Groupe de travail d'analyse ultramétrique

Philippe Robba

Lemmes de Hensel pour les opérateurs différentiels, II

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 6 (1978-1979), exp. nº 23, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1978-1979__6__A16_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
6e année, 1978/79, nº 23, 8 p.
11 juin 1979

LEMMES DE HENSEL POUR LES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS, II

par Philippe ROBBA (*)
[Univ. Paris-Sud, Orsay]

Etant donné un système différentiel $dY/dx = MY$, avec M méromorphe en 0, la théorie classique (cf. par exemple WASOW [11]) donne une base de ses "solutions formelles" de la forme $\exp(P(t^{-1}) + C \log t)\ \Phi(t)$, avec $t^q = x$ pour un entier q convenable, P une matrice diagonale à coefficients polynomiaux, C une matrice constante, et Φ une matrice appartenant à $Gl_n(C[[t]])$.

Il est bien connu que l'étude d'une équation différentielle linéaire d'ordre n se ramène à l'étude d'un système du premier ordre (et réciproquement, l'étude d'un système se ramène à l'étude d'une seule équation grâce au lemme du vecteur cyclique ([3], lemme 1.3).

WASOW, à la suite de différents auteurs, notamment TURRITTIN [10] (voir aussi KATZ [5]), traite le cas des systèmes différentiels. Récemment, MALGRANGE [8] a proposé une méthode de réduction différente s'appliquant à une équation différentielle. Il obtient une factorisation de l'opérateur différentiel considéré associée à la décomposition de son polygone de Newton. Ces résultats sont tout à fait comparables aux lemmes de Hensel de factorisation de polynômes à coefficients dans des corps ultramétriques (cas commutatif), voir par exemple [1] pour de tels énoncés. Des résultats analogues avaient également été obtenus par DWORK et moi-même dans le cas d'opérateurs différentiels ([4], [9]).

Je reprends dans cet exposé tous ces résultats sous leur forme la plus générale possible et j'introduis les notions qui me paraissent les plus pertinentes. En particulier, je soulignerai le parallèlisme entre le cas commutatif et le cas non commutatif.

Dans le paragraphe 1, on introduit la fonction de valuation d'un opérateur différentiel, et on énonce ses principales propriétés. On verra en particulier que, jusqu'à un certain point, du point de vue de la fonction de valuation tout se passe comme si la dérivation commutait avec la multiplication.

Dans le paragraphe 2, nous énonçons les différents lemmes de factorisations. Ils sont de deux types : une propriété de factorisation associée aux changements de pentes de la fonction de valuation (théorème 2.2 et corollaire 2.3) et un relèvement de factorisation dans le corps résiduel (théorèmes 2.4 et 2.5).

Dans le paragraphe 3, nous montrons comment ces lemmes de factorisation permettent

---

(*) Texte reçu le 7 juillet 1979.
Philippe ROBBA, 138 rue Nationale, 75013 PARIS.

d'obtenir la réduction classique d'une équation différentielle ayant un point singulier irrégulier.

1. Fonction de valuation d'un polynôme différentiel.

1.1. Soit K un corps valué ultramétrique complet muni d'une dérivation ∂ . On note v la valuation de K , et $\alpha(\partial)$ (ou α si aucune confusion n'est à craindre) le nombre

$$\alpha(\partial) = \inf_{a \in K, a \neq 0} v(\partial(a)) - v(a) .$$

On suppose que $\alpha(\partial) > -\infty$, ce qui signifie que la dérivation est continue. La dérivation est triviale si, et seulement si, $\alpha(\partial) = +\infty$.

On note D_K (ou D si aucune confusion n'est à craindre) l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans K , i. e. l'ensemble des sommes finies $P = \sum a_i \partial^i$ $(a_i \in K)$ muni de l'addition évidente et de la multiplication définie par $\partial^i \partial^j = \partial^{i+j}$, $\partial a = a\partial + \partial(a)$.

A $P(x) \in K[x]$, on associe de façon canonique $P(\partial) \in D_K$. Pour éviter toute confusion nous noterons toujours $P(x)$ les polynômes, et P ou $P(\partial)$ les opérateurs différentiels.

Comme nous désirons comparer les propriétés des opérateurs différentiels avec les propriétés des polynômes (cas commutatif) nous utiliserons le symbole $\hat{}$ pour indiquer que les opérations sont effectuées comme si la dérivation commutait avec la multiplication. Ainsi, si

$$P(X) = \sum a_i X^i \quad \text{et} \quad Q(X) = \sum b_j X^j , \quad \xi \in K , \text{ on aura}$$

$$\widehat{PQ}(\partial) = \sum_{i,j} a_i b_j \partial^{i+j}$$

$$\hat{P}(\xi\partial) = \sum a_i \xi^i \partial^i \quad \text{tandis que} \quad P(\xi\partial) = \sum a_i (\xi\partial)^i$$

$$\hat{P}(\partial + \xi) = R(\partial) \quad \text{avec} \quad R(X) = P(X + \xi) , \text{ tandis que } P(\partial + \xi) = \sum a_i (\partial + \xi)^i .$$

1.2. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $P = \sum a_i \partial^i \in D_K$, on pose

$$v(P , t) = \inf_i v(a_i) + it .$$

On note $N(P , t)$ (resp. $n(P , t)$) le plus grand (resp. le plus petit) entier i tel que $v(a_i) + it = v(P , t)$.

On dit que t est une valeur exceptionnelle (pour P) si $N(P , t) \neq n(P , t)$.

Rappelons que $N(P , t)$ (resp. $n(P , t)$) représente le nombre de zéros (dans la clôture algébrique de K) du polynôme $P(X)$ situés dans le disque

$$B(0 , t^+) = \{x \in K ; \ v(x) \geqslant t\}$$

(resp. dans le disque $B(0 , t^-) = \{x \in K ; \ v(x) > t\}$) , et donc t est valeur exceptionnelle si, et seulement si, $P(X)$ possède une racine de valuation t .

Nous allons indiquer les principales propriétés de la fonction de valuation.

1.3. Addition : Soient P et $Q \in D_K$ on a, pour tout t,

$$v(P + Q , t) \geqslant \inf(v(P , t) , v(Q , t)) .$$

On a égalité si $v(P , t) \neq v(Q , t)$ ou si $N(P , t) \neq N(Q , t)$ ou si $n(P , t) \neq n(Q , t)$.

1.4. Multiplication, commutation, adjonction.

1.4.1. Soient $P(X)$ et $Q(X) \in K[X]$. On a, pour $t \leqslant \alpha$,

$$v(P(\partial)\, Q(\partial) - \widehat{PQ}(\partial) , t) \geqslant v(\widehat{PQ}(\partial) , t) + \alpha - t .$$

1.4.2. Soient $P , Q \in D_K$. Pour $t \leqslant \alpha$, on a

$$v(PQ , t) = v(QP , t) = v(P , t) + v(Q , t)$$

$$N(PQ , t) = N(P , t) + N(Q , t) .$$

Pour $t < \alpha$, on a

$$n(PQ , t) = n(P , t) + n(Q , t) .$$

1.4.3. Soit $P = \sum a_i \partial^i \in D_K$. Soit $P^* = \sum(-1)^i \partial^i a_i$ son adjoint. On a pour $t \leqslant \alpha$

$$v(P^* , t) = v(P , t) .$$

1.5. Homothétie : Soit $P(X) \in K[X]$. Soit $\xi \in K$. On a, pour $t \leqslant \alpha$,

$$v(\hat{P}(\xi\partial) - P(\xi\partial) , t) > v(\hat{P}(\xi\partial) , t) + \alpha - t ,$$

et donc

$$v(P(\xi\partial) , t) = v(P(\partial) , t + v(\xi)) .$$

1.6. Translation : Soit $P(X) \in K[X]$. Soit $\eta \in K$. On a, pour $t \leqslant \inf(\alpha, v(\eta))$,

$$v(\hat{P}(\partial + \eta) - P(\partial + \eta) , t) \geqslant v(\hat{P}(\partial + \eta) , t) + \alpha - t ,$$

et donc

$$v(P(\partial + \eta) , t) = v(P(\partial) , t) .$$

Si $v(\eta) < \alpha$, on a également

$$n(P(\partial + \eta) , t) = n(\hat{P}(\partial + \eta) , t) .$$

1.7. Remarque importante.

Il résulte clairement des propriétés 1.4, 1.5 et 1.6 que les fonctions $v(P , t)$ et $N(P , t)$ (resp. $n(P , t)$) ne se comportent bien que pour $t \leqslant \alpha$ (resp. $t<\alpha$) et donc nous considèrerons qu'elles ne sont définies que dans ce cas.

On observera que si l'on écrit $P = \sum a_i \partial^i b_i$, avec $a_i , b_i \in K$, on a, pour

$t \leqslant \alpha$,

$$v(P , t) = \inf_i (v(a_i) + v(b_i) + it) .$$

2. Lemmes de Hensel.

2.1. Opérateur t-dominant, t-extrémal, fuchsien.

Soit $P \in D_K$, $P \neq 0$. On dit que P est t-dominant $(t \leqslant \alpha)$ si

$$N(P , t) = \deg P .$$

On dit que P est t-extrémal $(t < \alpha)$ si $N(P , t) = \deg P$, et $n(P,t) = 0$.

Rappelons que, dans le cas commutatif, $P(X) \in K[X]$ est t-dominant si, et seulement si, tous ses zéros sont de valuation $\geqslant t$, et est t-extrémal si tous ses zéros sont de valuation t .

Considérons le cas particulier $K = k((x))$ muni de la valuation x-adique et de la dérivation $\partial = d/dx$. On a alors $\alpha(\partial) = -1$. On voit que, dans ce cas, la condition $P \in D_K$ est α-dominant équivaut à dire que P vérifie la condition de Fuchs. Aussi les opérateurs α-dominants seront aussi appelés fuchsiens.

2.2. THÉORÈME. - Soit $A \in D_K$. Soit $t \leqslant \alpha$.

1° Il existe Q , $P \in D_K$ avec P t-dominant, $\deg P = N(A , t)$, tel que $A = QP$.

2° (Unicité) si l'on a une autre décomposition $A = Q_1 P_1$, vérifiant les mêmes conditions, il existe $a \neq 0$ de K tel que $Q_1 = Qa^{-1}$ et $P_1 = aP$.

3° Il existe Q' , $P' \in D_K$ avec P' t-dominant, $\deg P' = N(A , t)$, tels que $A = P' Q'$.

4° On a $D/DP \simeq D/DP'$, $D/DQ \simeq D/DQ'$, $D/DA \simeq D/DP \oplus D/DQ$.

1° et 2° se démontrent comme le lemme de Hensel dans le cas commutatif (cf. par exemple [5]).

Comme la multiplication n'est pas commutative, on peut effectuer les divisions à droite ou à gauche, d'où l'énoncé 3° analogue à 1°.

Enfin, le 4° (dû à MALGRANGE [8]) résulte essentiellement du fait que les factorisations peuvent s'effectuer à droite et à gauche lié avec une propriété d'unicité.

2.3. COROLLAIRE. - Soit $A \in D_K$. Soit $t < \alpha$.

1° Il existe Q , $P \in D_K$, avec P t-extrémal et $\deg P = N(A , t) - n(A , t)$ tels que $A = QP$.

2° On a également une factorisation $A = P' Q'$ où P' vérifie les mêmes conditions que P .

3° <u>On a</u> $D/DP \simeq D/DP'$, $D/DQ \simeq D/DQ'$, $D/DA \simeq D/DP \oplus D/DQ$.

2.4. Notons $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation de K . Supposons que $\alpha(\partial) > 0$. Alors la dérivation envoie $\mathcal{O}$ dans son idéal maximal et, par passage au quotient, induit la dérivation triviale sur le corps résiduel k de K .

THÉORÈME. - <u>Soit</u> $\alpha > 0$. <u>Soit</u> $A \in \mathcal{O}[X]$ <u>de degré</u> $m + n$. <u>Supposons que son image</u> $\bar{A}$ <u>dans</u> $k[X]$ <u>se factorise sous la forme</u>

$$\bar{A} = Q^* P^* ,$$

<u>où</u> P^* <u>est unitaire de degré</u> n , Q^* <u>et</u> P^* <u>étant premiers entre eux.</u>

1° <u>Il existe un relèvement unique</u> Q , P <u>de</u> Q^* , P^* <u>avec</u> $\deg Q = m$, $\deg P = n$, P <u>unitaire, tel que</u>

$$A(\partial) = Q(\partial)\, P(\partial) .$$

2° <u>Il existe également un relèvement</u> Q' , P' <u>vérifiant les mêmes hypothèses que</u> P <u>et</u> Q <u>tel que</u>

$$A(\partial) = P'(\partial)\, Q'(\partial) .$$

3° <u>On a</u> $D/DP \simeq D/DP'$, $D/DQ \simeq D/DQ'$, $D/DA \simeq D/DP \oplus D/DQ$.

Pour démontrer 1° et 2° on procède comme dans [4] (§ 6) en considérant l'équation de factorisation comme un système d'équations différentielles non linéaires en les coefficients de P et Q . (La démonstration classique dans le cas commutatif ne se transpose pas au cas non commutatif.)

2.5. Dans le cas où $\alpha(\partial) = 0$, on peut encore définir par réduction une dérivation sur le corps résiduel de K (mais celle-ci n'est plus forcément triviale). On peut encore se poser la question de savoir si la factorisation de l'image de l'opérateur $A \in \mathcal{O}[\partial]$ dans $k[\partial]$ se relève. Mais on n'obtient pas de réponse générale. Un cas particulier a été traité dans [4] (§ 6). Nous allons donner un nouvel exemple.

On prend $K = k((x))$, muni de sa valuation x-adique. Soit $\partial = x(d/dx)$. On a $\alpha(\partial) = 0$. (Mais ici la dérivation sur le corps résiduel est triviale.) Le résultat que nous allons énoncer correspond à un lemme de décomposition classique dans le cas des systèmes différentiels ([7], § 2).

THÉORÈME. - <u>Soit</u> $K = k((x))$, <u>et soit</u> $\partial = x(d/dx)$. <u>Soit</u> $A \in \mathcal{O}[X]$ <u>de degré</u> $m + n$. <u>Supposons que son image</u> $\bar{A}$ <u>dans</u> $k[X]$ <u>se factorise sous la forme</u>

$$\bar{A} = Q^* P^* ,$$

<u>où</u> P^* <u>est unitaire de degré</u> m .

1° <u>Si</u> $Q^*(X + s)$ <u>est premier à</u> $P^*(X)$ <u>pour tout entier</u> $s > 0$, <u>il existe un relèvement unique</u> Q , P <u>de</u> Q^* , P^* <u>avec</u> $\deg Q = m$, $\deg P = n$, P <u>uni-</u>

taire, tel que

$$A(\partial) = Q(\partial)\, P(\partial) \ .$$

2° Si $P^*(X+s)$ est premier à $Q^*(X)$ pour tout entier $s > 0$, il existe un relèvement unique Q' , P' de Q^* , P^* avec $\deg Q' = m$, $\deg P' = n$, P' unitaire, tel que

$$A(\partial) = P'(\partial)\, Q'(\partial) \ .$$

3° Si $P^*(X+s)$ est premier à $Q^*(X)$ pour tout $s \in \underset{\sim}{Z}$, P , Q , P' et Q' étant les polynômes différentiels définis précédemment, on a

$$D/DP \simeq D/DP' \ , \quad D/DQ \simeq D/DQ' \ , \quad D/DA \simeq D/P \oplus D/DQ \ .$$

3. Application aux points singuliers irréguliers.

Dans ce paragraphe, on suppose que la valuation de K est discrète, et que le corps résiduel est de caractéristique 0 .

L'exemple le plus important est celui où $K = k((x))$ muni de sa valuation x-adique avec k de caractéristique 0 .

Ce n'est pas le seul exemple mais nous ne savons pas si les autres exemples ont un intérêt pratique.

3.1. LEMME. - Soit K valué complet pour une valuation discrète, muni d'une dérivation ∂ continue, ayant un corps résiduel de caractéristique 0 . Soit L une extension algébrique de K . Alors la dérivation s'étend de façon unique à L , et l'on a

$$\alpha_L(\partial) = \alpha_K(\partial) \ .$$

Rappelons que la valuation de K s'étend aussi de façon unique à L car K est complet.

Il est bien connu que la dérivation s'étend de façon unique à L car K est de caractéristique 0 . La seule chose à montrer est donc que la norme d'opérateur de ∂ n'est pas changée. Ce résultat n'est vrai que si la caractéristique de k est nulle. Par contre, l'hypothèse que la valuation de K est discrète semble inutile.

L'intérêt de ce lemme est de montrer que si $P \in D_K$ est fuchsien en tant qu'élément de D_L , il est aussi fuchsien en tant qu'élément de D_K .

3.2. THÉORÈME. - On suppose que la valuation de K est discrète, et le corps résiduel de K est de caractéristique 0 . Soit $P \in D_K$, $P \neq 0$. Il existe une extension finie L de K , des $\eta_i \in L$ et des $P_i \in D_L$ fuchsiens $(1 \leqslant i \leqslant q)$ tels que l'on ait

1° $P(\partial) = P_1(\partial - \eta_1) \ldots P_q(\partial - \eta_n)$

2° $D_L/D_L\, P(\partial) \simeq \oplus_i\, D_L/D_L\, P_i(\partial - \eta_i)$.

Démonstration. - Notons $t_0 = \alpha$ et t_i , $i = 1 \dots$, les valeurs exceptionnelles, associées à P , $< \alpha$. Soit x une uniformisante de K . On appelle rang de Poincaré-Katz

$$r(P) = (\alpha - \inf_{i\geq 0} t_i)/v(x) .$$

Nous allons démontrer le théorème par une double récurrence sur $(\deg P , r(P))$ ordonnés par l'ordre lexicographique ; la récurrence commence soit à $\deg P = 1$ où le résultat est évident, soit à $r(P) = 0$ où il est aussi évident puisque cela signifie que P est fuchsien. (La récurrence ne porte sur $r(P)$ que pour les valeurs entières de $r(P)$.)

D'après le théorème 2.2 et le corollaire 2.3 on peut se ramener au cas où P est t_1-extrémal avec $t_1 < \alpha$ (et alors $r(P) = (\alpha - t_1)/v(x)$) . Deux cas peuvent se présenter.

Cas 1. t_1 n'appartient pas au groupe de valuation de K . (c'est-à-dire $r(P)$ n'est pas entier.) Soit L l'extension de K déterminée par le polynôme $P(X)$, et soit $\eta \in L$ une racine de $P(X)$. On a $t_1 = v(\eta) = \sup_{z\in K} v(\eta - z)$. Comme le corps résiduel de K est de caractéristique nulle, d'après AX [2], il existe un conjugué η' de η sur K avec $v(\eta' - \eta) = t_1$. Soit $R(X) = P(X + \eta)$. Le polynôme R s'annulant en 0 , on a $n(R , t_1) > 0$; comme $\eta' - \eta$ est racine de R et $v(\eta - \eta') = t_1$, on a $N(R , t_1) - n(R , t_1) > 0$. Il résulte alors de la proposition 1.6 que l'on a

$$n(P(\partial + \eta) , t_1) = n(R , t_1) > 0$$

et

$$N(P(\partial + \eta) , t_1) - n(P(\partial + \eta) , t_1) = N(R , t_1) - n(R , t_1) > 0 ;$$

le corollaire 2.3 nous permet alors d'abaisser le degré de P .

Cas 2. t_1 appartient au groupe de valuation de K (c'est-à-dire $r(P)$ est entier). Soit L_1 l'extension de K déterminée par le polynôme $P(X)$ et soit L l'extension maximale non ramifiée de K dans L_1 . Si ξ est une racine de $P(X)$ (appartenant à L_1) il existe $\eta \in L$ tel que $v(\xi - \eta) > v(\xi) = v(\eta) = t_1$. Posons $R(X) = P(X + \eta)$. On a alors $n(R , t_1) > 0$ et, d'après la proposition 1.6, $n(P(\partial + \eta) , t_1) > 0$. Si $n(P(\partial + \eta) , t_1) < N((P(\partial + \eta) , t_1)$ on peut abaisser le degré de P grâce au corollaire 2.3. Si $n(P(\partial+\eta),t_1) = N(P(\partial+\eta),t_1)$ alors t_1 n'est pas exceptionnel pour $P(\partial + \eta)$ et l'on a $r(P(\partial+\eta))<r(P(\partial))$. L'hypothèse de récurrence nous permet alors de conclure.

RÉFÉRENCES

[1] AMICE (Y.). - Les nombres p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1975 (Collection SUP, "Le Mathématicien", 14).

[2] AX (J.). - Zeros of polynomials over local fields. The Galois action, J. of Algebra, t. 15, 1970, p. 417-428.

[3] DELIGNE (P.). - Equations différentielles à points singuliers réguliers. - - Berlin, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 163).

[4] DWORK (B.) and ROBBA (P.). - On ordinary linear p-adic differential equations, Trans. Amer. math. Soc., t. 231, 1977, p. 1-46.

[5] KATZ (N.). - Nilpotent connections and the monodromy theorem. - Bures-sur-Yvette. I. H. E. S., 1970 (Institut des Hautes Etudes scientifiques. Publications mathématiques, 39, p. 176-232).

[6] LAZARD (M.). - Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet. - Bures sur Yvette, I. H. E. S., 1962 (Institut des Hautes Etudes scientifiques. Publications mathématiques, 14, p. 47-75).

[7] LEVELT (A.). - Jordan decomposition for a class of singular differential operators, Arkiv för Matematik, t. 13, 1975, p. 1-27.

[8] MALGRANGE (B.). - Sur la réduction formelle des équations différentielles à singularités irrégulières (preprint).

[9] ROBBA (P.). - Lemme de Hensel pour les opérateurs différentiels, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, 2e année, 1974/75, n° 16, 11 p.

[10] TURRITTIN (H.). - Convergent solutions of ordinary homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point, Acta Mathematica, t. 93, 1955, p. 27-66.

[11] WASOW (W.). - Asymptotic expansions for ordinary differential equations. - New York, Interscience publishing Company, 1965 (Pure and applied Mathematics, Interscience, 14).