Groupe de travail d'analyse ultramétrique

DANIEL BERTRAND

Sous-groupes à plusieurs paramètres p-adiques de variétés abéliennes

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 6 (1978-1979), exp. nº 9, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1978-1979__6__A5_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
6e année, 1978/79, n° 9, 7 p.

29 janvier 1979

SOUS-GROUPES A PLUSIEURS PARAMÈTRES p-ADIQUES DE VARIÉTÉS ABÉLIENNES

par Daniel BERTRAND (*)
[Ecole Polytechnique, Palaiseau]

Résumé. - On démontre la transcendance de chacune des coordonnées d'un point algébrique non nul de l'exponentielle p-adique fortement normalisée sur une variété abélienne simple à multiplications réelles, définie sur un corps de nombres. On établit à ce propos un critère de transcendance pour des fonctions analytiques de plusieurs variables p-adiques.

1. Un critère de transcendance pluridimensionnel.

Soient p un nombre premier, et $\mathbb{C}_p$ le complété de la clôture algébrique du corps des nombres p-adiques. On note $\mathcal{O}$ son anneau d'entiers, et $|\ |$ sa valeur absolue, normalisée par $|p| = p^{-1}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par $\mathcal{H}(\mathcal{O}^n)$ l'anneau des fonctions strictement analytiques sur la boule unité $\mathcal{O}^n$ de $\mathbb{C}_p^n$.

On suppose donnés, dans tout ce paragraphe, n endomorphismes $\pi_1, \dots, \pi_n$ du $\mathcal{O}$-module $\mathcal{O}^n$ tels que, pour tout n-uple $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ d'entiers rationnels > 0, l'endomorphisme

$$\tau_\nu = \nu_1 \pi_1 + \dots + \nu_n \pi_n$$

soit un plongement.

A tout élément ν de $\mathbb{N}^n$, et tout élément f de $\mathcal{H}(\mathcal{O}^n)$, on associe l'élément

$$T_\nu f = f \circ \tau_\nu$$

de $\mathcal{H}(\mathcal{O}^n)$ et le n-uple

$$\tilde{f} = (f \circ \pi_1, \dots, f \circ \pi_n)$$

d'éléments de $\mathcal{H}(\mathcal{O}^n)$. On note enfin $\|\nu\| = \nu_1 + \dots + \nu_n$ la longueur de ν.

Définition 1. - On dira qu'une famille $\{f_1, \dots, f_\ell\}$ d'éléments de $\mathcal{H}(\mathcal{O}^n)$ est d'ordre arithmétique fonctionnel fini (relativement à $\pi_1, \dots, \pi_n$) s'il existe un corps de nombres K, d'anneau d'entiers I, et des nombres réels ρ et c tels que, pour tout élément ν de $\mathbb{N}^n$, il existe 2ℓ éléments

$$\{P_{i,\nu}, Q_{i,\nu} ; i = 1, \dots, \ell\} \text{ de } I[X_{sj} ; s = 1, \dots, \ell ; j = 1, \dots, n]$$

de degrés totaux $\leq c\|\nu\|^\rho$, de hauteurs $\leq \exp(c(1 + \|\nu\|^\rho))$ tels que, pour

(*) Texte reçu le 28 septembre 1979.

Daniel BERTRAND, Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, Plateau de Palaiseau, 91128 PALAISEAU CEDEX.

$i = 1 , \ldots , \ell$:

$$T_\nu f_i = P_{i,\nu}(\tilde{f}_1 , \ldots , \tilde{f}_\ell)/Q_{i,\nu}(\tilde{f}_1 , \ldots , \tilde{f}_\ell) .$$

Un élément ζ de $\mathcal{O}^n$ sera dit régulier pour $\{f_1 , \ldots , f_\ell\}$ si, pour tout n-uple ν et tout indice i , il existe une telle représentation de $T_\nu f_i$ vérifiant en outre

$$Q_{i,\nu}(\tilde{f}_1(\zeta) , \ldots , \tilde{f}_\ell(\zeta)) \neq 0 .$$

Le critère de transcendance que nous avons en vue généralise à plusieurs variables le théorème 1 de [1].

THÉORÈME 1. - Soit $\{f_1 , \ldots , f_\ell\}$ une famille d'éléments de $\mathcal{H}(\mathcal{O}^n)$ d'ordre arithmétique fonctionnel fini. On suppose que le corps $\overline{\mathbb{Q}}(f_1 , \ldots , f_\ell)$ a un degré de transcendance $\geq n + 1$ sur $\overline{\mathbb{Q}}$, et qu'il existe n dérivations $\mathbb{C}_p$-linéairement indépendantes de $\mathrm{Lie}(\mathbb{C}_p^n)$ opérant sur l'algèbre

$$\overline{\mathbb{Q}}[f_i \circ \pi_j \; ; \; i = 1 , \ldots , \ell \; ; \; j = 1 , \ldots , n] .$$

Soit ζ un élément de $\mathcal{O}^n$, régulier pour $\{f_1 , \ldots , f_\ell\}$ et tel que $\pi_1(\zeta) , \ldots , \pi_n(\zeta)$ soient linéairement indépendants sur $\mathbb{C}_p$. Alors, l'un au moins des nombres $f_i \circ \pi_j(\zeta)$ $(i = 1 , \ldots , \ell \; ; \; j = 1 , \ldots , n)$ est transcendant.

La démonstration du théorème 1 est donnée au § 2. Elle repose d'une part sur un lemme de Schwarz sur les produits, dû à ROBBA [6], d'autre part sur l'énoncé suivant, qui généralise une idée de BAKER et COATES (voir [4], lemme 8.1, et [1], lemme 2), et améliore, en un point régulier pour $\{f_1 , \ldots , f_\ell\}$, les estimations de hauteur fournies par le lemme 5.1 de [4].

LEMME. - Soient $\{f_1 , \ldots , f_\ell\}$ une famille d'éléments de $\mathcal{H}(\mathcal{O}^n)$ d'ordre arithmétique fonctionnel fini. On reprend les notations qui lui sont associées par la définition 1. On suppose qu'il existe n éléments $D_1 , \ldots , D_n$ de $\mathrm{Lie}(\mathbb{C}_p^n)$ opérant sur l'algèbre $I[\tilde{f}_1 , \ldots , \tilde{f}_n]$. Pour tout n-uple σ de $\mathbb{N}^n$, on note D^σ l'opérateur $D_1^{\sigma_1} , \ldots , D_n^{\sigma_n}$. Alors, il existe un nombre réel $\gamma = \gamma(f_1 , \ldots , f_\ell)$ vérifiant la propriété suivante. Soient $L_1 , \ldots , L_\ell$ des entiers ≥ 0 , de somme L , H un entier > 0 , et P un élément de $I[X_1 , \ldots , X_\ell]$ de degré $\leq L_i$ en X_i , de hauteur $\leq H$. Pour tout couple (σ , ν) d'éléments de $\mathbb{N}^n$, la fonction $F = P(f_1 , \ldots , f_\ell)$ vérifie

$$\Big(\prod_{i=1}^{\ell} Q_{i,\nu}^{L_i}(f_1 , \ldots , f_\ell)\Big) D^\sigma T_\nu F = R_{\sigma,\nu,P}(\tilde{f}_1 , \ldots , \tilde{f}_\ell) + \sum_{\substack{\|\varkappa\| < \|\sigma\| \\ \varkappa_j \leq \sigma_j}} r_{\varkappa,\nu,P} D^\varkappa T_\nu F ,$$

où les fonctions $r_{\varkappa,\nu,P}$ sont analytiques sur $\mathcal{O}^n$, et $R_{\sigma,\nu,P}$ désigne un élément de $I[X_{ij} \; ; \; i = 1 , \ldots , \ell \; ; \; j = 1 , \ldots , n]$ de degrés partiels $\leq \gamma(\|\sigma\| + L_i \|\nu\|^\rho)$

en $X_{i1}, \dots, X_{in}$, de hauteur majorée par

$$H(1 + \gamma(\|\sigma\| + L\|\nu\|^{\rho}))^{\gamma\|\sigma\|} \exp(\gamma(\|\sigma\| + L(1 + \|\nu\|^{\rho}))) .$$

Démonstration. - La définition 1 permet de construire un élément $R_{0,\nu,P}$ de $I[X_{ij}]$ vérifiant, pour $i = 1, \dots, \ell$ et $j = 1, \dots, n$:

$$\deg_{X_{ij}} R_{0,\nu,P} \leq cL_i\|\nu\|^{\rho} ,$$

de hauteur majorée par $H \exp(3cL(1 + \|\nu\|^{\rho}))$, et tel que

$$(\textstyle\prod_{i=1}^{\ell} Q_{i,\nu}^{L_i}(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{\ell}))\, T_{\nu} F = R_{0,\nu,P}(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{\ell}) .$$

Or l'algèbre $I[f_i \circ \pi_j ;\ i = 1, \dots, \ell ;\ j = 1, \dots, n]$ est stable sous l'action des opérateurs $D_1, \dots, D_n$. On conclut au moyen du lemme 5.1 de [4], joint à la formule de Leibniz.

2. Démonstration du critère.

On reprend les notations de l'énoncé du théorème 1, et on suppose que, contrairement à sa conclusion, les $n\ell$ fonctions $f_i \circ \pi_j$ prennent simultanément des valeurs algébriques au point ζ. On peut, sans perte de généralité, se ramener aux hypothèses suivantes : Les fonctions $f_1, \dots, f_{n+1}$ sont algébriquement indépendantes ; les nombres algébriques $f_i \circ \pi_j(\zeta)$ sont des éléments de l'anneau I des entiers du corps K associé, par la définition 1, à la famille $\{f_1, \dots, f_{\ell}\}$; enfin, il existe n dérivations $D_1, \dots, D_n$, linéairement indépendantes sur $\underset{\sim}{C}_p$, opérant sur l'algèbre $I[\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{\ell}]$.

On désigne par N un entier arbitrairement grand, et par $c_1, \dots, c_8$ des nombres réels > 0 ne dépendant que de $f_1, \dots, f_{\ell}, \pi_1, \dots, \pi_n, D_1, \dots, D_n$, K et ζ. Pour tout entier $M > 0$, on note $\mathcal{N}_M$ le sous-ensemble de $\underset{\sim}{N}^n$ formé des n-uples d'entiers > 0, divisibles par p, et $\leq pM$. On pose enfin :

$$\alpha = (\rho + 1)(n + 1) - (3/2) \ ; \quad \beta = (\rho + 1)n \ ; \quad \eta = (\rho + 1)n + \rho - (n/2) .$$

Premier pas (Construction d'un nombre algébrique ξ non nul). - Il existe un élément non nul

$$P = \sum_{\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} \leq L} p_{\lambda_1 \dots \lambda_{n+1}} X_1^{\lambda_1} \dots X_{n+1}^{\lambda_{n+1}}$$

de $I[X_1, \dots, X_{n+1}]$ de degré total $\leq L = [N^{\beta}]$, de hauteur $\leq \exp(c_1 N^{\eta})$, tel que la fonction $F = P(f_1, \dots, f_{n+1})$ admette les points de l'ensemble $\{\tau_{\nu}(\zeta) ;\ \nu \in \mathcal{N}_N\}$ pour zéros d'ordre $\geq S = [N^{\alpha}]$.

Démonstration. - Les applications τ_{ν} $(\nu \in \mathcal{N}_N)$ étant des plongements, la condition imposée à F revient à exiger que, pour tout élément ν de $\mathcal{N}_N$, la fonction $T_{\nu} F$ admet le point ζ pour zéro d'ordre $\geq S$, ou encore, d'après le lemme du § 1 et le fait que ζ soit régulier pour $\{f_1, \dots, f_{\ell}\}$, que le polynôme P

vérifie, pour tout $\nu \in \mathfrak{N}_N$ et tout $\sigma \in \underset{\sim}{N}^n$ de longueur $\leq S$,

$$R_{\sigma,\nu,P}(\tilde{f}_1(\zeta) , \ldots , \tilde{f}_\ell(\zeta)) = 0 ,$$

où

$$R_{\sigma,\nu,P} = \sum_{\lambda_1+\ldots+\lambda_{n+1}\leq L} p_{\lambda_1\ldots\lambda_{n+1}} R_{\sigma,\nu,X_1^{\lambda_1}\ldots X_{n+1}^{\lambda_{n+1}}} .$$

Il s'agit donc de résoudre un système de $\binom{S+n}{n}N^n$ équations à $\binom{L+n+1}{n+1}$ inconnues, dont les coefficients sont des éléments de I de hauteur $\leq \exp(c_2(S \log S + L(pN)^\rho))$, en vertu des estimations du lemme du § 1 . Le lemme de Siegel permet de conclure.

Les fonctions $f_1 , \ldots , f_{n+1}$ étant algébriquement indépendantes, la fonction F n'est pas identiquement nulle. Soit M le plus grand entier tel que tous les points $\tau_\nu(\zeta)$, où ν parcourt l'ensemble $\mathfrak{N}_M$, soient zéros d'ordre $\geq [M^\alpha]$ de F . Alors, $M \geq N$, et il existe un élément μ de $\mathfrak{N}_{M+1}$ tel que $\tau_\mu(\zeta)$ soit zéro d'ordre $U < (M+1)^\alpha$ de F . Comme τ_μ est un plongement, il existe un n-uple σ de longueur U tel que le nombre

$$\xi = D^\sigma\, T_\mu\, F(\zeta) ,$$

qui appartient à K , soit non nul.

<u>Deuxième pas</u> (<u>Estimation de</u> $|\xi|$). - Puisque ζ est un point régulier pour $\{f_1 , \ldots , f_\ell\}$, le lemme du § 1 entraîne :

$$H(\xi) \leq \exp(c_3(N^\eta + LM^\rho + U \log(1+U))) .$$

On déduit alors de la formule du produit sur $K^\times$ la minoration

$$|\xi| \geq \exp(-\, c_4\, M^{\beta+\rho}) .$$

Des considérations analytiques permettent par ailleurs de majorer $|\xi|$. Notons c_5 le maximum des nombres $|d\tau_\mu(D_i)|$ $(i = 1 , \ldots , n)$. Alors, il existe des éléments $a_{\mu,\sigma,\varkappa}$ de $\underset{\sim}{C}_p$, de valeurs absolues $\leq c_5^U$, tel que

$$\xi = D^\sigma\, T_\mu\, F(\zeta) = \sum_{\varkappa\in\underset{\sim}{N}^n,\, \|\varkappa\|=U} a_{\mu,\sigma,\varkappa}\, T_\mu\, D^\varkappa\, F(\zeta) .$$

La formule de Cauchy entraîne, en désignant par $|F|_\Omega$ le maximum de la fonction $|F(z)|$ sur l'ensemble Ω :

$$|D^\varkappa\, F(\tau_\mu(\xi))| \leq c_6^U |F|_{(p\mathcal{O})^n} .$$

Or la fonction F admet les points de l'ensemble produit $\{\tau_\nu(\zeta) ;\ \gamma \in \mathfrak{N}_M\}$ pour zéros d'ordre $\geq [M^\alpha]$. Du théorème 2.3.1 de [6] (lemme de Schwarz sur les produits), on déduit donc

$$|F|_{(p\mathcal{O})^n} \leq p^{-[M^\alpha]M} |F|_{\mathcal{O}^n} \leq p^{-[M^\alpha]M}\, c_7^L .$$

En regroupant ces différentes inégalités, on obtient la majoration

$$|\xi| \leq \exp(- c_8 M^{\alpha+1}) ,$$

qui contredit la minoration de $|\xi|$ obtenue plus haut. Le théorème 1 est donc démontré.

3. Application aux variétés abéliennes.

Soient K un corps de nombres, $\mathfrak{p}$ une place finie de K, et $K_{\mathfrak{p}}$ le complété de K en $\mathfrak{p}$, que l'on suppose plongé dans $\underset{\sim}{C}_p$. Soit, d'autre part, A une variété abélienne définie sur K, de dimension n. L'ensemble $A(K_{\mathfrak{p}})$ des points $K_{\mathfrak{p}}$-rationnels de A est un groupe de Lie $\mathfrak{p}$-adique, et les applications exponentielles $\mathfrak{p}$-adiques sur $A(K_{\mathfrak{p}})$ définissent, sur un sous-groupe ouvert $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}}$ suffisamment petit de $\underset{\sim}{\mathrm{Lie}}\, A(K_{\mathfrak{p}})$ un même difféomorphisme strictement analytique :

$$\underset{\sim}{\mathrm{Exp}} : \mathcal{D}_{\mathfrak{p}} \to A(K_{\mathfrak{p}})$$

de $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}}$ sur un sous-groupe propre d'indice fini $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ de $A(K_{\mathfrak{p}})$. Soient alors h un isomorphisme de $K_{\mathfrak{p}}^n$ sur $\underset{\sim}{\mathrm{Lie}}\, A(K_{\mathfrak{p}})$ appliquant l'anneau des entiers de $K_{\mathfrak{p}}$ dans $D_{\mathfrak{p}}$ et $\{X_0 , \ldots , X_N\}$ un plongement de A dans l'espace projectif $\underset{\sim}{P}_N$, défini sur K et tel que $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ ne rencontre pas le diviseur d'équation $X_0 = 0$. On appelle <u>représentation de</u> $\underset{\sim}{\mathrm{Exp}}$ le système $\varphi = (\varphi_1 , \ldots , \varphi_N)$ de N fonctions strictement analytiques sur $\mathcal{O}^n$ définies (pour $i = 1 , \ldots , N$) par

$$\varphi_i = (X_i/X_0) \circ (\underset{\sim}{\mathrm{Exp}} \circ h) .$$

(Pour plus de détails sur ces fonctions, voir [3].)

Nous nous proposons d'étudier les points algébriques de l'application φ, c'est-à-dire les points de $\mathcal{O}^n$ où les fonctions $\varphi_1 , \ldots , \varphi_N$ prennent simultanément des valeurs algébriques. On suppose désormais que h est définie sur K. D'après le théorème 2 de [1], l'une au moins des coordonnées d'un point algébrique non nul de φ est transcendante. Le théorème 2 énoncé ci-dessous permet de préciser ce résultat sous certaines hypothèses sur l'algèbre d'endomorphismes

$$\underset{\sim}{\mathrm{End}}_0\, A = Q \otimes \underset{\sim}{\mathrm{End}}\, A \quad \text{de} \quad A ,$$

et sur l'isomorphisme h.

<u>Définition</u> 2. - On dit que A est une variété abélienne à <u>multiplications réelles</u> s'il existe un corps de nombres F, de degré égal à n, et un plongement ι de F dans $\underset{\sim}{\mathrm{End}}_0\, A$. Quitte à effectuer une extension finie de K, on peut alors construire une base de $\underset{\sim}{\mathrm{Lie}}\, A(K)$ formée de vecteurs propres pour l'action naturelle de $\iota(F)$ sur $\underset{\sim}{\mathrm{Lie}}\, A(K)$. On dira qu'une représentation φ de l'application $\underset{\sim}{\mathrm{Exp}}$ est <u>fortement normalisée</u> si l'isomorphisme h qui lui est associée applique la base canonique de $K_{\mathfrak{p}}^n$ sur une telle base.

THÉORÈME 2. - Soient A une variété abélienne simple à multiplications réelles, définie sur un corps de nombres, et u un point algébrique non nul d'une représentation fortement normalisée de l'application $\underset{\sim}{\mathrm{Exp}}$. Alors, chacune des coordonnées de u est transcendante.

Démonstration. - Nous récapitulons tout d'abord les propriétés de l'application $\underset{\sim}{\mathrm{Exp}}$ qui seront utilisées plus bas. On reprend les notations de la définition 2, et on désigne par $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ les différents plongements de F dans $\underset{\sim}{C}_p$. On peut supposer, sans restreindre la généralité, que le corps K contient tous les conjugués de F, ainsi que les nombres $\varphi_i(u)$ $(i = 1, \ldots, N)$.

(i) Tout élément de $\underset{\sim}{\mathrm{Lie}}\, A(\underset{\sim}{C}_p)$, défini sur K, opère sur l'algèbre $K[\varphi_1, \ldots, \varphi_N]$ (voir [3], Propriété 2).

(ii) La famille $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ est d'ordre arithmétique fonctionnel fini relativement à la donnée de tout n-uple $\{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ d'endomorphisme de $\mathcal{O}^n$. Ceci résulte de la non-nullité de X_0 sur $\mathfrak{A}_p$ et des formules d'addition et de multiplication régulières établies, par exemple, dans [5], § 3.

(iii) Soit R l'ensemble $\iota^{-1}(\underset{\sim}{\mathrm{End}}\, A \cap \iota(F))$. Pour tout élément β de R, on a, d'après le choix de h (et après permutation éventuelle des composantes de $\mathcal{O}^n$) :

$$\underset{\sim}{\mathrm{Exp}} \circ h(\beta^{\sigma_1} z_1, \ldots, \beta^{\sigma_n} z_n) = \iota(\beta)(\mathrm{Exp} \circ h(z_1, \ldots, z_n))$$

(voir également [3], Propriété 4).

L'ensemble R est un ordre de F. Soit $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ une base de R sur $\underset{\sim}{Z}$ et, pour $j = 1, \ldots, n$, notons π_j l'automorphisme de $\mathcal{O}^n$ représenté par la matrice diagonale : $\underset{\sim}{\mathrm{diag}}(\beta_j^{\sigma_1}, \ldots, \beta_j^{\sigma_n})$. Alors, pour tout n-uple $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ d'entiers rationnels non tous nuls, l'application $\nu_1 \pi_1 + \cdots + \nu_n \pi_n$ est un plongement.

Supposons que, contrairement à la conclusion du théorème 2, l'une des composantes $u_1, \ldots, u_n$ de u, soit u_n, soit algébrique. Posons, pour $j = 1, \ldots, n$ (voir [7], Chapitre 6),

$$\varepsilon_j = 1 \quad \text{si} \quad u_j \neq 0 \quad (\text{resp. } \varepsilon_j = 0 \quad \text{si} \quad u_j = 0),$$

$$v_j = u_j \quad \text{si} \quad u_j \neq 0 \quad (\text{resp. } v_j = 1 \quad \text{si} \quad u_j = 0),$$

et considérons les $N + 1$ éléments de $\mathcal{H}(\mathcal{O}^n)$:

$$f_0(z) = z_n \; ; \; f_i(z) = \varphi_i(\varepsilon_1 z_1, \ldots, \varepsilon_n z_n) \quad (1 \leqslant i \leqslant N).$$

D'après (ii) et la définition des endomorphismes π_j, la famille $\{f_0, f_1, \ldots, f_N\}$ est d'ordre arithmétique fonctionnel fini relativement à $\{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$, et le point $v = (v_1, \ldots, v_n)$ est régulier pour cette famille. D'après (i), l'algèbre $\overline{\underset{\sim}{Q}}[f_0, \ldots, f_N]$ est invariante sous l'action des opérateurs de dérivation $\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_n$. Il résulte de (iii), et de l'hypothèse faite sur u_n, que les fonctions $f_i \circ \pi_j$ $(0 \leq i \leq N\ ;\ 1 \leq j \leq n)$ prennent simultanément des valeurs algébriques au point v . Or les points $\pi_1(v)$, ... , $\pi_n(v)$ sont linéairement indépendants sur $\underset{\sim}{C}_p$, puisque le carré du déterminant de la matrice $(\beta_j^{\sigma_i} v_i\ ;\ 1 \leq i , j \leq n)$ est un multiple non nul du discriminant du corps F . Le théorème 1 entraîne donc que le degré de transcendance du corps $\overline{\underset{\sim}{Q}}(f_0, f_1, \ldots, f_N)$ sur $\overline{\underset{\sim}{Q}}$ est $\leq n$. On en déduit (en considérant des fonctions abéliennes complexes associées, ou en appliquant le théorème d'Eisenstein aux séries entières exprimant z_m en fonction de X_1/X_0 , ... , X_N/X_0) que le degré de transcendance de $\overline{\underset{\sim}{Q}}(f_1 , \ldots , f_N)$ est $< n$. Mais ceci contredit la simplicité de la variété abélienne A (voir [4], § 2), et le théorème 2 est démontré.

L'analogue complexe du théorème 2 est également satisfait. Nous renvoyons à [2] pour les corollaires qu'on en déduit sur les périodes de certaines formes modulaires.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTRAND (D.). - Sous-groupes à un paramètre p-adique de variétés de groupe, Invent. Math., Berlin, t. 40, 1977, p. 171-193.

[2] BERTRAND (D.). - Sur les périodes de formes modulaires, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 288, 1979, Série A, p. 531-534.

[3] BERTRAND (D.). - Fonctions abéliennes p-adiques : définitions et conjectures, groupe d'étude d'Analyse Ultramétrique, 4e année, 1976/77, n° 21, 13 p.

[4] LANG (S.). - Diophantine approximation on abelian varieties with complex multiplication, Adv. in Math., t. 17, 1975, p. 281-336.

[5] MASSER (D.). - Diophantine approximation and lattices with complex multiplication, Invent. Math., Berlin, t. 45, 1978, p. 61-82.

[6] ROBBA (P.). - Lemmes de Schwarz et lemmes d'approximations p-adiques en plusieurs variables, Invent. Math., Berlin, t. 48, 1978, p. 245-277.

[7] WALDSCHMIDT (M.). - Groupes algébriques et nombres transcendants, Astérisque (à paraître).