout élément de G est une isométrie et admet un unique prolongement en K-automorphisme du complété $\overline{\tilde{K}}$ de $\tilde{K}$. Une question naturelle est donc d'étudier l'action de G sur $\overline{\tilde{K}}$. C'est J. T. TATE qui le premier, en 1967, dans son article sur les groupes p-divisibles ([7], p. 176), montre que l'action de G commute avec la complétion dans le cas où K est un corps de caractéristique nulle complet pour une valuation discrète. En 1969, S. SEN ([5], p. 44), montre que le résultat reste vrai si l'on prend un sous-groupe quelconque de G avec les mêmes hypothèses sur K que TATE. En 1970, AX [1] étend les résultats de TATE et SEN au cas où K est un corps muni d'une valuation qui se prolonge de manière unique à $\tilde{K}$, la caractéristique de K étant quelconque. Il montre que le corps d'invariants de $\overline{\tilde{K}}$ par G est l'adhérence $\overline{K^{p^{-\infty}}}$ de la clôture radicielle $K^{p^{-\infty}}$ de K . En 1978, J. FRESNEL et B. de MATHAN ([3], p. 241) se sont intéressés à la détermination des sous-groupes fermés de $\overline{\tilde{\mathbb{Q}}}_p$, où $\mathbb{Q}_p$ est le complété de $\mathbb{Q}$ pour la valuation p-adique.

L'application qui à F , sous-corps fermé de $\overline{\tilde{\mathbb{Q}}}_p$ associe sa trace $F \cap \tilde{\mathbb{Q}}_p$ dans $\tilde{\mathbb{Q}}_p$ est bijective, l'application réciproque étant le passage à l'adhérence ; ce résultat est une conséquence du théorème de Sen [5].

Ce même problème se pose en caractéristique non nulle. Si la même démonstration pouvait s'adapter au cas d'un corps K valué, de caractéristique nulle, dont la valuation admet un unique prolongement à la clôture algébrique $\tilde{K}$ de K grâce au théorème de Ax [1], en revanche le cas de caractéristique non nulle ne pouvait se résoudre par la même méthode à cause des éléments inséparables. C'est l'objet de cet exposé.

Soit K un corps valué hensélien (i. e. la valuation de K se prolonge de manière unique à la clôture algébrique $\tilde{K}$ de K ; il est aussi équivalent de dire que K vérifie le lemme de Hensel). Dans le premier paragraphe, nous rappelons le théorème de Ax, puis nous montrons qu'il est équivalent au fait que les sous-corps fermés parfaits de $\overline{\tilde{K}}$ contenant K sont adhérences de leurs éléments algébriques

---

(*) Texte reçu le 11 juin 1979.
Michel MATIGNON, Laboratoire associé CNRS 226, UER Mathématiques et informatique, Université de Bordeaux-I, 351 cours de la Libération, 33405 TALENCE CEDEX.

sur K. Par la même méthode, nous montrons qu'un sous-corps fermé de $\overline{\widetilde{K}}$ contenant K est un sous-corps du complété de la clôture radicielle de l'extension algébrique maximale qu'il contient. Ceci conduit à chercher les corps fermés intermédiaires entre une extension algébrique L de K et le complété $\overline{L^{p^{-\infty}}}$ de la clôture radicielle $L^{p^{-\infty}}$ de L. Ce que l'on fait dans le cas où K est un corps local ; c'est-à-dire complet pour une valuation discrète et tel que son corps des restes soit parfait. Pour cela, on détermine, dans le paragraphe 2, les corps entre L et $L^{p^{-\infty}}$, ceci se faisant facilement si l'on remarque que K est de degré d'imperfection égal à un. Puis on montre que leurs adhérences sont exactement les corps fermés intermédiaires entre $\overline{L}$ et $\overline{L^{p^{-\infty}}}$. L'outil principal est la notion de différente dans les extensions infinies (paragraphe 3). Nous montrons en particulier (théorème 3) que les extensions algébriques séparables de K de différente nulle sur K sont parfaites par passage à l'adhérence, et réciproquement. Et par conséquent on est ramené à la détermination des corps fermés entre $\overline{L}$ et $\overline{L^{p^{-\infty}}}$ où L est une extension algébrique séparable de K de différente non nulle sur K. Ce que l'on fait au paragraphe 4. On montre qu'ils sont adhérences de leurs algébriques, ce qui nous permet de conclure, au paragraphe 5, où nous étudions plus en détail la correspondance entre corps fermés de $\overline{\widetilde{K}}$ contenant K et les extensions algébriques de K. Signalons enfin que nous avons utilisé ces résultats dans [4] (deuxième partie) pour étudier l'algèbre produit tensoriel topologique de deux corps valués.

1. Théorème de Ax.

On notera p la caractéristique de K, $K^{p^{-\infty}}$ la clôture radicielle de K, et $\overline{K^{p^{-\infty}}}$ l'adhérence de $K^{p^{-\infty}}$.

THÉORÈME 1 (AX). - *Soient K un corps valué hensélien, L une extension algébrique normale de K, et G le groupe des K-automorphismes de L ; le groupe G opère par continuité sur l'adhérence $\overline{L}$ de L, et le corps des invariants de $\overline{L}$ par G est $\overline{L} \cap \overline{K^{p^{-\infty}}}$.*

COROLLAIRE 1. - *Soient K un corps valué hensélien, $\widetilde{K}$ une clôture algébrique de K, $G = \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$ le groupe des K-automorphismes de $\widetilde{K}$, et H un sous-groupe de G ; H opère par continuité sur le complété $\overline{\widetilde{K}}$ de $\widetilde{K}$. Le corps des invariants $(\overline{\widetilde{K}})^H$ par cette action est l'adhérence du corps des invariants $(\widetilde{K})^H$ par l'action de H sur $\widetilde{K}$.*

Nous allons caractériser les sous-corps de $\overline{\widetilde{K}}$ contenant la clôture radicielle $K^{p^{-\infty}}$ de K. Le corollaire qui suit est l'analogue du corollaire de [3] (p. 241) dans le cas de $\mathbb{Q}_p$, le complété de $\mathbb{Q}$ pour la valuation p-adique.

COROLLAIRE 2. - *Soit* F *un sous-corps fermé du complété de la clôture algébrique d'un corps* K *valué hensélien. Si* F *contient l'extension radicielle maximale de ce corps, alors* F *est l'adhérence du corps formé par ses éléments algébriques sur* K.

Ce corollaire est équivalent au théorème 1 ; on montre, dans [4], le théorème suivant.

THÉORÈME 2 [4]. - *Soient* K *un corps valué hensélien,* $\tilde{K}$ *une clôture algébrique de* K, *et* $\overline{\tilde{K}}$ *le complété de* $\tilde{K}$. *Soit* F *un sous-corps fermé de* $\overline{\tilde{K}}$ *contenant* K. *Alors* F *est un sous-corps de l'adhérence* $\overline{(F \cap \tilde{K})^{p^{-\infty}}}$ *de la clôture radicielle* $(F \cap \tilde{K})^{p^{-\infty}}$ *de* $F \cap \tilde{K}$.

Pour généraliser le corollaire 2, il nous reste donc à déterminer les corps fermés F tels que $\overline{L} \subset F \subset \overline{L^{p^{-\infty}}}$, où L est une extension algébrique de K. En particulier, notre but est de démontrer qu'un tel corps F vérifie $\overline{F \cap \tilde{K}} = F$. On peut espérer que ce résultat est vrai lorsque K est un corps valué hensélien, nous allons le démontrer dans le cas où K est un corps local de caractéristique p non nulle.

2. Corps locaux.

Définition. - On appelle *corps local*, un corps discrètement valué complet et dont le corps des restes est parfait.

Dans tout ce qui suit, K *désigne un corps local de caractéristique* p *non nulle.*

On sait ([6], p. 43) que K est un corps de séries formelles $k_K((T))$, où k_K est le corps résiduel de K, et T une uniformisante. Considérons l'automorphisme σ de $\tilde{K}$ qui à un élément associe son unique racine p-ième dans $\tilde{K}$. L'automorphisme σ étant continu on en déduit que

$$K_n = \sigma^n(K) = k_K((\sigma^n(T)))$$

est l'unique extension radicielle de K de degré p^n. On notera $K_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, c'est la clôture radicielle $K^{p^{-\infty}}$ de K. Puisqu'une extension finie d'un corps local est encore un corps local, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - *Soient* K *un corps local de caractéristique* p *non nulle, et* L *une extension algébrique de* K ; *alors les extensions radicielles de* L (*resp. de l'adhérence* $\overline{L}$ *de* L) *sont les corps* LK_n *ou* LK_∞ (*resp.* $\overline{LK_n}$ *ou* $\overline{LK_\infty}$).

Nous allons caractériser dans le paragraphe suivant les extensions algébriques de K qui deviennent parfaites par passage à l'adhérence.

3. La différente dans les extensions infinies.

3.1. Définition de la différente.

Si L est une extension algébrique finie et séparable de K, on définit (cf. [6]) la différente $\mathcal{D}_{L/K}$ de L sur K. On peut étendre cette définition à une extension algébrique séparable quelconque de K.

Définition. - Si L est une extension algébrique séparable de K, on appelle différente $\mathcal{D}_{L/K}$ de L sur K l'idéal de l'anneau de valuation $\mathcal{O}_L$ de L, défini par

$$\mathcal{D}_{L/K} = \bigcap_{[L_i:K]<\infty}(\mathcal{D}_{L_i/K}) ,$$

où L_i décrit les extensions algébriques finies de K contenues dans L, et $(\mathcal{D}_{L_i/K})$ désigne l'idéal engendré par $\mathcal{D}_{L_i/K}$ dans $\mathcal{O}_L$.

Si $|\ |$ désigne la valeur absolue sur $\tilde{K}$, on notera

$$|\mathcal{D}_{L/K}| = \sup_{x\in\mathcal{D}_{L/K}} |x| .$$

3.2. Corps de différente nulle.

THÉORÈME 3 [4]. - Soient K un corps local, et L une extension algébrique séparable de K. Si l'idéal différente $\mathcal{D}_{L/K}$ est nul, alors l'adhérence $\overline{L}$ de L est un corps parfait.

Idée de la démonstration. - La démonstration se fait en deux pas. Le premier consiste à montrer que L contient $K_1 = k_K((T^{p^{-1}}))$: on construit, en utilisant l'expression de la différente dans les extensions totalement ramifiées ([6], p. 67), une suite d'éléments de L qui convergent vers $T^{p^{-1}}$. Pour le second, on montre que $\mathcal{D}_{LK_n/K_n} = (0)$ pour tout $n \geqslant 1$, et en appliquant le premier pas à l'extension LK_n de K_n on a $K_{n+1} \subset \overline{L}$. Ce qui prouve que $K_\infty \subset \overline{L}$ et que $\overline{L}$ est parfait.

3.3. Corps de différente non nulle.

Nous venons de montrer précédemment que le complété d'une extension algébrique séparable d'un corps local, de différente nulle sur ce corps, est parfait. Nous allons étudier l'adhérence $\overline{LK_\infty}$ de la clôture radicielle d'une extension algébrique séparable L d'un corps local de différente non nulle sur ce corps, afin d'obtenir en particulier la réciproque du théorème 3.

(A) Etude algébrique de LK_∞.

PROPOSITION 2. - Soient K un corps local, L une extension algébrique séparable de K, et LK_∞ la clôture radicielle de L. Soit x un élément de LK_∞, alors x s'écrit de manière unique sous la forme :

$$x = \sum_{i\in I} \ell_i T^i \tag{1}$$

avec T uniformisante de K, $\ell_i \in L$, $\ell_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices i, et $I = \mathbb{Z}[\frac{1}{p}] \cap [0, 1[$.

C'est une conséquence de la proposition 1.

(B) Etude topologique de LK_∞.

Définition. - On appelle norme infinie de la L-algèbre LK_∞ la norme d'algèbre ainsi définie

$$\|x\|_\infty = \sup_{i\in I} |\ell_i T^i|$$

où

$$x = \sum_{i\in I} \ell_i T^i . \tag{1}$$

THÉORÈME 4 [4]. - La norme infinie sur la L-algèbre LK_∞, clôture radicielle de l'extension algébrique L séparable d'un corps local K de différente $\mathfrak{D}_{L/K}$ non nulle, est équivalente à la valeur absolue. De plus, si x est un élément de LK_∞, on a les inégalités :

$$|\mathfrak{D}_{L/K}| \, \|x\|_\infty \leq |x| \leq \|x\|_\infty .$$

Remarque 1. - La $\overline{L}$-algèbre de Banach $\overline{LK_\infty}$ munie de la valeur absolue est isomorphe à la $\overline{L}$-algèbre de Banach $\widehat{\bigoplus}_{i\in I} \overline{L}T^i$, complétée de LK_∞ pour la norme infinie et donc, si $x \in \overline{LK_\infty}$, x s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{i\in I} \ell_i T^i \quad \text{et} \quad |\ell_i T^i| \to 0 \quad \text{avec } \ell_i \in \overline{L} . \tag{1'}$$

Remarque 2. - Soit $x \in \overline{L}$, alors $\|x - T^{p^{-1}}\|_\infty > |T^{p^{-1}}|$, ceci donne la réciproque du théorème 3 à savoir que si L est algébrique séparable de différente $\mathfrak{D}_{L/K} \neq (0)$ alors $\overline{L} \cap K_\infty = K$. On peut donc énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 5. - Soient K un corps local de caractéristique p non nulle et L une extension algébrique séparable de K. Alors l'adhérence $\overline{L}$ de L est un corps parfait si, et seulement si, $\mathfrak{D}_{L/K}$ est nulle.

Remarque. - SEN ([5], p. 44) montre que, pour toute $\mathbb{Z}_p$-extension totalement ramifiée L de K, on a $(\overline{L})^G \neq K$. Ce résultat est une conséquence des théorèmes 1 et 5 : en effet,

$$\mathfrak{D}_{L/K} = (0) \quad \text{et} \quad (\overline{L})^G = \overline{K^{p^{-\infty}}} .$$

Plus généralement, WINTENBERGER [8] montre que l'adhérence d'une extension de Lie de K est parfaite. Ce résultat est aussi une conséquence du théorème 5 : en effet, une extension de Lie L de K est une extension infinie strictement APF ([8], [2]), ce qui permet de montrer que $\mathfrak{D}_{L/K} = (0)$ (voir appendice de [4]) ; ainsi $\overline{L}$ est parfait.

4. Corps fermés entre le complété d'une extension algébrique d'un corps local et le complété de sa clôture radicielle.

Dans le paragraphe 1, théorème 2, nous avons montré que si F était un sous-corps fermé de $\overline{\tilde{K}}$ contenant K, alors :

$$\overline{F \cap \tilde{K}} \subset F \subset \overline{(F \cap \tilde{K})^{p^{-\infty}}} \ .$$

Dans le paragraphe 2, nous avons décrit les corps compris entre $\overline{L}$ et $\overline{LK_\infty}$ (proposition 1), lorsque L est une extension algébrique du corps local K. Nous allons achever le problème en décrivant les corps fermés entre $\overline{L}$ et $\overline{LK_\infty}$.

THÉORÈME 6 [4]. - Soit L une extension algébrique d'un corps local K. Les corps fermés F tels que $\overline{L} \subset F \subset \overline{LK_\infty}$ sont les corps $\overline{LK_n}$ ou $\overline{LK_\infty}$.

Donnons une idée de la démonstration. Quitte à remplacer le corps de base K par un K_n, et L par LK_n, grâce à la proposition 1, on se ramène au cas où

(2) $$F \cap \overline{LK_\infty} = \overline{L} \quad \text{et} \quad \overline{L} \cap K_\infty = K \ .$$

Supposons que $F \neq \overline{L}$. Soit $x \in \overline{LK_\infty} \cap F$ et $x \notin \overline{L}$. Ecrivons x sous la forme (1') : $x = \sum_{i \in I} \ell_i T^i$. Soit $x_n = \sum_{ip^n \in Z} \ell_i T^i$; la suite x_n converge vers x. Il existe une suite de polynômes $P_n(X)$ de $\overline{L}[X]$ satisfaisant la propriété suivante : pour tout $n \geqslant 1$, $T^{p^{-1}} = P_n(x_n)$ et $T^{p^{-1}}$ est valeur d'adhérence de la suite $P_n(x)$. Ainsi $T^{p^{-1}} \in F$, ce qui contredit (2) et donc $F = \overline{L}$.

5. Corps fermés de $\overline{\tilde{K}}$ contenant K.

Le théorème 6 permet de préciser la correspondance entre les extensions algébriques de K et les sous-corps fermés de $\overline{\tilde{K}}$ qui contiennent K. On a le théorème suivant.

THÉORÈME 7 [4]. - Soient $\mathfrak{F}$ l'ensemble des sous-corps fermés de $\overline{\tilde{K}}$ contenant K, $\mathfrak{A}$ l'ensemble des extensions algébriques de K. Soit t l'application qui à F élément de $\mathfrak{F}$ fait correspondre sa trace $F \cap \tilde{K}$ dans $\mathfrak{A}$, et soit f l'application qui à L élément de $\mathfrak{A}$ associe son adhérence $\overline{L}$ dans $\mathfrak{F}$. Alors :

(a) $f \circ t = \mathrm{Id}_{\mathfrak{F}}$;

(b) Soit L un élément de $\mathfrak{A}$. Alors :

$$t \circ f(L) = \begin{cases} L & \text{si } \ \mathfrak{D}_{L^s/K} \neq (0) \\ LK_\infty & \text{si } \ \mathfrak{D}_{L^s/K} = (0) \end{cases}$$

où L^s désigne l'extension séparable maximale de K dans L.

Démonstration.

(a) C'est une conséquence des théorèmes 2 et 6.

(b) Soient $L \in \mathfrak{A}$ et $M \in \mathfrak{A}$ tels que $\overline{L} = \overline{M}$; alors $L^s = M^s$, ainsi (b) est une conséquence du théorème 5.

Remarque. - Rappelons que, dans le cas où $K = \mathbb{Q}_p$ ([3])

$$f \circ t = \mathrm{Id}_{\mathfrak{F}} \quad \text{et} \quad t \circ f = \mathrm{Id}_{\mathfrak{A}} .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] AX (J.). - Zeros of polynomials over local fields. The Galois action, J. of Algebra, t. 15, 1970, p. 417-428.

[2] FONTAINE (J.-M.) et WINTENBERGER (J.-P.). - Le "corps des normes" de certaines extensions algébriques de corps locaux, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 288, 1979, Série A, p. 367-370 ; et Extensions algébriques et corps des normes des extensions APF des corps locaux, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 288, 1979, Série A, p. 441-444.

[3] FRESNEL (J.) et de MATHAN (B.). - Algèbres L^1 p-adiques, Bull. Soc. math. France, t. 106, 1978, p. 225-260.

[4] MATIGNON (M.). - Sous-corps fermés du complété de la clôture algébrique d'un corps local, Thèse 3e cycle, Univ. Bordeaux-I, 1979.

[5] SEN (S.). - On automorphisms of local fields, Annals of Math., t. 90, 1969, p. 33-40.

[6] SERRE (J.-P.). - Corps locaux, 2e édition. - Paris, Hermann, 1968 (Act. scient. et ind., 1296 a, Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, 8).

[7] TATE (J.). - p-divisible groups, "Proceedings of a conference on local fields, NUFFIC Summer school [1966. Driebergen]", p. 158-183. - Berlin, Springer-Verlag, 1967.

[8] WINTENBERGER (J.-P.). - Extensions de Lie et groupes d'automorphismes des corps locaux de caractéristique p , C. R. Acad. Sc. Paris, t. 288, 1979, Série A, p. 477-479.