GILLES CHRISTOL

Corps de fonctions algébriques

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 6 (1978-1979), exp. nº 8, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1978-1979__6__A4_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
6e année, 1978/79, n° 8, 18 p.

22 janvier 1979

CORPS DE FONCTIONS ALGÉBRIQUES

Par Gilles CHRISTOL (*)
[Univ. P. et M. Curie (Paris-VI)]

Dans ce papier, nous démontrons un résultat (théorème 2.3) qui peut paraître un peu technique. Celui-ci permet cependant de supprimer les restrictions sur l'anneau des coefficients que nous avions dû faire dans [2] (proposition 6.2), et de montrer l'équivalence des définitions des éléments algébriques de [2] ou [3] et de [5] (voir aussi [6]). Par ailleurs, nous montrerons dans un prochain article que ce résultat est la première étape pour étudier la structure de Frobenius forte des équations différentielles p-adiques.

Soit k un corps valué ultramétrique complet, de caractéristique nulle, de caractéristique résiduelle p, et soit f une fonction analytique, dans une couronne à coefficients dans k, qui soit algébrique sur $k(x)$. f n'a qu'un nombre fini de zéros dans cette couronne et par suite y est bornée. Après normalisation, f appartient à l'anneau W (défini § 2, c'est l'anneau W^c de ROBBA [5]) qui contient toutes les fonctions analytiques bornées dans une couronne $D(0,1^-)-D(0,r^-)$ $(r < 1)$. Comme $k(x) \subset W$, le corps $k(x, f) = K$ lui-même est contenu dans W.

W est muni d'une norme qui prolonge la norme de Gauss de $k(x)$. Notre problème est de trouver une "bonne base" de K, c'est-à-dire un élément e de W tel que $|e| = 1$ et tel que, pour tout $g \in K$, il existe des a_i vérifiant :

$$g = \sum a_i e^i , \quad |g| = \sup|a_i| .$$

Ceci n'est pas possible en général avec $a_i \in k(x)$, mais nous obtenons le résultat avec $a_i \in E$, où E est le complété de $k(x)$ dans W (corps des éléments analytiques dans le "disque générique").

L'étude des corps qui possèdent une "bonne base" est faite au § 1. L'extension résiduelle $\overline{K}/\overline{E}$ est ensuite étudiée au § 3. Comme, par construction, le corps $K \subset W$ n'est pas ramifié sur E, nous sommes amené à montrer qu'il n'y a pas d'extension immédiate d'une extension algébrique finie de E contenue dans W. Ceci est trivial dans le cas où k est discret, sinon nous ne savons démontrer directement le résultat que lorsque k est un corps algébriquement clos maximalement complet (§ 4). La théorie de Galois p-adique permet alors de redescendre au cas général (§ 5). Le § 6 donne quelques unes des conséquences du théorème 2.3.

(*) Texte reçu le 4 octobre 1979.
Gilles CHRISTOL, 5 allée des Gradins, 91350 GRIGNY.

1. Extensions algébriques régulières.

Soit H un corps de caractéristique 0, complet pour une norme ultramétrique, de corps des restes $\overline{H}$ de caractéristique p. Toute extension algébrique K de H est munie de l'unique norme prolongeant celle de H. Si $f \in K$, $|f| \leq 1$, nous noterons $\overline{f}$ l'image de f dans le corps des restes $\overline{K}$ de K. $\tilde{H}$ désignera la clôture algébrique de H et, pour $f \in \tilde{H}$, G_f désignera un ensemble d'automorphismes s de $\tilde{H}/H$ tels que les $s(f)$, pour $s \in G_f$, soient les conjugués de f $(\neq f)$.

Définition. - Un élément e de $\tilde{H}$ est dit algébrique régulier si, pour tout $s \in G_e$, on a $|s(e) - e| = |e| = 1$.

PROPOSITION 1.1. - *Si e est un élément algébrique régulier de $\tilde{H}$, il en est de même de $s(e)$ pour $s \in G_e$, et de e^q pour $q = p^h$. On a de plus $H(e^q) = H(e)$.*

Les automorphismes de $\tilde{H}/H$ sont continus et conservent la norme. Il vient, pour $s \in G_e$ et $t \in G_{s(e)}$:

$$|ts(e) - s(e)| = |s^{-1}\, ts(e) - e| = |e| = |s(e)| = 1$$

$s(e)$ est bien algébrique régulier.

Soit s et t appartenant à $G_e \cup 1$ (tels que $t(e) \neq s(e)$), il vient :

$$|t(e) - s(e)| = |s^{-1}\, t(e) - e| = 1 .$$

Comme

$$(\overline{s(e)} - \overline{t(e)})^q = \overline{s(e)}^q - \overline{t(e)}^q = \overline{s(e^q)} - \overline{t(e^q)} ,$$

on a aussi

$$|s(e^q) - t(e^q)| = 1 .$$

En prenant pour t l'identité on voit que e^q est algébrique régulier. Par ailleurs, e^q a autant de conjugués que e, donc a le même degré sur H, et $H(e^q) = H(e)$.

PROPOSITION 1.2. - *Si K est une extension algébrique finie de H, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *$K = H(e)$ avec e algébrique régulier,*

2° *$\overline{K}/\overline{H}$ est séparable, et $[\overline{K}:\overline{H}] = [K:H]$,*

3° *$\overline{K}/\overline{H}$ est séparable, et il existe e dans K tel que $\{e^i\}$, $0 \leq i < [K:H]$ soit une base normale du H-espace vectoriel K.*

1° $\Longrightarrow$ 2° : Soit $P(X) = \prod_{s \in G_e \cup 1} (X - s(e)) = \sum a_i X^i$ le polynôme unitaire minimal de e sur H. Comme $|e| = 1$, on a $|a_i| \leq 1$. Posons $\overline{P}(X) = \sum \overline{a}_i X^i$. Il vient $\overline{P}(\overline{e}) = 0$. $\overline{P}$ n'a que des racines simples (les $\overline{s(e)}$). S'il existait une décomposition $\overline{P} = \overline{Q}\overline{R}$, on aurait $(\overline{Q}, \overline{R}) = 1$ et, d'après le lemme de Hensel, P ne serait pas irréductible. $\overline{P}$ est donc irréductible. Autrement dit, $\overline{e}$ et e ont même degré, ce qui montre que $\overline{K} = \overline{H}(\overline{e})$ et que $[\overline{K}:\overline{H}] = [K:H]$.

La relation

$$|P'(e)| = |\prod_{s\in G_e}(e - s(e))| = 1$$

montre que $\overline{P}'(\overline{e}) \neq 0$, c'est-à-dire que $\overline{P}' \neq 0$, $\overline{P}$ est donc séparable, il en est de même de $\overline{K}/\overline{H}$.

2° $\Longrightarrow$ 3° : Soit $e \in K$ tel que $\overline{K} = \overline{H}(\overline{e})$. Puisque $[H(e):H] \geqslant [\overline{H}(\overline{e}):\overline{H}]$, on a $K = H(e)$. Soit $f \in K$, nous avons : $f = \sum_{0\leqslant i<[K:H]} a_i\, e^i$. Quitte à multiplier par un élément de H , nous pouvons supposer que $\sup|a_i| = 1$. Supposons $|f|<1$. Le polynôme $\sum \overline{a}_i X^i$ de $\overline{H}[X]$ est non nul, et a $\overline{e}$ comme racine, son degré étant strictement inférieur à $[\overline{H}(\overline{e}):\overline{H}]$, il y a contradiction. Donc $|f| = \sup|a_i|$.

3° $\Longrightarrow$ 1° : La condition 3° donne immédiatement $|e| = 1$ et $\overline{K} = \overline{H}(\overline{e})$. Si P est le polynôme minimal unitaire de e sur H , $\overline{P}$ est le polynôme minimal de $\overline{e}$. Comme $\overline{K}/\overline{H}$ est séparable, $\overline{P}'$ n'est pas identiquement nul, donc P' contient un terme dont le coefficient à une norme 1 . Puisque $\deg P' < [K:H]$, la condition 3° donne

$$|\prod_{s\in G(e)}(e - s(e))| = |P'(e)| = \sup|\text{coef. de } P'| = 1 ,$$

donc, pour tout $s \in G(e)$, $|e - s(e)| = 1$.

<u>Définition</u>. - Lorsque K vérifie les conditions de la proposition précédente, on dit que K est une <u>extension algébrique régulière de</u> H .

COROLLAIRE 1.3. - <u>Si</u> K <u>est une extension algébrique régulière de</u> L , <u>et</u> L <u>une extension algébrique régulière de</u> H , <u>alors</u> K <u>est une extension algébrique régulière de</u> H .

C'est évident sur la propriété caractéristique 2° de la proposition 1.2.

Au cours de la démonstration de la proposition 1.2 (2° $\Longrightarrow$ 3° et 3° $\Longrightarrow$ 1°), nous avons en fait établit le résultat suivant :

COROLLAIRE 1.4. - <u>Si</u> K <u>est une extension algébrique régulière de</u> H , <u>et si</u> $e \in K$ <u>est tel que</u> $\overline{K} = \overline{H}(\overline{e})$, <u>alors</u> e <u>est algébrique régulier, et</u> $K = H(e)$.

PROPOSITION 1.5. - <u>Si</u> K <u>est une extension algébrique finie de</u> H <u>telle que</u> $\overline{K}/\overline{H}$ <u>soit séparable, il existe une extension</u> L <u>algébrique régulière de</u> H <u>contenue dans</u> K <u>telle que</u> $\overline{L} = \overline{K}$.

Soit $\overline{e}$ un élément de $\overline{K}$ tel que $\overline{K} = \overline{H}(\overline{e})$, et soit $\overline{P}$ le polynôme unitaire minimal de $\overline{e}$ sur $\overline{H}$. Nous relevons $\overline{P}$ en un polynôme unitaire P à coefficients dans H . Comme $\overline{K}/\overline{H}$ est séparable, la racine $\overline{e} \in \overline{K}$ de $\overline{P}$ est simple. Le lemme d'Hensel indique qu'il existe une racine e de P dans le corps complet K. Posons $L = H(e)$. On a $\overline{K} \supset \overline{L} \supset \overline{H}(\overline{e}) = \overline{K}$. Donc $\overline{L} = \overline{K}$ est séparable sur $\overline{H}$. Par ailleurs, on a

$$[L:H] = \deg e \leqslant \deg P = \deg \overline{P} = [\overline{K}:\overline{H}] = [\overline{L}:\overline{H}] ,$$

ce qui montre que L est régulière (condition 2 de la proposition 1.2).

COROLLAIRE 1.6. - Si H est un corps à valuation discrète, une extension algébrique finie K de H est régulière si, et seulement si, $\overline{K}/\overline{H}$ est séparable et K/H est non ramifiée.

Si K/H est régulière avec les notations de la proposition 1.2 (3° $\Longrightarrow$ 1°), pour $f \in K$, on trouve : $|f| = \sup|a_i|$, $a_i \in H$. K et H ont donc même ensemble de normes, K/H n'est pas ramifiée.

Réciproquement, supposons $\overline{K}/\overline{H}$ séparable, et soit L l'extension définie dans la proposition 1.5. Si K/H est non ramifiée, il en est de même de K/L. Comme $\overline{K} = \overline{L}$, K est aussi totalement ramifiée sur L, c'est-à-dire $K = L$ et K est régulière.

2. Enoncé du théorème.

Soit k un corps de caractéristique nulle, complet pour une norme ultramétrique. $\overline{k}$, son corps des restes, est supposé de caractéristique p et algébriquement clos.

Nous noterons W l'ensemble des séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n x^n$, où $\alpha_n \in k$, $|\alpha_n|$ est borné, et α_n tend vers 0 lorsque n tend vers $-\infty$. On vérifie facilement que W est un anneau, normé par

$$|\sum \alpha_n x^n| = \sup|\alpha_n| ,$$

et complet pour cette norme.

PROPOSITION 2.1. - Si H est un corps contenu dans W, alors $\overline{H} \subset \overline{k}((x))$ (corps des séries formelles à coefficients dans $\overline{k}$).

Posons

$$\mathcal{O} = \{\sum \alpha_n x^n \in W ; \ |\alpha_n| \leqslant 1\}$$
$$J = \{\sum \alpha_n x^n \in W ; \ |\alpha_n| < 1\}$$

$\mathcal{O}$ est un anneau, et $\mathcal{O} \cap H$ est l'anneau $\mathcal{O}_H$ des entiers de H. J est un idéal de $\mathcal{O}$, et $J \cap H$ est un idéal de $\mathcal{O}_H$. Comme $1 \notin J$, $J \cap H$ est différent de $\mathcal{O}_H$, et est contenu dans l'idéal maximal M_H de $\mathcal{O}_H$. Si $\sum \alpha_n x^n \in M_H$, on a $|\alpha_n| \leqslant |\sum \alpha_n x^n| < 1$, donc $J \cap H = M_H$. Autrement dit le noyau de l'application de $\mathcal{O}_H$ dans $\overline{k}((x))$, définie par $\sum \alpha_n x^n \to \sum \overline{\alpha}_n x^n$, est exactement M_H. Cette application donne un isomorphisme de $\overline{H} = \mathcal{O}_H/M_H$ avec un sous-corps de $\overline{k}((x))$.

COROLLAIRE 2.2. - <u>Un élément</u> $\sum \alpha_n x^n$ <u>de</u> W <u>est inversible si, et seulement si, il existe</u> n_0 <u>tel que</u> $|\sum \alpha_n x^n| = |\alpha_{n_0}|$.

Supposons $f = \sum \alpha_n x^n$ inversible dans W . $H = k(f)$ est un corps contenu dans W . Quitte à, éventuellement, augmenter k (pour que $|f|$ soit la norme d'un élément de k) et à multiplier f par un élément de k , on peut supposer que $|f| = 1$, c'est-à-dire que $f \in \mathcal{O}_H \subset \mathcal{O}$ et $f \notin M_H$. Ceci entraîne, puisque $M_H = J \cap H$, $f \in \mathcal{O}\backslash J$. Il existe donc n_0 tel que $|\alpha_{n_0}| = 1 = |f|$.

Réciproquement, soit n_0 le plus petit indice tel que $|\alpha_{n_0}| = |f|$. Si $\mathcal{O}_k$ désigne l'anneau des entiers de k on vérifie classiquement que

$$1 + \sum_{n>n_0} \alpha_n \alpha_{n_0}^{-1} x^{n-n_0}$$

est inversible dans $A_k[[x]] \subset W$. $\alpha_{n_0} x^{n_0}$ étant inversible dans W on en déduit que $\sum_{n\geq n_0} \alpha_n x^n$ est inversible dans W . Par ailleurs,

$$|\sum_{n<n_0} \alpha_n x^n| < |\alpha_{n_0}| = |\sum_{n\geq n_0} \alpha_n x^n| ,$$

ce qui montre que f lui-même est inversible car W est complet.

Si a est un polynôme à coefficients dans k , le corollaire précédent montre que a est inversible dans W . Par suite, $k(x) \subset W$ et, comme W est complet, le complété E de k(x) (pour la norme de W dite aussi norme de Gauss) est contenu dans W . E est aussi le corps des éléments analytiques dans le disque générique dans la terminologie de DWORK-ROBBA [4].

Le but principal de cet exposé est de démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME 2.3. - <u>Si</u> K <u>est une extension algébrique finie de</u> E <u>contenue dans</u> W, <u>alors</u> K <u>est une extension algébrique régulière de</u> E .

Dans le paragraphe 3, nous allons étudier l'extension $\overline{K}/\overline{E}$ et, en particulier, démontrer qu'elle est séparable. Ceci nous place dans les conditions d'application de la proposition 1.5. En particulier, le théorème sera démontré dans le cas où k est à valuation discrète (cf. corollaire 1.6).

Nous avons alors la situation suivante : L est une extension algébrique régulière de E , et K est une extension immédiate de L (même corps des restes et même groupe de valuation). Dans le paragraphe 4, nous supposons k algébriquement clos, et nous construisons, pour chaque $f \in K$, une suite g_n d'éléments de L tels que $|f - g_n|$ tende vers le maximum des $|f - s(f)|$ lorsque $s(f)$ parcourt les conjugués de f sur L . Les boules B_n de L , de centre g_n et de rayon $|f - g_n|$, sont emboîtées. L n'étant pas maximalement complet on ne peut assurer directement que $\bigcap B_n \neq \emptyset$. Nous supposons donc que k est maximalement complet, et nous montrons que les g_n peuvent être choisis dans un ensemble V(N , A , e) présentant un certain caractère de finitude sur k. Ceci nous permet de construire $g \in \bigcap B_n \subset L$ c'est-à-dire tel que $|f - g| = \sup|f - s(f)|$ un argument du style lemme de Krasner montre que f lui-même appartient à L, donc que K est régulière.

Le théorème étant démontré lorsque le corps de base est l'extension immédiate maximale (donc maximalement complète) de la clôture algébrique de k, le paragraphe 5 montre comment en déduire le résultat pour k lui-même en utilisant la théorie de Galois p-adique de DWORK-ROBBA.

3. Extensions résiduelles.

$\overline{K}$ est une extension algébrique finie de $\overline{E} = \overline{k}(x)$. D'après la proposition 2.1, $\overline{K} \subset \overline{k}((x))$. Le fait que $\overline{K}/\overline{E}$ est séparable découle immédiatement de la proposition un peu plus générale suivante :

PROPOSITION 3.1. - <u>Soit</u> $\overline{K}$ <u>une extension algébrique finie de</u> $\overline{E}$. $\overline{K}/\overline{E}$ <u>est séparable si, et seulement si,</u> $x^{1/p}$ <u>n'appartient pas à</u> $\overline{K}$.

$x^{1/p}$ n'étant pas séparable sur $\overline{E}$ la condition est nécessaire.

Le corps $\overline{k}$ étant algébriquement clos, donc parfait, pour $\alpha \in \overline{k}$, il existe une unique racine p-ième $\alpha^{1/p}$. On a :

$$(\sum \alpha_i\, x^{ip})/(\sum \beta_i\, x^{ip}) = [(\sum \alpha_i^{1/p}\, x^i)/(\sum \alpha_i^{1/p}\, x^i)]^p ,$$

ce qui montre que $\overline{k}(x^p) = (\overline{k}(x))^p$.

$\overline{E} = \overline{k}(x)$ est de degré p sur $\overline{k}(x^p)$. Si $a \in \overline{E}$, on a donc $a = \sum_{k=0}^{p-1} a_k^p\, x^k$ avec $a_k \in \overline{E}$.

Soit $P(X) = \sum a_i\, X^{pi}$ un polynôme non séparable de $\overline{E}[X]$. Montrons que ce n'est pas le polynôme minimal d'un élément f de $\overline{K}$. Sinon nous aurions :

$$0 = P(f) = \sum a_i\, f^{pi} = \sum_{k=0}^{p-1} x^k \sum a_{i,k}^p\, f^{pi}$$

avec $a_{i,k} \in \overline{E}$. Posons $b_k = \sum a_{i,k}\, f^i$, on a $\sum_{k=0}^{p-1} b_k\, x^{k/p} = 0$ avec $b_k \in \overline{K}$. Comme $x^{1/p}$ n'appartient pas à $\overline{K}$, le polynôme minimal de $x^{1/p}$ sur $\overline{K}$ est de degré p, on en déduit $b_k = 0$. Les a_i n'étant pas tous nuls, il en est de même des $a_{i,k}$. Il existe k tel que les $a_{i,k}$ ne sont pas tous nuls bien que $\sum a_{i,k}\, f^i = 0$. P n'était donc pas le polynôme minimal de f.

Cette proposition achève la démonstration du théorème 2.3 lorsque k est à valuation discrète.

Dans tous les cas, à cause du corollaire 1.4, il est intéressant de préciser les propriétés d'éléments $\overline{e}$ qui engendrent $\overline{K}$ sur $\overline{E}$.

PROPOSITION 3.2. - <u>Si</u> $\overline{K}$ <u>est une extension algébrique finie de</u> $\overline{E}$ <u>contenue dans</u>

$\overline{k}((x))$, il existe $\overline{e}$ dans $\overline{K}$ tel que :

(i) $\overline{K} = \overline{E}(\overline{e})$,

(ii) $\overline{e} \in x\overline{k}[[x]]$,

(iii) $\overline{e} + x\overline{Q}(\overline{e}) = 0$ où $\overline{Q}$ est un polynôme à coefficients dans $\overline{k}[x]$ de degré $[\overline{K}:\overline{E}]$.

Ce résultat n'est que la transcription d'un résultat de BATEMAN-DUQUETTE [1].

Comme $\overline{K}$ est une extension algébrique finie et séparable de $\overline{E}$, contenue dans $\overline{k}((x))$, le résultat de BATEMAN-DUQUETTE affirme que $\overline{K}$ peut être engendré par un élément de Pisot (PV élément) c'est-à-dire un élément θ entier sur $\overline{k}[1/x]$ dont tous les conjugués sont de valuation x-adique positive.

Si $R(X) = X^n + \dots + c_i(1/x)\, X^{n-i} + \dots + c_n(1/x)$ est le polynôme unitaire minimal de θ sur $\overline{k}(x)$, l'examen du polygone de Newton pour la valuation x-adique de R montre :

$$x^{\deg c_1} c_i(1/x) = \begin{cases} xa_i(x) & \text{si} \quad i \neq 1 \\ \alpha + xa_i(x) & \text{si} \quad i = 1 \end{cases} \quad \text{avec} \quad a_i \in \overline{k}[x] \quad \text{et} \quad \alpha \in \overline{k}^* .$$

Nous posons $\overline{e} = 1/\theta$. Il est clair que $\overline{E}(\overline{e}) = \overline{E}(\theta) = \overline{K}$, et en posant $\overline{Q}(X) = \alpha^{-1} \sum a_i(x)\, X^i$, il vient $\overline{e} + x\overline{Q}(\overline{e}) = 0$.

L'application $f \longrightarrow -x\overline{Q}(f)$ est une application de $x\overline{k}[[x]]$ dans lui-même contractante pour la valuation x-adique. Il existe une unique solution de $X+x\overline{Q}(X)=0$ dans $x\overline{k}[[x]]$ qui, par suite, est de valuation x-adique positive. Les conjugués de e étant les inverses des conjugués de θ sont de valuation x-adique négative, cette solution ne peut être que $\overline{e}$ ce qui démontre (ii).

4. Démonstration du théorème dans le cas où le corps de base est algébriquement clos et maximalement complet.

Dans ce paragraphe, nous supposons k algébriquement clos et maximalement complet. K est une extension algébrique finie de E contenue dans W , et L une extension algébrique régulière de E contenue dans K et telle que $\overline{K} = \overline{L}$ (voir propositions 1.5 et 3.1).

Comme indiqué dans le schéma de la démonstration du théorème, nous aurons besoin d'ensembles $V(N , A , e)$. Nous commençons par construire ceux-ci, et nous en donnons quelques propriétés.

4.1 : Pour chaque $\alpha \in \overline{k}$, nous choisissons un relèvement $\underset{\sim}{\alpha} \in k$. En particulier, nous choisissons $\underset{\sim}{0} = 0$. Nous posons :

$$e_{n,\alpha} = (\underset{\sim}{\alpha} - x)^{-n} \; ; \quad e_{n,\infty} = x^n .$$

Si A est un ensemble fini contenu dans $\overline{k} \cup \infty$, nous dirons que $a \in V(N , A)$

si, et seulement si, $a \in E$, $|a| \leqslant 1$ et il existe λ , $\lambda_{n,\alpha} \in k$ tels que :

$$|a - \lambda - \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant N \\ \alpha \in A}} \lambda_{n,\alpha} e_{n,\alpha}| \leqslant |p| .$$

Comme $\bar{k}$ est algébriquement clos, l'ensemble $\{1 , e_{n,\alpha}\}$ pour $1 \leqslant n$, $\alpha \in \bar{k} \cup \infty$ forme une base normale de E sur k (théorème de Mittag-Leffler [7]). On en déduit :

Pour tout $a \in E$, $|a| \leqslant 1$, il existe A et N tels que $a \in V(N , A)$.

Pour $a \in V(N , A)$ donné, on peut choisir les $\lambda_{n,\alpha}$ et λ de telle sorte que : ou bien $|a| = \sup(|\lambda| , |\lambda_{n,\alpha}|)$, ou bien $|a| < |p|$ et $\lambda_{n,\alpha} = \lambda = 0$.

Nous définissons q , puissance de p , telle que $[K:L] = mq$ avec $(m , p) = 1$, et, pour $a = \sum \alpha_n x^n \in W$, nous poserons

$$Ua = \sum \alpha_{nq} x^{nq} .$$

Cet opérateur sert à caractériser les puissances q-ième de W . En effet, puisque $|(\sum \alpha_n x^n)^q - \sum \alpha_n^q x^{nq}| \leqslant |p|$, pour $|\alpha_n| \leqslant 1$, il vient

$$|Ua^q - a^q| \leqslant |p| \quad \text{pour} \quad |a| \leqslant 1 .$$

Si $a \in k(x)$, un calcul immédiat montre que

$$Ua(x) = \frac{1}{q} \sum_{\xi^q = 1} a(\xi x) ,$$

ce qui prouve que $Ua \in k(x)$. Comme U est continu sur W , on a $UE \subset E$. Nous précisons ce résultat dans le lemme suivant.

LEMME 4.1. - <u>Si</u> $a \in V(Nq , A)$, <u>il existe</u> $b \in V(N , A)$ <u>tel que</u>

$$|Ua - b^q| \leqslant |p| .$$

Pour $\alpha = 0$ ou ∞ , on obtient immédiatement :

$$Ue_{n,\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si } q \nmid n \\ e_{k,\alpha} & \text{si } n = kq \end{cases}$$

Pour $\alpha \neq 0$, ∞ on trouve :

$$e_{n,\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m} x^m \underset{\sim}{\alpha}^{-(n+m)}$$

c'est-à-dire

$$Ue_{n,\alpha} = \sum \binom{n+mq-1}{mq} x^{qm} \underset{\sim}{\alpha}^{-(mq+n)} .$$

Si $n = kq - \ell$, $0 \leqslant \ell < q$, on vérifie

$$\binom{n+mq-1}{mq} = \binom{(k+m-1)q+q-1-\ell}{mq} = \binom{k+m-1}{m} = \binom{k+m-1}{m}^q \pmod p ,$$

ce qui donne

$$|Ue_{n,\alpha} - \alpha^\ell e_{k,\alpha}^q| \leqslant |p| .$$

Si $a \in V(Nq , A)$ est associé aux $\lambda_{n,\alpha}$, λ, il vient

$$|Ua - \sum_{\substack{1\leq k\leq N\\ \alpha\in A}} \mu_{k,\alpha}\, e^q_{k,\alpha} - \lambda| \leq |p| ,$$

avec $\mu_{k,\alpha} = \lambda_{kq,\alpha}$ pour $\alpha = 0 , \infty$ et $\mu_{k,\alpha} = \sum_{\ell=0}^{q-1} \lambda_{kq-\ell,\alpha}\, \underset{\sim}{\alpha}^{\ell}$ pour $\alpha \neq 0,\infty$. Comme k est algébriquement clos, nous pouvons choisir pour chaque λ, $\mu_{k,\alpha}$ une racine q-ième. Le lemme est démontré avec

$$b = \sum_{\substack{1\leq k\leq N\\ \alpha\in A}} \mu_{k,\alpha}^{1/q}\, e_{k,\alpha} + \lambda^{1/q} .$$

Nous aurons aussi besoin des propriétés suivantes dont la démonstration facile est laissée au lecteur :

Si $a \in V(N , A)$ et $b \in V(M , A)$ alors

$$ab \in V(N + M , A) \quad \text{et} \quad a + b \in V(\sup(N , M) , A) .$$

Dans la suite, e désignera un élément algébrique régulier sur E qui engendre L. La proposition 1.1 montre que e^q a les mêmes propriétés.

Nous noterons $V(N , A , e)$ l'ensemble des éléments g de L tels que

$$g = \sum_{i=0}^{[L:E]-1} a_i\, e^i \quad \text{avec} \quad a_i \in V(N , A) .$$

e^i étant une base normale de L/E (proposition 1.2), il existe N et A tels que $g \in V(N , A , e)$ si, et seulement si, $g \in L$ et $|g| \leq 1$.

LEMME 4.2. - <u>Soit</u> $g \in V(Nq , A , e^q)$ <u>et</u> $f \in W$ <u>tels que</u> $|g - f^q| \leq \gamma \leq 1$, <u>il existe</u> $h \in V(N , A , e)$ <u>tel que</u> $|g - h^q| \leq \sup(\gamma , |p|)$.

Comme $|g| \leq 1$, on a $|f| \leq 1$, donc $|Uf^q - f^q| \leq |p|$. Puisque U n'augmente pas les normes, on a $|Ug - g| \leq \sup(\gamma , |p|)$. Posons $g = \sum a_i\, e^{iq}$ avec $a_i \in V(Nq , A)$. Si $a = \sum \alpha_n x^n$ et $e = \sum \varepsilon_n x^n$ sont deux éléments de normes inférieures à 1 de W, en faisant les calculs modulo $|p|$, il vient :

$$U(ae^q) = U(\sum \alpha_n x^n \sum \varepsilon_m^q x^{mq}) = U(\sum \alpha_n \varepsilon_m^q x^{n+mq}) = \sum \alpha_{nq} \varepsilon_m^q x^{(n+m)q}$$
$$= \sum \alpha_{nq} x^{nq} \sum \varepsilon_m^q x^{mq} = (Ua)e^q .$$

Nous en déduisons

$$|Ug - \sum(Ua_i)e^{iq}| \leq |p| ,$$

c'est-à-dire

$$|\sum(Ua_i - a_i)e^{iq}| \leq \sup(\gamma , |p|) .$$

Comme e^{iq} est une base normale de L sur E, on a aussi

$$|Ua_i - a_i| \leq \sup(\gamma , |p|) .$$

D'après le lemme 4.1, il existe $b_i \in V(N , A)$ tel que

$$|Ua_i - b_i^q| \leqslant |p| .$$

Nous posons $h = \sum b_i e^i$, h appartient bien à $V(N , A , e)$ et comme $|h^q - \sum b_i^q e^{iq}| \leqslant |p|$, on trouve :

$$|h^q - g| \leqslant \sup(|b_i^q - a_i| , |p|) \leqslant \sup(\gamma , |p|) .$$

4.2 : Pour $f \in K$, nous noterons $\gamma(f)$ le maximum des $|f - s(f)|$ pour $s(f)$ parcourant les conjugués de f sur L . En particulier, on trouve $\gamma(f) = 0$ si, et seulement si, $f \in L$.

LEMME 4.3. - Soit $f \in K$ et $g \in L$. On a $\gamma(f) = \gamma(f - g) \leqslant |f - g|$. S'il existe $g \in L$ tel que $\gamma(f) = |f - g|$, alors $f \in L$.

Soit $s(f)$ un conjugué de f , on a $s(f - g) = s(f) - g$, ce qui donne, puisque $|s(f - g)| = |f - g|$,

$$|s(f) - f| = |s(f - g) - (f - g)| \leqslant |f - g| ,$$

c'est-à-dire, pour s réalisant le maximum de $|s(f) - f|$:

$$\gamma(f) = \gamma(f - g) \leqslant |f - g| .$$

Supposons $\gamma(f) = |f - g|$ avec $f \notin L$, c'est-à-dire $\gamma(f) \neq 0$. Il existe $\alpha \in k^*$ tel que $|\alpha| = |f - g|$, c'est-à-dire tel que

$$0 \neq \overline{\alpha^{-1}(f - g)} \in \overline{K} = \overline{L} .$$

Autrement dit, il existe $g_1 \in L$ tel que $|\alpha^{-1}(f - g) - g_1| < 1$. D'après la première partie, on a

$$\gamma(f) = \gamma(f - g - \alpha g_1) \leqslant |f - g - \alpha g_1| < |\alpha| = |f - g| = \gamma(f) ,$$

d'où une contradiction. Donc f appartient à L .

Dans ce lemme nous avons construit, à partir d'un élément g de L qui "approche" f , un nouvel élément g_1 qui approche encore mieux f . Le lemme suivant va préciser cette construction et permettra de construire par récurrence une suite g_n telle que $|f - g_n|$ tende vers $\gamma(f)$.

LEMME 4.4. - Soit $f \in K$ et $g \in L$ tels que $|f| = |g| = 1$. Il existe $g_1 \in L$ tel que

$$|f - g_1| \leqslant \sup\{\gamma(f)^{1/q}|f - g|^{1-1/q} , |p|^{1/q}\} .$$

De plus, on peut choisir N et A ne dépendant que de f , de telle sorte que, si $g \in V(2N , A , e)$, il en soit de même de g_1 .

Le degré de f sur L divise $[K:L] = mq$. Si $\deg f = m' q'$ avec $(m',p) = 1$ et q' puissance de p , on a q' divise q , c'est-à-dire $q' \leqslant q$. L'inégalité sera établie si nous la démontrons avec q' à la place de q. Aussi, pour simplifier les notations, nous supposerons dans la suite que $\deg f = mq$.

Soit P le polynôme minimal unitaire de f sur L. Comme $|f| = 1$, nous avons
$$P(X) = X^{mq} + \sum_{i=0}^{mq-1} A_i X^i \quad \text{avec } A_i \in L \text{ et } |A_i| \leq 1 .$$

Nous avons
$$P(X + z) = \sum_{i=0}^{mq} P^{[i]}(z)\, X^i \quad \text{avec } P^{[i]}(z) = \sum_j \binom{i+j}{j} A_{i+j}\, X^j .$$

Nous posons
$$Q(X) = -\binom{mq}{q}^{-1} P^{[mq-q]}(X) = X^q + \sum_{i=0}^{q-1} B_i X^i .$$

Comme $|\binom{mq}{q}| = |m| = 1$,
$$|B_i| = |\binom{mq}{q}^{-1}\binom{i+mq-q}{i} A_{i+mq-q}| \leq 1 .$$

Par ailleurs nous avons les relations :
$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{mq} P^{[i]}(g)\, X^i (f-g)^{i-mq} &= (f-g)^{-mq}\, P[(f-g)X + g] \\ &= (f-g)^{-mq} \prod_s [(f-g)X + g - f + f - s(f)] \\ &= \prod_s [X - 1 + (f - s(f))(f-g)^{-1}] \\ &= (X-1)^{mq} + \dots\end{aligned}$$

En considérant le coefficient de X^{mq-q} dans cette égalité, on obtient
$$|-\binom{mq}{q} Q(g)(f-g)^{-q} - \binom{mq}{q}(-1)^q| \leq \gamma(f)|f-g|^{-1} ,$$
ce qui donne :
$$|Q(g) - (f-g)^q| \leq \gamma(f)|f-g|^{q-1} \leq |f-g|^q \leq 1 .$$

Comme $Q(g)$ appartient à L, donc à $V(Nq, A, e^q)$ pour N et A convenablement choisis, et comme $f - g$ appartient à W, nous pourrons appliquer le lemme 4.2. Auparavant nous allons préciser la manière de choisir N et A.

Comme B_i et e^j appartiennent à L, nous pouvons choisir N et A de telle sorte que :

(i) $B_i \in V(N, A, e)$ pour tout i $(0 \leq i \leq q-1)$

(ii) $e^j \in V(N, A, e^q)$ pour $0 \leq j < q[L:E]$.

N et A ne dépendent alors que des B_i c'est-à-dire de P, donc de f.

Soit $g \in V(2N, A, e)$, c'est-à-dire
$$g = \sum_{j=0}^{[L:E]-1} a_j e^j \quad \text{avec } a_j \in V(2N, A) .$$

On a
$$g^i = \sum_{j=0}^{i[L:E]-1} a_{i,j}\, e^j ,$$
où $a_{i,j}$ est un polynôme homogène de degré i en les a_j, c'est-à-dire où

$a_{i,j} \in V(2iN , A)$.

Posons

$$B_i = \sum B_{i,k}\, e^k , \quad e^j = \sum E_{j,k}\, e^{kq} ,$$

avec $j < q[L:E]$, $B_{i,k}$ et $E_{j,k}$ appartiennent à $V(N , A)$. Il vient :

$$B_i\, g^i = \sum B_{i,k}\, a_{i,j}\, e^{k+j} = \sum B_{i,k}\, a_{i,j}\, E_{j+k,\ell}\, e^{\ell q} .$$

Comme $j + k \leqslant i[L:E] - i + [L:E] - 1 < q[L:E]$ pour $i < q$, il vient :

$$B_{i,j}\, a_{i,k}\, E_{j+k,\ell} \in V(2iN + N + N , A) \subset V(2qN , A) ,$$

c'est-à-dire $B_i\, g^i \in V(2qN , A , e^q)$.

Par ailleurs la relation $|g^q - \sum a_j^q\, e^{jq}| \leqslant |p|$ montre que $g^q \in V(2Nq , A , e^q)$. Nous obtenons donc :

$$Q(g) = g^q + \sum B_i\, g^i \in V(2Nq , A , e^q) .$$

Le lemme 4.2 permet alors de trouver $h \in V(2N , A , e)$ tel que

$$|Q(g) - h^q| \leqslant \sup\{\gamma(f)|f - g|^{q-1} , |p|\} ,$$

c'est-à-dire tel que

$$|h^q - (f - g)^q| \leqslant \sup\{\gamma(f)|f - g|^{q-1} , |p|\} .$$

Comme $|f - g| \leqslant 1$, et par suite $|h| \leqslant 1$, on trouve :

$$|[h - (f - g)]^q| \leqslant \sup\{|h^q - (f - g)^q| , |p|\} \leqslant \sup\{\gamma(f)|f - g|^{q-1} , |p|\} .$$

Le lemme est démontré en posant $g_1 = h + g$.

Nous montrons maintenant, sous une forme légèrement modifiée, l'existence d'une suite g_n telle que $|f - g_n|$ tende vers $\gamma(f)$.

LEMME 4.5. - Pour tout ε , il existe f tel que $K = L(f)$, $|f| = 1$ et $1 - \varepsilon \leqslant \gamma(f) \leqslant 1$ (on suppose ici $K \neq L$).

Nous choisissons f_0 tel que $K = L(f_0)$, et nous allons construire par récurrence une suite f_n d'éléments de K tels que $|f_n| = 1$, $K = L(f_n)$ et $\lim \gamma(f_n) = 1$, ce qui démontrera le lemme.

Le lemme 4.4, appliqué avec $f = f_n$ et $g = 0$, montre qu'il existe $g_n \in L$ tel que

$$|f_n - g_n| \leqslant \sup\{\gamma(f_n)^{1/q} , |p|^{1/q}\} \leqslant 1 .$$

Soit $\alpha_n \in k$ tel que $|\alpha_n| = |f_n - g_n|$. Nous posons $f_{n+1} = \alpha_n^{-1}(f_n - g_n)$. Il est clair que $|f_{n+1}| = 1$ et que $K = L(f_{n+1})$. L'inégalité

$$1 \geqslant |f_{n+1} - s(f_{n+1})| = |\alpha_n^{-1}||f_n - s(f_n)| \geqslant |f_n - s(f_n)|$$

montre que la suite $\gamma(f_n)$ est croissante et bornée par 1 . Soit γ sa limite, comme

$$0 < \gamma(f_n) = \gamma(f_n - g_n) = \alpha_n \gamma(f_{n+1})$$

et

$$|\alpha_n| = |f_n - g_n| \leqslant \sup\{\gamma^{1/q} , |p|^{1/q}\} ,$$

en passant à la limite on trouve

$$0 < \gamma \leqslant \sup\{\gamma^{1/q} , |p|^{1/q}\}\gamma ,$$

ce qui conduit à $\gamma^{1/q} \geqslant 1$, c'est-à-dire à $\gamma = 1$.

4.3 : Démonstration du théorème : Nous allons utiliser maintenant le fait que k soit maximalement complet.

D'après le lemme 4.5, il existe f tel que $|f| = 1$, $L = K(f)$ et $|p|^{1/q} \leqslant \gamma(f) < 1$ (nous supposons toujours $K \neq L$) . Pour tout $g \in L$, on a donc $p^{1/q} \leqslant \gamma(f)^{1/q}|f - g|^{1-1/q}$. Nous choisissons N et A associés à f comme dans le lemme 4.4. A partir de $g_0 = 0 \in V(2N , A , e)$, ce lemme permet de construire par récurrence une suite g_n d'éléments de $V(2N , A , e)$ tels que

$$|f - g_{n+1}| \leqslant \gamma(f)^{1/q}|f - g_n|^{1-1/q} < |f - g_n| .$$

Soit γ la limite de la suite décroissante $|f - g_n|$, on trouve :

$$\gamma \leqslant \gamma(f)^{1/q} \gamma^{1-1/q} ,$$

c'est-à-dire $\gamma \leqslant \gamma(f)$.

Puisque $g_n \in V(2N , A , e)$, nous avons :

$$g_n = \Sigma[\lambda_{i,n} + \Sigma \lambda_{m,\alpha,i,n} e_{m,\alpha}]e^i + c_n \quad \text{avec} \quad c_n \in L , \quad |c_n| \leqslant |p|$$

où, dans la somme, on a $1 \leqslant m \leqslant 2N$, $\alpha \in A$ et $0 \leqslant i < [L:E]$.

e^i étant une base normale de L sur E et $e_{m,\alpha}$ une base normale de E , on a $|\lambda_{m,\alpha,i,n}| \leqslant |g_n|$. Soit $B_{m,\alpha,i,n}$ (resp. $B_{i,n}$) la boule de k de centre $\lambda_{m,\alpha,i,n}$ (resp. $\lambda_{i,n}$) et de rayon $|f - g_n|$. Pour $r > n$, on a $|f-g_r|<|f-g_n|$, c'est-à-dire $|g_r - g_n| \leqslant |f - g_n|$. On voit que $\lambda_{m,\alpha,i,r} \in B_{m,\alpha,i,n}$, ce qui montre $B_{m,\alpha,i,r} \subset B_{m,\alpha,i,n}$. k étant maximalement complet, il existe $\lambda_{m,\alpha,i}$ (resp. λ_i) contenu dans l'intersection des $B_{m,\alpha,i,n}$ (resp. $B_{i,n}$) . Pour

$$g = \Sigma[\lambda_i + \Sigma \lambda_{m,\alpha,i} e_{m,\alpha}]e^i \subset L \quad \text{(la somme est finie),}$$

on a $|f - g| \leqslant |f - g_n|$ pour tout n , c'est-à-dire $|f - g| \leqslant \gamma(f)$. D'après le lemme 4.3, on voit que $f \in L$, c'est-à-dire $K = L$ (contrairement à l'hypothèse). K était donc une extension régulière de E .

5. Démonstration du théorème dans le cas général.

Nous nous proposons de démontrer le théorème 2.3 quand k est quelconque (c'est-à-dire k complet et $\overline{k}$ algébriquement clos).

Nous noterons Ω l'extension maximale immédiate de la clôture algébrique $\tilde{k}$ de k. Ω est algébriquement clos (vérification facile : sa clôture algébrique ayant même corps des restes et même groupe de valuation) et maximalement complet (par construction). De plus, comme $\overline{k}$ est algébriquement clos, on a $\overline{\Omega} = \overline{\tilde{k}} = \overline{k}$. Nous noterons k_0 le plus petit corps complet tel que $\overline{k_0} = \overline{k}$. k_0 est le corps des quotients de l'anneau des vecteurs de Witt de k.

W_Ω et E_Ω désignerons les ensembles W et E construits avec $k = \Omega$. Nous poserons $K_\Omega = K \otimes_E E_\Omega$. K_Ω est une extension algébrique finie de E_Ω contenue dans W_Ω (on a $K \subset W \subset W_\Omega$). D'après le paragraphe 4, K_Ω est une extension régulière de E_Ω.

Remarquons que $\overline{E}_\Omega = \overline{\Omega}(x) = \overline{k}(x) = \overline{E}$. $\overline{K}_\Omega$ est une extension algébrique finie de $\overline{E}$ contenue dans $\overline{\Omega}((x)) = \overline{k}((x))$. Nous pouvons appliquer la proposition 3.2 à l'extension $\overline{K}_\Omega/\overline{E}$. Nous introduisons ainsi un élément $\overline{e}$ de $\overline{K_\Omega}$ et un polynôme $\overline{Q}$ à coefficients dans $\overline{k}[x]$ de degré $[\overline{E}(\overline{e}):\overline{E}]$. Nous relevons $\overline{Q}$ en un polynôme Q à coefficients dans $k_0[x]$ et de même degré. Le polynôme $X + x\overline{Q}(X)$, ayant une racine simple $\overline{e}$ dans $\overline{K_\Omega}$, a d'après le lemme d'Hensel une racine simple dans le corps complet K_Ω qui relève $\overline{e}$. Notons cette racine e. Par ailleurs l'application $f \longrightarrow xQ(f)$, étant une contraction de $xk_0[[x]]$ pour la valuation x-adique, a un unique point fixe dans $xk_0[[x]]$. On vérifie en passant au corps des restes que ce ne peut être que e.

Comme K_Ω/E_Ω est régulière et comme $\overline{K_\Omega} = \overline{E}(\overline{e}) = \overline{E}_\Omega(\overline{e})$, le corollaire 1.4 montre que $K_\Omega = E_\Omega(e)$ et que e est algébrique régulier sur E_Ω. Comme Q est à coefficients dans $k_0[x] \subset k(x) \subset E$, e est en fait algébrique sur E. $X + x\overline{Q}(X)$ étant irréductible sur $\overline{E}$, $X + xQ(X)$ est irréductible sur E. On a donc $[\overline{E}(\overline{e}):E] = [E(e):E]$, et $E(e)$ est une extension régulière de E d'après la proposition 1.2, donc e est régulier sur E d'après le corollaire 1.4.

Considérons alors le groupe G des automorphismes continus de Ω/k. DWORK et ROBBA ont montré ([4], § 8) que, si α Ω et si $\sigma(\alpha) = \alpha$ pour tout $\sigma \in G$, alors $\alpha \in k$.

G opère sur W_Ω par $\sigma(\sum \alpha_n x^n) = \sum \sigma(\alpha_n) x^n$. Le résultat précédent montre que, si $f \in W_\Omega$, $f \in W$ si, et seulement si, $\sigma f = f$ pour tout $\sigma \in G$.

Comme $\overline{\Omega} = \overline{k}$, on peut pour chaque $\alpha \in \overline{\Omega}$ choisir un représentant $\underline{\alpha}$ dans k, les $e_{n,\alpha}$ (voir § 4.1) ainsi construits sont contenus dans W, et $\sigma(e_{n,\alpha}) = e_{n,\alpha}$. Si $a \in E_\Omega$, d'après le théorème de Mittag-Leffler, on peut écrire :

$$a = \lambda + \sum \lambda_{n,\alpha} e_{n,\alpha} ,$$

ce qui donne, puisque σ est continu,

$$\sigma(a) = \sigma(\lambda) + \sum \sigma(\lambda_{n,\alpha}) e_{n,\alpha} .$$

Si, pour tout $\sigma \in G$, on a $a = \sigma(a)$, il vient $\sigma(\lambda_{n,\alpha}) = \lambda_{n,\alpha}$, c'est-à-dire $\lambda_{n,\alpha} \in k$, et donc $a \in E$.

Soit $f \subset K \subset K_\Omega \cap W$. Comme $f \in K_\Omega$, on a

$$f = \sum a_i e^i , \quad a_i \in E_\Omega ,$$

cette décomposition étant d'ailleurs unique. Comme $f \in W$, on a, pour tout $\sigma \in G$, $f = \sigma(f) = \sum \sigma(a_i) e^i$ (e^i appartenant à $x^i k_0[[x]]$ donc à W), c'est-à-dire $\sigma(a_i) = a_i$, donc $a_i \in E$. Nous avons démontré que $K \subset E(e)$. Mais, par ailleurs, nous avons

$$[K:E] \geqslant [K_\Omega:E_\Omega] = [\overline{K_\Omega}:\overline{E_\Omega}] = [\overline{E}(\overline{e}):\overline{E}] = [E(e):E] .$$

Donc $K = E(e)$. e étant algébrique régulier K est bien une extension algébrique régulière de E.

Nous avons en fait démontré un peu plus que le théorème 2.3 puisque nous avons donné un élément particulier e qui engendre K sur E. Nous résumons les propriétés de e dans le corollaire 5, où nous notons $\underset{\sim}{w}$ l'anneau des entiers de k_0 c'est-à-dire l'anneau des vecteurs de Witt de $\bar{k}$.

COROLLAIRE 5. - Si K est une extension algébrique finie de E contenue dans W, il existe e dans K, algébrique régulier sur E tel que :

(i) $K = E(e)$,

(ii) $e \in x\underset{\sim}{w}[[x]]$,

(iii) $e + xQ(e) = 0$, où Q est un polynôme de degré $[K:E]$ à coefficients dans $\underset{\sim}{w}[x]$.

6. Anneau des coefficients.

Rappelons que $\mathcal{O}_k$ désigne l'anneau des entiers de k. Un sous-anneau de $\mathcal{O}_k$ sera dit séparable s'il contient $\underset{\sim}{w}$ et si l'ensemble des normes de ses éléments forme une suite décroissante tendant vers 0. Par exemple, tout anneau $A \subset \mathcal{O}_k$ noethérien est séparable : c'est évident en considérant les idéaux $\{\alpha \in A \; ; \; |\alpha| \leq r\}$ de A.

PROPOSITION 6.1. - Soit α_n une suite d'éléments de $\mathcal{O}_k$ tendant vers 0. L'anneau $\underset{\sim}{w}[\alpha_n]$ engendré sur $\underset{\sim}{w}$ par les α_n est séparable.

Notons A_ε l'anneau engendré sur w par ceux des α_n qui vérifient $|\alpha_n| > \varepsilon$. Comme α_n tend vers 0, A_ε est engendré sur $\underset{\sim}{w}$ par un nombre fini d'éléments. $\underset{\sim}{w}$ étant noethérien, il en est de même de A_ε. Par ailleurs, si $\alpha \in \underset{\sim}{w}[\alpha_n]$, il existe $\alpha_\varepsilon \in A_\varepsilon$ tel que $|\alpha - \alpha_\varepsilon| \leqslant \varepsilon$. Donc, si $|\alpha| > \varepsilon$, on a $|\alpha| = |\alpha_\varepsilon|$. A_ε étant noethérien donc séparable, $|\alpha_\varepsilon|$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs supérieures à ε, il en est de même de $|\alpha|$, et on voit que $\underset{\sim}{w}[\alpha_n]$ est séparable.

Remarque : En général $w[\alpha_n]$ n'est pas noethérien comme le montre l'exemple $\alpha_n = p^n \prod_n$ avec $\prod_n^n = p$. Un système de générateurs de l'idéal (maximal) $\{\alpha \in w[\alpha_n] ; |\alpha| < 1\}$ contenant obligatoirement les α_q pour q premier.

Si f_i est un ensemble fini d'éléments de $\mathcal{O}$ ($f_i \in W$ et $|f_i| \leq 1$) avec $f_i = \sum \alpha_{n,i} x^n$, nous appellerons anneau des coefficients des f_i l'anneau $\underset{\sim}{w}\langle f_i\rangle$ engendré sur $\underset{\sim}{w}$ par les $\alpha_{n,i}$.

PROPOSITION 6.2. - Si les f_i sont algébriques sur E, $w\langle f_i\rangle$ est un anneau séparable.

D'après le corollaire 5, on sait que $E(f_i) = E(e)$, avec $e \in x\underset{\sim}{w}[[x]]$ et e algébrique régulier sur E, c'est-à-dire $f_i = \sum a_{i,j} e^j$ avec $a_{i,j} \in E$, $|a_{i,j}| \leq |f_i| \leq 1$. Il est alors immédiat de constater que $\underset{\sim}{w}\langle f_i\rangle = \underset{\sim}{w}\langle a_{i,j}\rangle$. Si, pour chaque $\alpha \in \bar{k}$, nous choisissons un relèvement dans $\underset{\sim}{w}$, le développement de Mittag-Leffler s'écrit

$$a_{i,j} = \lambda_{i,j} + \sum \lambda_{i,j,n,\alpha}\, e_{n,\alpha} \quad \text{avec} \quad e_{n,\alpha} \in \underset{\sim}{w}((x)) .$$

Il s'en suit que $\underset{\sim}{w}\langle a_{i,j}\rangle$ est l'anneau $\underset{\sim}{w}[\lambda_{i,j}, \lambda_{i,j,n,\alpha}]$. Comme les f_i, et donc aussi les $a_{i,j}$, sont en nombre fini, on sait que les $\lambda_{i,j,n,\alpha}$ tendent vers 0, c'est-à-dire, d'après la proposition 6.1, que $\underset{\sim}{w}\langle a_{i,j}\rangle$ est séparable.

Nous terminons en appliquant ces résultats à l'étude des éléments algébriques ([2] et [5]).

Nous partons de la définition de [5] (en fait notre W est le complété du W de ROBBA, mais cela ne change pas grand chose). Soit $\mathcal{W}$ le complété de la clôture algébrique du corps des quotients de W, et soit $\mathcal{E}$ le complété de la clôture algébrique de E qui est contenu dans $\mathcal{W}$. Nous posons $\mathfrak{F} = \mathcal{E} \cap W$. $\mathfrak{F}$ est l'ensemble des germes d'éléments algébriques.

LEMME 6.3. - Tout élément de $\mathfrak{F}$ est limite d'une suite d'éléments de W algébriques sur E.

Tout $f \in \mathcal{E}$ est limite d'une suite f_n d'éléments de $\mathcal{W}$ algébriques sur E. Il faut montrer que, si $f \in W$, il en est de même des f_n. Pour cela on recopie la démonstration du lemme 2.5 de [5].

COROLLAIRE 6.4. - $\mathfrak{F}$ est un corps. Si $f \in \mathfrak{F} \cap \mathcal{O}$, $\underset{\sim}{w}(f)$ est un anneau séparable.

Soit $f \in \mathfrak{F}$, il existe $g \in W$, algébrique sur E, tel que $|f - g| < |g|$. Comme g est inversible dans W (car $g^{-1} \in E[g] \subset W$), il en est de même de f.

Soit $f \in \mathfrak{F} \cap \mathcal{O}$. Pour tout ε, il existe $f_\varepsilon \in W$, algébrique sur E, telle que $|f - f_\varepsilon| < \varepsilon$. Si $a \in \underset{\sim}{w}(f)$, il existe $a_\varepsilon \in \underset{\sim}{w}(f_\varepsilon)$ tel que $|a - a_\varepsilon| < \varepsilon$.

En particulier, si $|a| \geq \varepsilon$, $|a| = |a_\varepsilon|$. Comme $\underset{\sim}{w}(f_\varepsilon)$ est séparable, $\underset{\sim}{w}(f)$ n'a qu'un nombre fini de normes supérieures à ε . $\underset{\sim}{w}(f)$ est donc séparable.

Soit B l'ensemble des fonctions analytiques bornées dans $D(0\ ,\ 1^-)$. On a $B = W \cap k[[x]]$. Par ailleurs, tout élément de W est somme d'un élément de B et d'un élément de E (plus précisément d'un élément analytique dans $D(0\ ,\ 1^-)$). Pour les problèmes que nous traitons, la partie intéressante est celle qui est contenue dans B . Nous appellerons <u>éléments algébriques</u> les éléments de $\mathfrak{J} \cap B$.

LEMME 6.5. - <u>Soit</u> A <u>un anneau séparable contenu dans</u> $\mathcal{O}_k$, <u>et</u> F <u>un</u> A-<u>module contenu dans</u> $A[[x]]$. <u>Nous supposons que</u> :

(i) F <u>contient la fermeture intégrale de</u> $\underset{\sim}{w}(x)$ <u>dans</u> $\underset{\sim}{w}[[x]]$;

(ii) <u>Pour tout</u> $f \in F$, <u>il existe</u> $\alpha \in A$ <u>tel que</u> $|\alpha| = |f|$ <u>et tel que</u> $\overline{(f/\alpha)}$ <u>soit algébrique sur</u> $\overline{k}(x)$.

<u>Alors</u> F <u>est contenu dans le complété de la fermeture intégrale de</u> $A(x)$ <u>dans</u> $A[[x]]$.

Soit $f \in F$. Nous construisons par récurrence une suite d'éléments f_n de F tels que $f_0 = f$, $f - f_n$ soient entiers sur $A(x)$, et $|f_{n+1}| < |f_n|$.

Comme $f_n \in F \subset A[[x]]$, il existe $\alpha_n \in A$ tel que $\overline{g} = \overline{(f_n/\alpha_n)} \in \overline{k}[[x]]$ soit algébrique sur $\overline{k}(x)$. Soit $\overline{Q}$ le polynôme unitaire minimal de $\overline{g}$ sur $\overline{k}(x)$, et soit Q le polynôme unitaire à coefficients dans $\underset{\sim}{w}(x)$ qui relève $\overline{Q}$. Comme $\overline{g} \in \overline{k}((x))$, $\overline{g}$ est séparable (proposition 3.1). D'après le lemme d'Hensel, Q a une solution g_0 dans le corps complet $k_0((x))$ telle que $\overline{g_0} = \overline{g}$. Puisque les coefficients de Q appartiennent à $\underset{\sim}{w}(x)$, g_0 a une valuation p-adique positive donc $g_0 \in \underset{\sim}{w}((x))$. Nous posons $g_0 = g_1 + g$ avec $g_1 \in \underset{\sim}{w}(1/x)$ et $g \in \underset{\sim}{w}[[x]]$. On constate que g est un relèvement de $\overline{g}$. Par ailleurs g est, comme g_0 et g_1 , un entier algébrique sur $\underset{\sim}{w}(x)$. D'après la condition (i), g appartient à F .

Posons $f_{n+1} = f_n - \alpha_n g$. Il vient

$$|f_{n+1}| = |f_n - \alpha_n g| < |\alpha_n| = |f_n| \ .$$

Comme $\alpha_n \in A$ et comme $\underset{\sim}{w} \subset A$, $\alpha_n g$ est entier sur $A(x)$. D'après l'hypothèse de récurrence, il en est de même de

$$(f - f_n) + \alpha_n g = f - f_{n+1} \ .$$

La suite $|f_n| = |\alpha_n|$ est une suite strictement décroissante de normes d'éléments de l'anneau séparable A . Elle tend donc vers 0 . $f = \lim(f - f_n)$ est bien limite d'éléments de $A[[x]]$ qui sont entiers sur $A(x)$.

COROLLAIRE 6.6. - <u>L'ensemble des éléments algébriques est le complété de la clôture algébrique de</u> $k(x)$ <u>dans</u> B .

Soit f un élément algébrique. Quitte à multiplier f par une constante, on peut supposer que $f \in \mathcal{O}$. L'anneau $\underset{\sim}{w}(f)$ est séparable d'après le corollaire 6.4. Soit $F = \mathfrak{F} \cap \underset{\sim}{w}(f)[[x]]$. On a clairement $f \in F$. F est un $\underset{\sim}{w}(f)$-module. La condition (i) du lemme 6.5 résulte immédiatement de $\underset{\sim}{w}(x) \subset E$: si $g \in \underset{\sim}{w}[[x]]$ est entier algébrique sur $\underset{\sim}{w}(x)$, alors $g \in W$ et est algébrique sur E. Donc $g \in \mathfrak{F} \cap \underset{\sim}{w}[[x]] \subset F$.

Soit $g \in F \subset \mathfrak{F}$. D'après le lemme 6.3, il existe g_1 algébrique sur E tel que $|g - g_1| < |g|$. Comme g est inversible dans W (corollaire 6.4), il existe un coefficient α de g tel que $|\alpha| = |g|$ (corollaire 2.2). Puisque $g \in \underset{\sim}{w}(f)[[x]]$, $\alpha \in \underset{\sim}{w}(f)$. On trouve que $(\overline{g/\alpha}) = (\overline{g_1/\alpha})$ est algébrique sur $\overline{E} = \overline{k}(x)$, ce qui démontre la condition (ii).

Le lemme 6.5 appliqué à F démontre le corollaire puisque $A(x) \subset k(x)$ et $\underset{\sim}{w}(f)[[x]] \subset B$.

La définition des éléments algébriques, que donne le corollaire 6.6, est celle que nous avons utilisée dans [2]. Elle est équivalente à celle de ROBBA.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BATEMAN (P. T.) and DUQUETTE (A. L.). - The analogue of Pisot Vijayaraghavan numbers in fields of formal power series, Illinois J. of Math., t. 6, 1962, p. 594-606.

[2] CHRISTOL (G.). - Limites uniformes p-adiques de fonctions algébriques, Thèse Université P. et M. Curie, 1977.

[3] CHRISTOL (G.). - Elements algébriques, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 1re année, 1973/74, n° 14, 10 p.

[4] DWORK (B.) and ROBBA (P.). - On ordinary linear p-adic differential equations, Trans. Amer. math. Soc., t. 231, 1977, p. 1-46.

[5] ROBBA (P.). - Nouveau point de vue sur le prolongement algébrique, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 4e année, 1976/77, n° 5, 14 p.

[6] ROBBA (P.). - Prolongement algébrique et équations différentielles, "Proceeding of the conference on p-adic analysis [1978. Nijmegen], p. 172-184. - Nijmegen, Mathematisch Instituut Universiteit, 1978.

[7] ROBBA (P.). - Fonctions analytiques sur les corps valués complets ultramétriques, Astérisque n° 10, 1973, p. 109-218.