BERTIN DIARRA

Ultraproduits ultramétriques de corps valués

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 6 (1978-1979), exp. n° 6, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1978-1979__6__A3_0>

18 décembre 1978

ULTRAPRODUITS ULTRAMÉTRIQUES DE CORPS VALUÉS

par Bertin DIARRA (*)
[univ. Clermont-Ferrand-II]

La notion d'ultraproduits d'espaces vectoriels normés réels ou complexes définie dans [3] par D. DACUNHA-CASTELLE et J.-L. KRIVINE s'applique aussitôt aux espaces normés ultramétriques. Un prolongement immédiat de cette notion conduit à celle d'ultraproduits métriques de corps valués. Nous ne nous intéresserons ici qu'aux corps valués ultramétriques.

1. Définition.

Soit $(K_i)_{i\in I}$ une famille de corps munis d'une valeur absolue ultramétrique. Considérons le sous-anneau $\overline{\prod}_{i\in I} K_i$ de l'anneau produit $\prod_{i\in I} K_i$ formé des éléments $a = (a_i)_{i\in I}$ de $\prod K_i$ tels que $\sup_{i\in I}|a_i| < +\infty$.

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur l'ensemble I des indices. On définit une semi-valeur absolue sur l'anneau $\overline{\prod}_{i\in I} K_i$ en posant, pour tout $a = (a_i)_{i\in I} \in \overline{\prod}_{i\in I} K_i$,

$$|a| = \lim_{\mathcal{U}}|a_i| .$$

Cette semi-valeur absolue est ultramétrique.

Le sous-ensemble $\mathfrak{J}$ de $\overline{\prod}_{i\in I} K_i$, formé des éléments de semi-valeur absolue nulle est un idéal.

On dit que l'anneau quotient $\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathfrak{J}$ muni de la valeur absolue quotient est l'ultraproduit des corps valués K_i ; on le note $\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$.

Si $a = (a_i)_{i\in I} \in \overline{\prod}_{i\in I} K_i$, on note encore par a sa classe dans $\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$. On désigne par $|\ |$ la valeur absolue quotient sur $\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ de la semi-valeur absolue $|\ |$ de $\overline{\prod}_{i\in I} K_i$.

LEMME 1. - *Soit $(K_i)_{i\in I}$ une famille de corps munis d'une valeur absolue ultramétrique.*

L'ultraproduit $\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ des corps K_i est un corps muni d'une valeur absolue ultramétrique.

Il reste à démontrer que $\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ est un corps. Or soit $a = (a_i)_{i\in I} \in \overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ différent de zéro ; autrement dit, $|a| = \lim_{\mathcal{U}}|a_i| \neq 0$. Il existe $J(a) \in \mathcal{U}$ tel

---

(*) Texte reçu le 7 mai 1979.
Bertin DIARRA, Département de Mathématiques pures, Université de Clermont-Ferrand-II, Complexe des Cézeaux, 63170 AUBIÈRE.

que

$$\frac{|a|}{2} < |a_i| < \frac{3}{2}|a| \quad \text{pour tout} \quad i \in J(a) .$$

Donc, pour tout $i \in J(a)$, a_i est non nul, de plus $\frac{2}{3|a|} < |a^{-1}| < \frac{2}{|a|}$.

Considérons $b = (b_i)_{i\in I}$, défini par $b_i = a_i^{-1}$, si $i \in J(a)$ et $b_i = 1$ si $i \notin J(a)$. On a

$$\sup_{i\in I}|b_i| \leqslant \max(\frac{2}{|a|} , 1) ;$$

ainsi $b = (b_i)_{i\in I} \in \overline{\prod}_{i\in I} K_i$. Comme $ab - 1 = (c_i)_{i\in I}$, où $c_i = 0$ si $i \in J(a)$, et $c_i = a_i - 1$ si $i \notin J(a)$, il devient clair que $|ab - 1| = \lim_{\mathfrak{U}}|c_i| = 0$; c'est-à-dire $ab - 1 \in \mathfrak{J}$. On a donc dans $\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathfrak{U}$, $ab = 1$.

On supposera, dans la suite, les ultrafiltres <u>non principaux</u> ; car, si $\mathfrak{U}$ est un ultrafiltre engendré par $j \in I$, on a $\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathfrak{U} = K_j$.

REMARQUE 1. - <u>Il y a une correspondance bijective entre l'ensemble des idéaux maximaux de</u> $\overline{\prod}_{i\in I} K_i$ <u>et l'ensemble des ultrafiltres sur</u> I .

Posons pour tout $a \in \overline{\prod}_{i\in I} K_i$,

$$|a|_\infty = \sup_{i\in I}|a_i| ;$$

alors $|\ |_\infty$ est une quasi-valeur absolue sur $\overline{\prod}_{i\in I} K_i$; c'est-à-dire

$$|a + b|_\infty \leqslant \max(|a|_\infty , |b|_\infty) \quad \text{et} \quad |ab|_\infty \leqslant |a|_\infty |b|_\infty .$$

Désignons par $\|\ \|_\infty$ la quasi-valeur absolue sur $\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathfrak{U}$, obtenue par passage au quotient de $|\ |_\infty$; on a

$$\|a - b\|_\infty = \inf_{b\in\mathfrak{J}}|a - b|_\infty .$$

On peut démontrer directement que $\|\ \|_\infty$ est une valeur absolue ; mais on a le lemme suivant.

LEMME 2. - <u>Soit</u> $a = (a_i)_{i\in I} \in \overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathfrak{U}$. <u>Alors</u>

$$\|a\|_\infty = \inf_{b\in\mathfrak{J}}|a - b|_\infty = \lim_{\mathfrak{U}}|a_i| = |a| .$$

Soient $a = (a_i)_{i\in I} \in \overline{\prod}_{i\in I} K_i$ et $J \in \mathfrak{U}$; posons $a_J = (b_i)_{i\in I}$ où $b_i = a_i$ pour $i \in J$, $b_i = 0$ pour $i \notin J$, et $a'_J = (c_i)_{i\in I}$ où $c_i = 0$ pour $i \in J$, $c_i = a_i$ pour $i \notin J$; alors

$$a = a_J + a'_J \quad \text{avec} \quad a' \in J .$$

Ainsi

$$\|a\|_\infty = \inf_{b\in\mathfrak{J}}|a - b|_\infty \leqslant |a - a'_J|_\infty = |a_J|_\infty = \sup_{i\in J}|a_i| .$$

pour tout $J \in \mathfrak{U}$. Il vient que

$$\|a\|_\infty \leqslant \inf_{J\in\mathfrak{U}} \sup_{i\in J}|a_i| = \lim_{\mathfrak{U}}|a_i| = |a| .$$

D'autre part, il est clair que $|a| \leqslant \|a\|_\infty$. D'où $\|a\|_\infty = \lim_{\mathcal{U}} |a_i| = |a|$.

COROLLAIRE 1.

(i) L'ultraproduit $\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ d'une famille $(K_i)_{i\in I}$ de corps valués complets est un corps valué complet.

(ii) Si l'on désigne par $\hat{K}$ le complété d'un corps valué K ; on a

$$(\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U})^n = \overline{\prod}_{i\in I} \hat{K}_i/\mathcal{U} .$$

COROLLAIRE 2. - L'ultraproduit $\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ d'une famille $(K_i)_{i\in I}$ de corps valués sphériquement complets est un corps sphériquement complet.

La proposition suivante, analogue au lemme 9 de [1], beaucoup plus précise que le corollaire 2, est à rapprocher de la proposition 2.5 de [5]. Comme nous l'a suggéré oralement L. HADDAD, la démonstration que nous en avions donnée en supposant l'ensemble I des indices, dénombrable, se transpose dans le cas un peu plus général donné ci-dessous.

Rappel. - Un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur un ensemble I est dit ω-incomplet s'il existe une suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$, $X_n \in \mathcal{U}$, $X_{n+1} \subseteq X_n$ pour tout $n \geqslant 0$, telle que $\bigcap_{n\geqslant 0} X_n = \emptyset$.

Alors $I = \bigcup_{n\geqslant 0} Y_n$, où $Y_n = I \setminus X_n$, $Y_n \subseteq Y_{n+1}$; posons $I_0 = Y_0$ et $I_n = Y_n \setminus Y_{n-1}$ si $n \geqslant 1$; on a une partition de I, $I = \bigcup_{n\geqslant 0} I_n$, d'où une application g de I sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g^{-1}(n) = I_n \quad \text{et} \quad I_n \notin \mathcal{U} .$$

Tout ultrafiltre non principal sur un ensemble dénombrable est ω-incomplet. Il existe sur tout ensemble infini I des ultrafiltres ω-incomplets (cf. par exemple [2]).

PROPOSITION 1. - Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre ω-incomplet sur l'ensemble I. L'ultraproduit $\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ d'une famille $(K_i)_{i\in I}$ de corps valués ultramétriques est sphériquement complet. En particulier $\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ est complet.

Considérons une suite décroissante $(B(a^n, r_n))_{n\geqslant 0}$ de boules ouvertes de $\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$. On a $|a^n - a^{n+1}| < r_n$; d'où $|a^n - a^m| < r_n$, $\forall m > n$. Puisque $|a^n - a^m| = \inf_{b\in\mathfrak{J}} |a^n - a^m - b|_\infty < r_n$, il existe $b_{n,m} \in \mathfrak{J}$ tel que

$$|a^n - a^m - b_{n,m}|_\infty < r_n .$$

On peut donc supposer la suite $(a^n)_{n\geqslant 0}$ de $\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ telle que dans $\overline{\prod}_{i\in I} K_i$, on ait

$$|a^n - a^m|_\infty = \sup_{i\in I} |a_i^n - a_i^m| < r_n , \quad \forall m > n .$$

Considérons, avec les notations du rappel, une application g de I sur $\mathbb{N}$ telle que $I = \bigcup_{n\geqslant 0} I_n$ où $I_n = g^{-1}(n) \notin \mathcal{U}$. On a aussi $I = L_n \cup J_n$ avec

$L_n = \bigcup_{k=0}^{n} I_k \notin \mathcal{U}$, $J_n = \bigcup_{k\geq n+1} I_k \in \mathcal{U}$ et $L_n \cap J_n = \emptyset$.

La suite $(a^n)_{n\geq 0} = (a_i^n)_{n\in \underset{\sim}{N}, i\in I}$ de $\overline{\prod}_{i\in I} K_i$ s'écrit sous la forme

$$(a^n)_{n\geq 0} = (a_i^{g(j)})_{(j,i)\in I\times I} .$$

Posons $a_i = a_i^{g(i)}$, $i \in I$; puisque

$$|a^n|_\infty = \sup_{i\in I}|a_i^n| < \max(|a_0|_\infty , r_0) = \alpha ,$$

on a, pour tout $i \in I$, $|a_i^{g(i)}| < \alpha$; donc $a = (a_i)_{i\in I} \in \overline{\prod}_{i\in I} K_i$.

Puisque, pour tout $i \in I$, $|a_i^n - a_i^m| \leq |a^n - a^m|_\infty < r_n$, $\forall$ n > n ,
et puisque, pour tout $i \in J_n = \bigcup_{b\geq n+1} I_k$, il existe $m > n$ tel que $g(i) = m$, on a

$$|a_i^n - a_i^{g(i)}| < r_n , \quad \forall\, i \in J_n .$$

Mais $J_n \in \mathcal{U}$, donc

$$\lim_{\mathcal{U}}|a_i^n - a_i^{g(i)}| = |a^n - a| \leq r_n \quad \text{pour tout } n \in \underset{\sim}{N} .$$

En particulier, $|a^{n+1} - a| \leq r_{n+1} < r_n$; d'où

$$|a^n - a| \leq \max(|a^n - a^{n+1}| , |a^{n+1} - a|) < r_n$$

et

$$a \in \bigcap_{n\geq 0} B(a^n , r_n) \neq \emptyset .$$

2. Remarques diverses.

(i) Soit L un corps valué ultramétrique. Posons $K_i = L$ pour tout $i \in I$; on dit que $\overline{\prod}_{i\in I} L/\mathcal{U}$ est l'ultrapuissance de L ; le corps L s'identifie canoniquement à un sous-corps valué de $\overline{\prod}_{i\in I} L/\mathcal{U}$. L'ultrapuissance de tout corps local L est égale à L .

(ii) L'ultraproduit conserve les homomorphismes isométriques de corps valués. En particulier, si la famille $(K_i)_{i\in I}$ est constituée de sur-corps valués de L , on a les extensions de corps valués $L \subseteq \overline{\prod}_{i\in I} L/\mathcal{U} \subseteq \overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$.

(iii) Posons $K = \overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$; désignons par Λ (resp. Λ_i) et $\mathfrak{M}$ (resp. $\mathfrak{M}_i$) l'anneau de valuation et l'idéal maximal de K (resp. K_i) . Soit $\overline{\prod}_{i\in I} \Lambda_i/\mathcal{U}$ (resp. $\overline{\prod}_{i\in I} \mathfrak{M}_i/\mathcal{U}$) l'image canonique de $\prod_{i\in I} \Lambda_i$ (resp. $\prod_{i\in I} \mathfrak{M}_i$) dans $\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$. On a

$$\mathfrak{M} \subseteq \overline{\prod}_{i\in I} \mathfrak{M}_i/\mathcal{U} \subset \overline{\prod}_{i\in I} \Lambda_i/\mathcal{U} \subseteq \Lambda .$$

La première inclusion et la dernière pouvant être strictes comme le montre l'exemple de l'ultrapuissance d'un corps de valuation dense. Plus simplement, on a le résultat suivant.

Exemple 1. - Soit p un nombre premier ; désignons par v_p la valuation p-adique sur $\underset{\sim}{Q}$. Considérons une suite $(\rho_i)_{i\in \underset{\sim}{N}} \subseteq \,]0 , 1[$ telle que $\lim_{i\to+\infty} \rho_i = 1$

et pour tout $i \in \underset{\sim}{N}$, la valeur absolue sur $\underset{\sim}{Q}$ définie par $|a|_{\rho_i} = \rho_i^{v_p(a)}$. Posons $\underset{\sim}{Q}_{\rho_i} = (\underset{\sim}{Q} , |\ |_{\rho_i})$; soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\underset{\sim}{N}$; alors $K = \overline{\prod}_{i\in \underset{\sim}{N}} \underset{\sim}{Q}_{\rho_i}/\mathcal{U}$ est un corps sphériquement complet de valuation dense. Pour tout $i \in \underset{\sim}{N}$, $\Lambda_i = \underset{\sim}{Z}_{(p)}$ (le localisé de $\underset{\sim}{Z}$ en p) et $\mathfrak{M}_i = p\underset{\sim}{Z}_{(p)}$; de plus $\underset{\sim}{Q} \subset \Lambda$, car si $a \in \underset{\sim}{Q}$, $a \neq 0$, alors $|a| = \lim_{\mathcal{U}} \rho_i^{v_p(a)} = 1$. En particulier, $a_0 = (p)_{i\in \underset{\sim}{N}}$ est tel que $a_0 \notin \mathfrak{M}$, mais $a_0 \in \overline{\prod}_{i\in \underset{\sim}{N}} \mathfrak{M}_i/\mathcal{U}$, donc

$$\mathfrak{M} \neq \overline{\prod}_{i\in \underset{\sim}{N}} \mathfrak{M}_i/\mathcal{U} .$$

On voit que $a_0^{-1} = (\frac{1}{p})_{i\in \underset{\sim}{N}} \notin \overline{\prod}_{i\in \underset{\sim}{N}} \Lambda_i/\mathcal{U}$, mais $a_0^{-1} \in \Lambda$, ainsi

$$\Lambda \neq \overline{\prod}_{i\in \underset{\sim}{N}} \Lambda_i/\mathcal{U} .$$

Le complété de $\underset{\sim}{Q}_{\rho_i}$ étant égal à $\underset{\sim}{Q}_p$, notons $\underset{\sim}{Q}_{p,i}$ le corps $\underset{\sim}{Q}_p$ muni de la valeur absolue qui prolonge $|\ |_{\rho_i}$; alors $K = \overline{\prod}_{i\in \underset{\sim}{N}} \underset{\sim}{Q}_{p,i}/\mathcal{U}$ (corollaire 1, lemme 2), de plus $\underset{\sim}{Q}_p \subset \Lambda$.

(iv) Lorsque la valeur absolue de chaque K_i est triviale, la valeur absolue de $\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ est triviale. On retrouve la notion algébrique d'ultraproduit de corps que l'on écrit $\prod_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ (cf. [6]).

(v) Posons, avec les notations de (iii), $\Gamma = \overline{\prod}_{i\in I} \Lambda_i/\mathcal{U}$ et $\mathfrak{N} = \overline{\prod}_{i\in I} \mathfrak{M}_i/\mathcal{U}$; alors Γ est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{N}$: car si $a \in \Gamma$ et $a \notin \mathfrak{N}$, l'ensemble des $i \in I$ tels que $|a_i| < 1$ n'appartient pas à $\mathcal{U}$, donc

$$\{i \in I \ ; \ |a_i| = |a_i^{-1}| = 1\} \in \mathcal{U} ,$$

il vient que $a^{-1} \in \Gamma$.

Lorsque $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{N}$, le localisé de Γ en $\mathfrak{M}$ est égal à Λ , et $\Lambda/\mathfrak{M}$ est le corps de fractions de $\Gamma/\mathfrak{M}$.

Désignons par k_i le corps résiduel de chaque corps K_i . On a le lemme suivant.

LEMME 3. - <u>Le corps résiduel de l'anneau local</u> $\Gamma = \overline{\prod}_{i\in I} \Lambda_i/\mathcal{U}$ <u>est isomorphe à l'ultraproduit</u> $\prod_{i\in I} k_i/\mathcal{U}$ <u>des corps résiduels</u> k_i .

En effet, l'homomorphisme d'anneaux φ , composé des homomorphismes canoniques $\prod_{i\in I} \Lambda_i \to \prod_{i\in I} k_i \to \prod_{i\in I} k_i/\mathcal{U}$, est surjectif. Si $a = (a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \Lambda_i$ est tel que $\lim_{\mathcal{U}} |a_i| = 0$, il existe $J \in \mathcal{U}$ tel que, pour tout $i \in J$, $|a_i| < 1$; ainsi $\varphi(a) = 0$; d'où, par passage au quotient, un homomorphisme surjectif ψ de $\Gamma = \overline{\prod}_{i\in I} \Lambda_i/\mathcal{U}$ sur $\prod_{i\in I} k_i/\mathcal{U}$ dont le noyau $\ker \psi = \mathfrak{N}$.

(vi) La valeur absolue sur $\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ peut être triviale sans que celles des K_i le soient.

<u>Exemple</u> 2. - Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Considérons pour $p \in \mathcal{P}$ le corps p-adique $\underset{\sim}{Q}_p$ muni de la valeur absolue $|a_p| = p^{-v_p(a_p)}$; ici $\Lambda_p = \underset{\sim}{Z}_p$ et $\mathfrak{M}_p = p\underset{\sim}{Z}_p$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathcal{P}$, non principal ; puisque pour tout $a_p \in p\underset{\sim}{Z}_p$, $|a_p| \leqslant p^{-1}$, on a, pour tout $a = (a_p) \in \prod_{p\in\mathcal{P}} p\underset{\sim}{Z}_p$, $|a| = \lim_{\mathcal{U}} |a_p| = 0$.

Ainsi $\overline{\prod}_{p\in\mathcal{P}} p\underset{\sim}{Z}_p/\mathcal{U} = (0)$; l'idéal maximal de $\overline{\prod}_{p\in\mathcal{P}} \underset{\sim}{Q}_p/\mathcal{U}$ est donc nul et la valeur absolue de $\overline{\prod}_{p\in\mathcal{P}} \underset{\sim}{Q}_p/\mathcal{U}$ est triviale. De plus,

$$\overline{\prod}_{p\in\mathcal{P}} \underset{\sim}{Q}_p/\mathcal{U} = \overline{\prod}_{p\in\mathcal{P}} \underset{\sim}{Z}_p/\mathcal{U} = \overline{\prod}_{p\in\mathcal{P}} \underset{\sim}{Q}/\mathcal{U} = \overline{\prod}_{p\in\mathcal{P}} \underset{\sim}{Z}/\mathcal{U} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \underset{\sim}{F}_p/\mathcal{U} ,$$

où $\underset{\sim}{F}_p = \underset{\sim}{Z}_p/p\underset{\sim}{Z}_p$.

3. Ultraproduits de corps de valuations discrètes.

THÉORÈME 1. - Soit $(K_i)_{i\in I}$ une famille de corps de valuations discrètes v_i telles que $v_i(K_i^*) = \underset{\sim}{Z}$, et soit $(\rho_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels tels que $0 < \rho_i < 1$. Considérons sur chaque corps K_i la valeur absolue définie par $|a_i| = \rho_i^{v_i(a_i)}$.

(i) Si $\lim_{\mathcal{U}} \rho_i = 0$, la valeur absolue de $\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ est triviale.

(ii) Si $\lim_{\mathcal{U}} \rho_i = 1$, le corps $\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ est de valuation dense.

(iii) Si $0 < \lim_{\mathcal{U}} \rho_i = \rho < 1$, alors $\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ est un corps de valuation discrète. On a $\mathfrak{M} = \overline{\prod}_{i\in I} \mathfrak{M}_i/\mathcal{U}$ et $\Lambda = \overline{\prod}_{i\in I} \Lambda_i/\mathcal{U}$.

(i) Si $\lim_{\mathcal{U}} \rho_i = 0$, on voit comme dans l'exemple 2 que la valeur absolue de $\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ est triviale.

(ii) Supposons $\lim_{\mathcal{U}} \rho_i = 1$. Fixons $\rho \in \underset{\sim}{R}_+$, $0 < \rho < 1$; on a, pour tout $i \in I$, $\rho_i = \rho^{\alpha_i}$, où $\alpha_i = (\log \rho_i/\log \rho) > 0$ et $\lim_{\mathcal{U}} \alpha_i = 0$. Désignons par n_i la partie entière de $1/\alpha_i$; on a $1/(1 + n_i) < \alpha_i \leq 1/n_i$ et $\lim_{\mathcal{U}} 1/n_i = 0$. Soit $n \in \underset{\sim}{N}$, $n \geq 1$, pour tout $i \in I$, n_i s'écrit de façon unique $n_i = nq_i(n) + r_i(n)$ avec $0 \leq r_i(n) < n$; de plus,

$$\frac{1}{n} = \lim_{\mathcal{U}} \frac{q_i(n)}{n_i} = \lim_{\mathcal{U}} \frac{q_i(n)}{1 + n_i} = \lim_{\mathcal{U}} \alpha_i\, q_i(n) .$$

Puisque $\lim_{\mathcal{U}} 1/n_i = 0$, il existe $J_n \in \mathcal{U}$ tel que pour tout $i \in J_n$, $n < n_i$; ainsi $q_i(n) \neq 0$ lorsque $i \in J_n$.

Soit $(\Pi_i)_{i\in I}$ une famille d'uniformisantes des corps K_i . Considérons $a^{(n)} = (a_i^{(n)})_{i\in I} \in \overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ avec $a_i^{(n)} = \Pi_i^{q_i(n)}$ si $i \in J_n$, et $a_i^{(n)} = 0$ si $i \notin J_n$. Puisque $|\Pi_i| = \rho_i = \rho^{\alpha_i}$, on a

$$|a^{(n)}| = \lim_{\mathcal{U}} |\Pi_i|^{q_i(n)} = \lim_{\mathcal{U}} \rho^{\alpha_i q_i(n)} = \rho^{1/n} < 1 .$$

Il vient que $a^{(n)} \in \mathfrak{M}$. Il est clair que $\lim_{n\to+\infty} |a^{(n)}| = 1$. Le corps $\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ est donc de valuation dense.

N.-B. - On a, comme dans l'exemple 1,

$$\mathfrak{M} \neq \overline{\prod}_{i\in I} \mathfrak{M}_i/\mathcal{U} \quad \text{et} \quad \Lambda \neq \overline{\prod}_{i\in I} \Lambda_i/\mathcal{U} .$$

(iii) Supposons $0 < \lim_{\mathcal{U}} \rho_i = \rho < 1$. On a, pour tout $i \in I$, $\rho_i = \rho^{\alpha_i}$ avec $\alpha_i = (\log \rho_i/\log \rho) > 0$ et $\lim_{\mathcal{U}} \alpha_i = 1$.

On sait que $\mathfrak{M} \subseteq \overline{\prod}_{i\in I} \mathfrak{M}_i/\mathcal{U} \subset \overline{\prod}_{i\in I} \Lambda_i/\mathcal{U} \subseteq \Lambda$. Si $a = (a_i)_{i\in I} \in \overline{\prod}_{i\in I} \mathfrak{M}_i/\mathcal{U}$, puisque, pour tout $i \in I$, $v_i(a_i) \geq 1$, on a

$$|a_i| = \rho_i^{v_i(a_i)} \leqslant \rho_i \ ;$$

il vient que

$$\lim_{\mathcal{U}}|a_i| \leqslant \lim_{\mathcal{U}} \rho_i = \rho < 1 \quad \text{et} \quad a \in \mathfrak{M} \ ;$$

donc $\mathfrak{M} = \overline{\prod}_{i\in I} \mathfrak{M}_i/\mathcal{U}$.

Soit $a \in \Lambda$; ou bien $|a| < 1$, alors

$$a \in \mathfrak{M} \subset \overline{\prod}_{i\in I} \Lambda_i/\mathcal{U}$$

ou bien $|a| = \lim_{\mathcal{U}}|a_i| = \lim_{\mathcal{U}} \rho^{\alpha_i v_i(a_i)} = 1$, on a alors, dans $\underset{\sim}{R}$,

$$\lim_{\mathcal{U}} \alpha_i \ v_i(a_i) = 0 \ ;$$

comme $\lim_{\mathcal{U}} \alpha_i = 1$, on a $\lim_{\mathcal{U}} v_i(a_i) = 0$; mais $v_i(a_i) \in \underset{\sim}{Z}$ pour tout $i \in I$, donc

$$\{i \in I \ ; \ v_i(a_i) = 0\} \in \mathcal{U} \quad \text{et} \quad (a_i)_{i\in I} \in \overline{\prod}_{i\in I} \Lambda_i/\mathcal{U} .$$

Ainsi $\Lambda \subseteq \overline{\prod}_{i\in I} \Lambda_i/\mathcal{U}$ et $\Lambda = \overline{\prod}_{i\in I} \Lambda_i/\mathcal{U}$.

Soit $(\Pi_i)_{i\in I}$ une famille d'uniformisantes des corps K_i ; alors

$$\Pi = (\Pi_i)_{i\in I} \in \overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$$

est tel que

$$|\Pi| = \lim_{\mathcal{U}}|\Pi_i| = \lim_{\mathcal{U}} \rho_i = \rho < 1 .$$

On voit que $\Pi\Lambda = \mathfrak{M}$; il vient que $\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ est un corps de valuation discrète.

COROLLAIRE 1. - <u>Supposons</u> $\lim_{\mathcal{U}} \rho_i \neq 0$, <u>le corps valué non discret</u> $\overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ <u>est sphériquement complet</u> (<u>donc complet</u>) <u>lorsque l'une des conditions suivantes est satisfaite</u> :

(i) <u>Chaque corps</u> K_i <u>est complet</u>.

(ii) <u>L'ultrafiltre</u> $\mathcal{U}$ <u>est</u> ω-<u>incomplet</u>.

Il suffit d'appliquer, ou bien le corollaire 2 du lemme 2 (un corps de valuation discrète est sphériquement complet si, et seulement s'il est complet), ou bien la proposition 1.

COROLLAIRE 2. - <u>Supposons</u> $0 < \lim_{\mathcal{U}} \rho < 1$.

<u>Le corps résiduel</u> k <u>du corps de valuation discrète</u> $K = \overline{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ <u>est isomorphe à l'ultraproduit</u> $\prod_{i\in I} k_i/\mathcal{U}$ <u>des corps résiduels</u> k_i <u>des corps</u> K_i .

C'est une conséquence immédiate du lemme 3, car $\Lambda = \overline{\prod}_{i\in I} \Lambda_i/\mathcal{U}$ et $\mathfrak{M} = \overline{\prod}_{i\in I} \mathfrak{M}_i/\mathcal{U}$.

Remarque 2. - Le corollaire 2 n'est plus vrai si $\lim_{\mathcal{U}} \rho_i = 1$. En effet, on a vu dans l'exemple 1 que $\mathbb{Q} \subset \Lambda$, tandis que le corps résiduel de $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{(p)}/\mathcal{U}$ est égal à

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{F}_p/\mathcal{U} = \mathbb{F}_p .$$

Ceci montre si besoin était, que la notion, de caractère métrique, d'ultraproduit de corps valués définie ici est différente de celle donnée dans [1].

COROLLAIRE 3. - Supposons $0 < \lim_{\mathcal{U}} \rho_i = \rho < 1$.

Soit σ_i un système de représentants dans Λ_i du corps résiduel k_i de K_i.

(i) L'image canonique $\bar{\prod}_{i\in I} \sigma_i/\mathcal{U}$ de $\prod_{i\in I} \sigma_i$ dans $K = \bar{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$, identique à l'ultraproduit d'ensembles $\prod_{i\in I} \sigma_i/\mathcal{U}$, est un système de représentants dans $\Lambda = \bar{\prod}_{i\in I} \Lambda_i/\mathcal{U}$ du corps résiduel k de K.

(ii) Soit Π_i une uniformisante de K_i. Si $\bar{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ est complet (cf. corollaire 1), alors tout élément a de $\bar{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ s'écrit sous la forme unique $a = \sum_{n=-n_0}^{+\infty} \alpha_n \Pi^n$, où $n_0 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_n \in \bar{\prod}_{i\in I} \sigma_i/\mathcal{U}$ pour $n \geqslant -n_0$ et $\Pi = (\Pi_i)_{i\in I}$.

Exemples 3. - Soit L un corps de valuation discrète complet, et soit $(K_i)_{i\in I}$ une famille d'extensions finies de L de degrés n_i et d'indices de ramification $e_i = [|K_i^*| : |L^*|]$. Considérons sur chaque K_i l'unique valeur absolue qui prolonge celle de L. Alors, ou bien $\lim_{\mathcal{U}} e_i < +\infty$ et $\bar{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ est complet de valuation discrète, ou bien $\lim_{\mathcal{U}} e_i = +\infty$ et $\bar{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ est sphériquement complet de valuation dense.

(a) Si $\lim_{\mathcal{U}} n_i = +\infty$ et si I est dénombrable, on voit que $\bar{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ est une extension transcendante de L (cf. [4]).

(b) Si $\lim_{\mathcal{U}} n_i < +\infty$, si le corps résiduel ℓ de L est infini et si I est dénombrable, alors $\bar{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ est encore une extension transcendante de L. Par contre, si ℓ est fini, $\bar{\prod}_{i\in I} K_i/\mathcal{U}$ est un corps local extension finie de L. On sait (cf. [7]) que si L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, le nombre des extensions de L de degré donné est fini ; tout ultraproduit de tels corps est donc un de ces corps.

4. Ultraproduit ρ-normalisé des corps p-adiques $\mathbb{Q}_p$.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Considérons pour $p \in \mathcal{P}$, le corps p-adique $\mathbb{Q}_p$ et le corps des séries formelles de Laurent $\mathbb{F}_p((X_p))$, où $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Soit $\rho \in \mathbb{R}_+$, $0 < \rho < 1$; on considère sur $\mathbb{Q}_p$ (resp. $\mathbb{F}_p((X_p))$) la valeur absolue ρ-normalisée $|a_p|_\rho = \rho^{v_p(a_p)}$ (resp. $|S_p| = \rho^{w_p(S_p)}$), où v_p (resp. w_p) est la valuation de $\mathbb{Q}_p$ (resp. $\mathbb{F}_p((X_p))$). Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathcal{P}$, non principal ; les corps $\mathbb{K}_p = \bar{\prod}_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Q}_p/\mathcal{U}$ et $\mathbb{S}_p = \bar{\prod}_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{F}_p((X_p))/\mathcal{U}$ sont complets, de valuation discrète, et ont le même corps résiduel $\mathbb{k} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{F}_p/\mathcal{U}$ (corollaires 1 et

2 du théorème 1).

THÉORÈME 2. - Les corps de valuation discrète, complets $\underset{\sim}{K}_p = \bar{\prod}_{p\in\mathcal{P}} \underset{\sim}{Q}_p/\mathcal{U}$ et $\underset{\sim}{S}_p = \bar{\prod}_{p\in\mathcal{P}} \underset{\sim}{F}_p((X_p))/\mathcal{U}$ sont isomorphes. En fait, chacun de ces deux corps est isométriquement isomorphe au corps des séries formelles de Laurent $\underset{\sim}{k}((X))$ muni de la valeur absolue $|S|_\rho = \rho^{w(S)}$, où w est la valuation de $\underset{\sim}{k}((X))$.

(i) Puisque $\underset{\sim}{F}_p$ est un système de représentants dans $\underset{\sim}{F}_p[[X_p]]$ du corps résiduel de $\underset{\sim}{F}_p((X_p))$, on déduit du corollaire 3 du théorème 1 que $\underset{\sim}{k} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \underset{\sim}{F}_p/\mathcal{U}$ est un système de représentants dans $\bar{\prod}_{p\in\mathcal{P}} \underset{\sim}{F}_p[[X_p]]/\mathcal{U}$ du corps résiduel de $\underset{\sim}{S}_p$, et que tout $S = (S_p)_{p\in\mathcal{P}} \in \underset{\sim}{S}_p$ s'écrit de façon unique $S = \sum_{n=-n_0}^{+\infty} \alpha_n X^n$ où $\alpha_n \in \underset{\sim}{k}$ et $X = (X_p)_{p\in\mathcal{P}}$. D'où l'identification de $\underset{\sim}{S}_p$ à $\underset{\sim}{k}((X))$.

(ii) Soit $\Lambda_\rho = \bar{\prod}_{p\in\mathcal{P}} \underset{\sim}{Z}_p/\mathcal{U}$ l'anneau de valuation de $\underset{\sim}{K}_p$. On sait (cf. [1]) que le corps $\underset{\sim}{k} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \underset{\sim}{F}_p/\mathcal{U}$ est de caractéristique zéro. Il existe donc (cf. [8], prop. 6, chap. II) un sous-corps de représentants $C_\rho \subseteq \Lambda_\rho$ isomorphe à $\underset{\sim}{k}$ tel que Λ_ρ est isomorphe à $C_\rho[[X]]$, donc à $\underset{\sim}{k}[[X]]$ (cf. [8], théor. 2, chap. II). Il vient que les corps $\underset{\sim}{K}_\rho$ et $\underset{\sim}{k}((X))$ sont isomorphes.

Remarque 3. - Soit K_p un sur-corps valué complet de $\underset{\sim}{Q}_p$ de valuation discrète, de corps résiduel k_p. Si la valeur absolue de chaque K_p est ρ-normalisée, alors comme ci-dessus, $\bar{\prod}_{p\in\mathcal{P}} K_p/\mathcal{U}$ est isométriquement isomorphe à $(\prod_{p\in\mathcal{P}} k_p/\mathcal{U})((X))$.

Remarque 4. - Le théorème 2 ci-dessus est l'analogue du théorème 4 de [1]. La démonstration du théorème 1 (resp. du théorème 5) de [1] sur les équations diophantiennes se reproduit ici, à quelques modifications près, en s'appuyant sur le théorème 2.

Remarque 5. - Soit $(\rho_p)_{p\in\mathcal{P}} \subset]0\ ,\ 1[$.

(i) Si $\lim_{\mathcal{U}} \rho_p = 0$, alors $\bar{\prod}_{p\in\mathcal{P}} \underset{\sim}{Q}_p/\mathcal{U} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \underset{\sim}{F}_p/\mathcal{U} = \bar{\prod}_{p\in\mathcal{P}} \underset{\sim}{F}_p((X_p))/\mathcal{U}$.

(ii) Si $0 < \lim_{\mathcal{U}} \rho_p < 1$, les corps $\bar{\prod}_{p\in\mathcal{P}} \underset{\sim}{Q}_p/\mathcal{U}$ et $\bar{\prod}_{p\in\mathcal{P}} \underset{\sim}{F}_p((X_p))/\mathcal{U}$ sont isomorphes à $\underset{\sim}{k}((X))$.

(iii) Si $\lim_{\mathcal{U}} \rho_p = 1$, les corps $\bar{\prod}_{p\in\mathcal{P}} \underset{\sim}{Q}_p/\mathcal{U}$ et $\bar{\prod}_{p\in\mathcal{P}} \underset{\sim}{F}_p((X_p))/\mathcal{U}$ sont sphériquement complets, de valuation dense ; leur corps résiduels contiennent chacun $\underset{\sim}{k}$, et sont distincts de $\underset{\sim}{k}$. Ces deux corps ont-ils même corps résiduel ? Auquel cas, ils seraient isomorphes.

Soit K un corps ; on désignera par $\tilde{K}$ la clôture algébrique de K.

La valeur absolue ρ-normalisée de $\underset{\sim}{Q}_p$ s'étend de façon unique en une valeur absolue sur $\tilde{\underset{\sim}{Q}}_p$. Désignons par $\underset{\sim}{C}_p$ le complété de $\tilde{\underset{\sim}{Q}}_p$ ($\underset{\sim}{C}_p$ est indépendant de la ρ-normalisation de la valeur absolue de Q_p). Puisque $\mathcal{P}$ est dénombrable, si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre non principal sur $\mathcal{P}$, l'ultraproduit $\bar{\prod}_{p\in\mathcal{P}} \tilde{\underset{\sim}{Q}}_p/\mathcal{U}$ est sphériquement complet (proposition 1), et est égal à $\bar{\prod}_{p\in\mathcal{P}} \underset{\sim}{C}_p/\mathcal{U}$ (corollaire 1 du lemme 2). On pose $\underset{\sim}{\Gamma}_\rho = \bar{\prod}_{p\in\mathcal{P}} \tilde{\underset{\sim}{Q}}_p/\mathcal{U} = \bar{\prod}_{p\in\mathcal{P}} \underset{\sim}{C}_p/\mathcal{U}$. Le groupe des valeurs $|\underset{\sim}{\Gamma}_\rho^*|$ de $\underset{\sim}{\Gamma}_\rho$ est égal à $\mathbf{R}_+^*$.

On voit que $\mathbf{\Gamma}_p$ ultraproduit de corps algébriquement clos est algébriquement clos ; $\mathbf{\Gamma}_p$ contient une clôture algébrique $\tilde{\mathbf{K}}_p$ de $\mathbf{K}_p = \overline{\prod}_{p\in\mathcal{P}} \mathbf{Q}_p/\mathcal{U} \simeq \mathbf{k}((X))$, où $\mathbf{k} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbf{F}_p/\mathcal{U}$ et aussi le complété $\tilde{\mathbf{K}}_p^\wedge$ de $\mathbf{K}_p$. On a

$$|\tilde{\mathbf{K}}_p^*| = |\tilde{\mathbf{K}}^{\wedge *}| = \rho^{\mathbf{Q}} .$$

Puisque $|\mathbf{\Gamma}_p^*| = \mathbf{R}_+^*$, le corps $\mathbf{\Gamma}_p$ n'est pas une extension immédiate de $\tilde{\mathbf{K}}_p$ (resp. $\tilde{\mathbf{K}}_p^\wedge$) .

Le corps résiduel de $\tilde{\mathbf{K}}_p$, donc aussi de $\tilde{\mathbf{K}}_p^\wedge$, (resp. $\tilde{\mathbf{Q}}_p$) est $\tilde{\mathbf{k}}$ (resp. $\tilde{\mathbf{F}}_p$) . Soient A_p l'anneau des entiers de $\mathbf{C}_p$, et M_p son idéal maximal ; puisque A_p est hensélien, on voit que l'anneau local $\prod_{p\in\mathcal{P}} A_p/\mathcal{U}$ d'idéal maximal $\prod_{p\in\mathcal{P}} M_p/\mathcal{U}$ est hensélien et contient donc un sous-corps de représentants isomorphe à son corps résiduel $\overline{\prod}_{p\in\mathcal{P}} \tilde{\mathbf{F}}_p/\mathcal{U}$. On voit de la même manière que l'anneau des entiers de $\mathbf{\Gamma}_p$ contient un sous-corps de représentants isomorphes au corps résiduel $\mathcal{R}_\rho$ de $\mathbf{\Gamma}_p$. On a les inclusions $\tilde{\mathbf{k}} \subset \prod_{p\in\mathcal{P}} \tilde{\mathbf{F}}_p/\mathcal{U} \subset \mathcal{R}_\rho$; ces inclusions étant strictes. Le corps $\mathbf{\Gamma}_p$ est donc, à tout point de vue, beaucoup plus "grand" que $\tilde{\mathbf{K}}_p^\wedge$. Tenant compte du fait que $\tilde{\mathbf{K}}_p^\wedge = \bigcup_{n\geq 1} \tilde{\mathbf{k}}^\wedge((X^{1/n}))$, on peut énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 2.

(i) *Le complété* $\tilde{\mathbf{K}}_p^\wedge$ *de la clôture algébrique* $\tilde{\mathbf{K}}_p$ *de* $\mathbf{K}_p$, *sous-corps de* $\mathbf{\Gamma}_p$ *est isométriquement isomorphe au corps* $\tilde{\mathbf{k}}((X))_{\mathbf{Q}}$ *des séries formelles* $\sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j X^{q_j}$ *à coefficients* α_j *dans* $\tilde{\mathbf{k}}$ *et à exposants rationnels* q_j *finis ou formant une suite strictement croissante dans* $\mathbf{Q}$.

(ii) *Il existe dans* $\mathbf{\Gamma}_p$ *une complétion sphérique de* $\tilde{\mathbf{K}}_p^\wedge$, *isomorphe au corps* $S(\tilde{\mathbf{k}}, \mathbf{Q})$ *des séries formelles à coefficients dans* $\tilde{\mathbf{k}}$ *et à exposants rationnels.*

Remarque 6. - On voit facilement que si l'on pose pour tout $n \geq 2$,

$$\mathbf{k}_n = \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbf{F}_{p^n}/\mathcal{U} ,$$

alors $\mathbf{k}_n$ est une extension cyclique de $\mathbf{k}$ de degré n ; de plus $\tilde{\mathbf{k}} = \bigcup_{n\geq 1} \mathbf{k}_n$. On en déduit que le corps $\mathbf{k}$ est quasi fini (cf. [8], chap. XIII, § 2). On peut donc associer au corps de valuation discrète $\mathbf{K}_p = \overline{\prod}_{p\in\mathcal{P}} \mathbf{Q}_p/\mathcal{U}$ une formation de classes (cf. [8], chap. XIII, § 4).

RÉFÉRENCES

[1] AX (J.) and KOCHEN (S.). - Diophantine problems over local fields, I, Amer. J. of Math., t. 87, 1965, p. 605-630.

[2] BELL (J. L.) and SLOMSON (A. B.). - Models and ultraproducts. - Amsterdam, London, North-Holland, 1969.

[3] DACUNHA-CASTELLE (D.) et KRIVINE (J.-L.). - Applications des ultraproduits à l'étude des espaces et des algèbres de Banach, Studia Math, t. 41, 1972, p. 315-334.

[4] DIARRA (B.). - Ultraproduits de corps munis d'une valeur absolue ultramétrique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 284, 1977, p. 1261-1263.

[5] GRUSON (L.) and PUT (M. van der). - Banach spaces, Table ronde d'Analyse non archimédienne [1972. Paris], Bull. Soc. math. France, Mémoire 39-40, 1974, p. 56-100.

[6] KOCHEN (S.). - Ultraproducts in the theory of models, Annals of Math., t. 74, 1961, p. 221-261.

[7] KRASNER (M.). - Nombre des extensions d'un degré donné d'un corps p-adique, "Colloques internationaux C. N. R. S. n° 143 : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres" [1964. Clermont-Ferrand], p. 143-169. Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1966.

[8] SERRE (J.-P.). - Corps locaux. A. S. I. 1296. - Paris, Hermann, 1968 (Act. scient. et ind., 1296 ; Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, 8).