Alain Escassut

Valeurs absolues des algèbres de Krasner

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 6 (1978-1979), exp. n° 20, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1978-1979__6__A14_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
6e année, 1978/79, n° 20, 5 p.
7 mai 1979

VALEURS ABSOLUES DES ALGÈBRES DE KRASNER

par Alain ESCASSUT (*)
[Univ. Bordeaux-I]

Rappelons que d'après un théorème de GUENNEBAUD, tout idéal maximal d'une K-algèbre de Banach ultramétrique est noyau d'une semi-norme multiplicative continue.

On peut donc se demander si, plus généralement, tout idéal premier fermé serait noyau d'une semi-norme multiplicative continue.

Par passage au quotient par cet idéal premier fermé, cela revient à se demander si toute K-algèbre de Banach intègre possède au moins une valeur absolue continue.

A titre de comparaison, rappelons que dans une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach, les semi-normes multiplicatives continues sont de la forme $|\chi|$, $\chi : A \to \mathbb{C}$, et donc elles ont pour noyau un idéal maximal de codimension 1 . En particulier, elles n'ont jamais de valeur absolue continue, excepté $\mathbb{C}$.

Ici on se propose d'étudier les valeurs absolues continues des algèbres de Krasner $H(D)$ sans idempotent non trivial.

Considérons donc un infraconnexe fermé borné D d'un corps ultramétrique complet algébriquement clos K . On sait que les semi-normes multiplicatives continues de $H(D)$ sont caractérisées par les filtres circulaires de D .

Rappelons brièvement la définition d'un filtre circulaire de D ([7], [2]).

On appelle <u>filtre circulaire</u> de D un filtre $\mathfrak{F}$ de D qui admet un système générateur de la forme $\Phi \cup \hat{\Phi}$ (que l'on nomme <u>système générateur canonique</u>) où Φ est une suite strictement décroissante de disques circonférenciés de D , notée (d_n) (où l'on note $r = \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(d_n)$), et où $\hat{\Phi}$ est la famille des couronnes $\Gamma(a , r_1 , r_2 , D)$ telles que $a \in \bigcap_{d\in\mathfrak{F}} d$ et $r_1 < r < r_2$. Le nombre r est appelé <u>diamètre</u> de $\mathfrak{F}$; on note $\Delta(\mathfrak{F})$ l'ensemble $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} d_n$ et les points de $\Delta(\mathfrak{F})$ sont appelés <u>centres</u> de $\mathfrak{F}$.

THÉORÈME de GARANDEL. - <u>Soit</u> D <u>un infraconnexe fermé borné de</u> K , <u>et soit</u> $\mathfrak{F}$ <u>"un filtre" circulaire de</u> D .

<u>Alors, pour tout</u> $f \in H(D)$, $|f(x)|$ <u>admet une limite suivant</u> $\mathfrak{F}$, <u>et l'application</u> $\varphi_{\mathfrak{F}}$ <u>définie dans</u> $H(D)$ <u>à valeurs dans</u> $\mathbb{R}$, <u>par</u> $\varphi_{\mathfrak{F}}(f) = \lim_{\mathfrak{F}}|f(x)|$ <u>est une</u>

(*) Texte reçu le 22 mai 1980.
Alain ESCASSUT, M-11 G' Rés. Compostelle, 33600 PESSAC.

semi-norme multiplicative continue. Enfin, l'application définie dans l'ensemble des filtres circulaires de D, à valeurs dans $\mathrm{Mult}(H(D), \|.\|_D)$, par $\mathfrak{F} \longrightarrow \varphi_{\mathfrak{F}}$ est une bijection.

Définition. - Soit D un infraconnexe de K.

Nous dirons qu'un filtre circulaire $\mathfrak{F}_2$ encercle un filtre circulaire $\mathfrak{F}_1$, ou encore, que $\mathfrak{F}_1$ est encerclé par $\mathfrak{F}_2$, si $\mathfrak{F}_1$ est sécant à $\Delta(\mathfrak{F}_2)$.

Alors la relation $\prec$ définie sur les filtres circulaires de D par $\mathfrak{F}_1 \prec \mathfrak{F}_2$ si $\mathfrak{F}_2$ encercle $\mathfrak{F}_1$ est, de façon évidente, une relation d'ordre. Nous dirons que deux filtres circulaires $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ de D sont étrangers s'ils ne sont pas comparables pour la relation $\prec$.

LEMME 1. - Soit D un infraconnexe de K, et soient deux filtres circulaires $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ de D. Si $\mathfrak{F}_2$ encercle $\mathfrak{F}_1$ alors on a $\mathrm{diam}(\mathfrak{F}_1) \leq \mathrm{diam}(\mathfrak{F}_2)$ et plus précisément si, de plus, $\mathrm{diam}(\mathfrak{F}_1) = \mathrm{diam}(\mathfrak{F}_2)$, alors on a $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2$.

Réciproquement, si $\Delta(\mathfrak{F}_1) \cap \Delta(\mathfrak{F}_2) \neq \emptyset$, et si $\mathrm{diam}(\mathfrak{F}_1) \leq \mathrm{diam}(\mathfrak{F}_2)$, alors $\mathfrak{F}_2$ encercle $\mathfrak{F}_1$.

1. Filtres monotones, T-filtres et valeurs absolues.

La suite de cette étude nous oblige à rappeler la définition des filtres monotones d'un infraconnexe D de K.

Définitions. - Soit D un infraconnexe de K. On appelle filtre décroissant de D un filtre $\mathfrak{F}$ qui admet pour base une suite de parties de D de la forme $D_n = \Delta_n \setminus (\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \Delta_m)$, où $(\Delta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante de disques de D telle que le nombre $r = \lim_n \mathrm{diam}(\Delta_n)$ soit non nul, et r est appelé diamètre de $\mathfrak{F}$. On note

$$\mathcal{P}(\mathfrak{F}) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \Delta_m \quad \text{et} \quad \mathcal{C}(\mathfrak{F}) = D - \mathcal{P}(\mathfrak{F}) ,$$

et on appelle centre de $\mathfrak{F}$ tout point de $\mathcal{P}(\mathfrak{F})$.

Le filtre circulaire de D engendré par la famille $\Phi \cup \hat{\Phi}$ où $\Phi = (\Delta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est appelé filtre circulaire associé à $\mathfrak{F}$, et on le note $\overline{\mathfrak{F}}$.

Inversement, soit $\mathfrak{G}$ un filtre circulaire engendré par une famille $\Phi \cup \hat{\Phi}$, où Φ est une suite strictement décroissante de disques de D, notée (Δ_n), et $\mathfrak{F}$ le filtre décroissant admettant pour base la suite $D_n = \Delta_n \setminus (\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \Delta_m)$; alors $\mathfrak{F}$ sera appelé filtre décroissant associé à $\mathfrak{G}$.

Remarque 1. - Un filtre décroissant est plus fin que son filtre circulaire associé.

Remarque 2. - Un filtre circulaire $\mathfrak{F}$ de D est égal à son filtre décroissant associé si, et seulement si, $\Delta(\mathfrak{F}) = \emptyset$. Inversement, un filtre décroissant $\mathfrak{F}$ de

D est égal à son filtre circulaire associé si, et seulement si, $\mathcal{P}(\mathcal{F}) = \emptyset$.

Définitions. - On appelle filtre croissant de D un filtre $\mathcal{F}$ qui admet pour base une suite de couronnes de D de la forme $D_n = \Gamma(a , r_n , r , D)$, où r_n est une suite strictement croissante de limite r , et où a est un point de D indépendant de n . Le nombre r est appelé diamètre de $\mathcal{F}$, et tout point x de D tel que $|x - a| < r$ est appelé centre de $\mathcal{F}$. On note $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ l'ensemble des $x \in D$ tels que $|x - a| \geq r$ et $\mathcal{C}(\mathcal{F}) = D \setminus \mathcal{P}(\mathcal{F})$.

Soit $\mathcal{F}$ un filtre croissant de D admettant pour base, une suite $\Gamma(a,r_n,r,D)$. On appellera filtre circulaire associé à $\mathcal{F}$ le filtre circulaire $\overline{\mathcal{F}}$ de D tel que $\Delta(\overline{\mathcal{F}}) = d(a , r , D)$.

Nous dirons que deux filtres croissants $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont contigus si $\overline{\mathcal{F}}_1 = \overline{\mathcal{F}}_2$.

Nous aurons besoin de quelques généralisations de ces notions d'encerclement appliquées au filtre monotone de D .

Définition. - Soit D un infraconnexe de K . Nous dirons qu'un filtre circulaire $\mathcal{F}$ encercle un filtre monotone $\mathcal{G}$ si $\mathcal{F}$ encercle $\mathcal{G}$.

Nous dirons qu'un filtre décroissant $\mathcal{D}$ encercle un filtre circulaire $\mathcal{F}$ (resp. un filtre monotone $\mathcal{G}$) si $\overline{\mathcal{D}}$ encercle $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$) .

Nous dirons, enfin, qu'un filtre croissant $\mathcal{F}$ est étranger à un filtre circulaire $\mathcal{G}$ si $\overline{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{G}$ sont étrangers, et nous dirons que $\mathcal{F}$ est étranger à un filtre croissant $\mathcal{H}$ si $\overline{\mathcal{F}}$ et $\overline{\mathcal{H}}$ sont étrangers.

THÉORÈME 1. - Soit D un infraconnexe fermé borné. Une semi-norme multiplicative continue de $H(D)$ est une valeur absolue si, et seulement si, son filtre circulaire $\mathcal{F}$ ne satisfait aucune des quatre conditions (a), (b), (c), (d) suivantes

(a) $\mathcal{F}$ est de Cauchy.

(b) Il existe un T-filtre croissant étranger à $\mathcal{F}$.

(c) Il existe un T-filtre croissant encerclé par $\mathcal{F}$.

(d) Il existe un T-filtre décroissant qui encercle $\mathcal{F}$.

2. Existence de valeurs absolues continues.

On se propose maintenant de caractériser les ensembles D tels que $H(D)$ soit une algèbre de Banach qui possède au moins une valeur absolue continue.

La description de ces ensembles nécessitera l'utilisation des définitions qui suivent.

Définitions. - Soit D un infraconnexe fermé borné de K .

On appellera suite ascendante (resp. descendante) de filtres monotones de D une suite de filtres monotones $n \to \mathfrak{F}_n$ telle que, pour tout $n \in \underset{\sim}{\mathbb{N}}$, $\overline{\mathfrak{F}}_n$ encercle strictement $\overline{\mathfrak{F}}_{n-1}$ (resp. $\overline{\mathfrak{F}}_{n-1}$ encercle strictement $\overline{\mathfrak{F}}_n$) .

Soit une suite ascendante (resp. descendante) de filtres monotones $n \to \mathfrak{F}_n$; alors le filtre admettant pour base la suite

$$n \to (\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \Delta(\overline{\mathfrak{F}}_m)\setminus\Delta(\overline{\mathfrak{F}}_n)) \; ; \quad (\text{resp. } n \to (\Delta(\overline{\mathfrak{F}}_n)\setminus\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \Delta(\overline{\mathfrak{F}}_m))$$

est un filtre $\mathfrak{F}$ croissant (resp. décroissant ou de Cauchy) qui sera appelé <u>butoir</u> de la suite $(\mathfrak{F}_n)$, et $\overline{\mathfrak{F}}$ sera appelé <u>circulobutoir</u> de la suite $(\mathfrak{F}_n)$.

<u>Remarque</u>. - Soit une suite ascendante (resp. descendante) de filtres croissants (resp. décroissants) $\mathfrak{F}_n$, et soit $\mathfrak{F}$ son butoir. Alors les deux ensembles $\mathcal{P}(\mathfrak{F})$, et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}(\mathfrak{F}_n)$ forment une partition de D, et la suite $\mathcal{P}(\mathfrak{F}_n)$ est strictement croissante.

Nous appellerons <u>suite T-complémentaire</u>, toute suite ascendante (resp. descendante) de T-filtres décroissants (resp. croissants) dont le butoir est un T-filtre, et nous appellerons <u>suite T-Cauchy</u> une suite descendante de T-filtres croissants dont le butoir est un filtre de Cauchy.

Rappelons d'autre part que deux filtres monotones $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ de D sont dits <u>complémentaires</u> si $\mathcal{P}(\mathfrak{F}) \cup \mathcal{P}(\mathfrak{G}) = D$ [4] et qu'une algèbre de Banach $H(D)$ est intègre si, et seulement si, D est un fermé borné infraconnexe sans couple de T-filtres complémentaires ([4], théorème I).

LEMME 2. - <u>Soit D un infraconnexe de K. L'ensemble circulobutoir des suites ascendantes (resp. descendantes) de T-filtres décroissants (resp. croissants) de D est inductif pour la relation d'ordre $\prec$ (resp. $\succ$)</u> .

Nous pouvons maintenant caractériser les algèbres de Krasner sans idempotent non trivial qui admettent des valeurs absolues continues.

THÉORÈME 2. - <u>Soit D un infraconnexe fermé borné. Alors l'algèbre $H(D)$ possède des valeurs absolues continues pour sa norme $\|\cdot\|_D$ si, et seulement si, D est un fermé borné infraconnexe qui n'admet aucun couple de T-filtres complémentaires, ni aucune suite T-complémentaire, ni aucune suite T-Cauchy</u>.

Le théorème 2 peut s'interpréter de la façon suivante. Pour chaque T-filtre $\mathfrak{F}$ de D, soit $\mathfrak{J}(\mathfrak{F})$ l'idéal des $f \in H(D)$ annulés par $\mathfrak{F}$ et tels que $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathcal{P}(\mathfrak{F})$.

Alors l'ensemble des idéaux maximaux de codimension 1 qui contiennent $\mathfrak{J}(\mathfrak{F})$ s'identifie à $\mathcal{P}(\mathfrak{F})$.

Maintenant, pour chaque idéal J de $H(D)$, soit $h(J)$ l'ensemble des idéaux maximaux de $H(D)$ qui contiennent J, et supposons que $H(D)$ soit intègre, mais n'admette pas de valeur absolue continue. Il existe donc ou bien une suite T-complémentaire, ou bien une suite T-Cauchy.

Supposons d'abord qu'il existe une suite T-complémentaire $\mathcal{T}_n$, de butoir $\mathcal{T}$. Alors il est immédiat de voir que la suite $f_n = h\ (\mathfrak{I}(\mathcal{T}_n))_\infty$ est une suite de fermés de Jacobson telle que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \operatorname{Max} H(D) - h(\mathfrak{I}(\mathcal{T})) .$$

De même, s'il existe une suite T-Cauchy $\mathcal{T}_n$ de limite a, alors la suite $F_n = h(\mathfrak{I}(\mathcal{T}_n))$ est une suite croissante de fermés telle que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \operatorname{Max} H(D) - \{\mathfrak{M}_a\} .$$

Ainsi dans les deux cas, on voit que $\operatorname{Max} H(D)$ admet une partition de la forme $\{(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) , F\}$, où F_n est une suite croissante de fermés et F est un fermé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ESCASSUT (Alain). - Algèbres d'éléments analytiques en analyse non archimédienne, Indagationes Mathematicae, t. 36, 1974, p. 339-351.

[2] ESCASSUT (Alain). - Eléments analytiques et filtres parcés sur un ensemble infraconnexe, Annali di Mat. pura ed appl., Bologna, t. 110, 1976, p. 335-352.

[3] ESCASSUT (Alain). - T-filtres, ensembles analytiques et transformation de Fourier p-adique, Ann. Ins. Fourier, Grenoble, t. 25, 1975, p. 75-110.

[4] ESCASSUT (Alain). - Algèbres de Krasner intègres et noethériennes, Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. Proc., series A, t. 79, 1976, p. 109-130.

[5] ESCASSUT (Alain). - Spectre maximal d'une algèbre de Krasner, Colloquium Math., Wroclaw., t. 38, 1978, p. 339-357.

[6] ESCASSUT (Alain). - Algèbres de Banach ultramétriques et algèbres de Krasner-Tate, "Prolongements analytiques et algèbres de Banach ultramétriques", Astérisque, n° 10, 1973, p. 1-107.

[7] GARANDEL (Gérard). - Les semi-normes multiplicatives sur les algèbres d'éléments analytiques au sens de Krasner, Indagationes Mathematicae, t. 37, 1975, p. 327-341.

[8] GUENNEBAUD (Bernard). - Algèbres localement convexes sur les corps valués, Bull. Sc. math., 2e série, t. 91, 1967, p. 75-96.

[9] GUENNEBAUD (Bernard). - Sur une notion de spectre pour les algèbres normées ultramétriques, Thèse Doct. ès Sc., Univ. Poitiers, 1973.