PATRICE PHILIPPON

Cohomologie formelle

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 6 (1978-1979), exp. nº 19, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1978-1979__6__A13_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
6e année, 1978/79, n° 19, 6 p.
23 avril et 14 mai 1979

COHOMOLOGIE FORMELLE

(d'après WASHNITZER-MONSKY)

par Patrice PHILIPPON (*)

[Ecole Polytechnique, Palaiseau]

Résumé. - Le but de cet exposé est de décrire une partie des articles "Formal cohomology", écrits par G. WASHNITZER et P. MONSKY, et dans lesquels ils se proposent d'interpréter de façon cohomologique la démonstration de B. DWORK de la rationalité de la fonction zéta de Weil et d'avancer vers les conjectures de Weil.

1. Introduction.

Soit V une variété projective, non singulière, sur $\underset{\sim}{F}_q = k$ (corps fini à q éléments), et soit $\overline{A} = k[X_1 , \ldots , X_n]/\mathfrak{J}(v)$ l'anneau des coordonnées de V. ($\mathfrak{J}(v)$ est l'idéal de définition de v). Ici, $q = p^\alpha$, où p est un nombre premier fixé.

Posant $k_s = \underset{\sim}{F}_{q^s}$ (corps fini à q^s éléments), et si N_s est le nombre de points k_s-rationnels de v, on a une bijection entre $\operatorname{Hom}(\overline{A}, k_s)$ et $v(k_s)$, ce qui implique que N_s est égal aussi au nombre d'homomorphismes de $\overline{A}$ dans k_s. Dans [7], A. WEIL a introduit la fonction $\zeta_{\overline{A}}(t) = \exp(\sum_{s=1}^{\infty}(N_s/s).t^s)$, et conjecture dans un premier temps que $\zeta_{\overline{A}}$ est une fonction rationnelle.

B. DWORK a démontré cette assertion (cf. B. DWORK [1] and P. MONSKY [4]). Il procède en deux étapes :

1° On démontre la méromorphie de $\zeta_{\overline{A}}(t)$ dans $\underset{\sim}{C}_p$. C'est-à-dire que :

$$\zeta_{\overline{A}}(t) = \sum_{i\geq 0} c_i\ t^i/(1 + \sum_{i\geq 1} d_i\ t^i)$$

où $\sum_{i\geq 0} c_i\ t^i$ et $\sum_{i\geq 1} d_i\ t^i$ convergent pour tout t dans $\underset{\sim}{C}_p$. ($\underset{\sim}{C}_p$ désigne le complété de la clôture algébrique du corps des nombres p-adiques).

2° Application du critère de Borel-Dwork de rationalité d'une série.

La démonstration de la première étape repose sur l'expression de N_s sous forme d'une somme alternée de traces de puissances s-ième de certaines "matrices infinies". On déduit alors, de l'identité algébrique

$$\exp(\sum_{s=1}^{\infty}(\text{trace } M^s/s).t^s) = \det(I - tM) ,$$

(où M est une matrice finie), par passage à la limite, que $\zeta_{\overline{A}}(t)$ est quotient

(*) Texte reçu le 27 juin 1979.

Patrice PHILIPPON, Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, Plateau de Palaiseau, 91128 PALAISEAU CEDEX.

de deux séries entières convergeant sur tout $\underset{\sim}{C}_p$.

D'autre part on montre facilement que, $\zeta_{\overline{A}}(t) \in \underset{\sim}{Z}[[t]]$, et on peut donc appliquer le critère de Borel-Dwork qui nous donne le résultat.

C'est cette expression de N_s comme somme alternée de traces de puissances de "matrices infinies" qu'il faut voir comme un résultat cohomologique, à savoir un théorème de points fixes de Lefschetz.

Avant d'aller plus loin signalons que les conjectures de Weil, dont nous parlons ici, ont suscité beaucoup d'intérêt, et l'on pourra trouver dans B. Mazur [3] un exposé historique des travaux qui leur ont été consacré.

2. Complexe différentiel formel et cohomologie.

Nous allons construire une cohomologie formelle du type de De Rham, et pour cela il nous faut définir un complexe de formes différentielles formelles.

Mais en caractéristique p , du fait que des formes différentielles du type $X^{p-1}\,dX$ ne peuvent être intégrées, les espaces de cohomologie construits seraient de dimensions infinies, et l'on ne pourrait pas définir la trace d'opérateurs agissant sur les H^i .

On repasse donc en caractéristique zéro en considérant k comme le corps résiduel d'un anneau complet, non ramifié, de valuation discrète et de caractéristique zéro, $(R, (\pi))$ où π est une uniformisante. On relève ensuite $\overline{A}$ en une R-algèbre A^∞ complète pour la topologie π-adique et plate sur R (cf. [2]). Mais même dans cette situation, des formes différentielles du type $\sum_{n=0}^{\infty} p^n X^{p^n-1}\,dX$ ne sont pas exactes car après intégration formelle on a perdu la condition de convergence.

Aussi se restreint-on à des sous-algèbres A "faiblement complètes, finiment générées" de A^∞ (en bref on dira que A est une algèbre fcfg).

Plus précisément on a la définition suivante :

DÉFINITION.

(i) A <u>est dite une sous-algèbre</u> fcfg <u>de</u> A^∞ <u>si, et seulement si,</u>
$A=\{z\in A^\infty$ <u>tel que</u> $\exists\, c(z) \mid z=\sum_{j=0}^{\infty} \pi^j\, p_j(X_1,\dots,X_n)$ <u>où</u> $p_j\in R[X_1,\dots,X_n]$ <u>et</u> $d^0\, p_j \leq c(j+1)\}$ <u>où</u> $(X_1, \dots, X_n)$ <u>est un ensemble fini, fixé d'éléments de</u> A , <u>appelés générateurs faibles de</u> A .

(ii) $\overline{A}$ <u>est dite avoir un relèvement très lisse, s'il existe une sous-algèbre</u> fcfg <u>de</u> A^∞ <u>telle que</u> $\overline{A} \approx A/\pi A$.

Un exemple intéressant est quand $\overline{A} = k[X_1, \dots, X_n]$, on a, $A^\infty \supset R[X_1,\dots,X_n]$ et on note $R\{X_1, \dots, X_n\}$ la sous-algèbre fcfg de A^∞ engendrée par les

(X_i) . Le théorème 2.2 de [5] montre alors l'intérêt de cet exemple, il s'énonce :

THÉORÈME.

{A <u>est une algèbre</u> fcfg}

$\Longleftrightarrow$ {A <u>est l'image</u>, <u>par un homomorphisme</u>, <u>de</u> $R\{X_1,\ldots,X_n\}$, <u>pour un certain</u> n} .

On démontre que si V est une variété non singulière, irréductible, alors $\overline{A}$ admet un relèvement très lisse, A .

Dans ce cas, en posant $\Omega^0 = A$ et Ω^1 = quotient du module libre engendré par les symboles $\{\Delta f \ ; \ f \in A\}$ et du sous-module engendré par les éléments de la forme :

$\Delta(f+g) - \Delta f - \Delta g$; $\Delta(fg) - f\Delta g - g\Delta f$; $\Delta(rf) - r\Delta f$, où f , $g \in A$ et $r \in R$,

on appelle <u>complexe des formes différentielles formelles</u> sur A , l'algèbre extérieure $\Omega^\bullet$ du Ω^0-module, Ω^1 . La différentiation est donnée par $df = \widehat{\Delta f}$, $f \in \Omega^0$, puis prolongée ensuite, de façon unique à Ω^0 . Le complexe ainsi construit est unique à homomorphisme près.

On pose $D(A) = \Omega^\bullet / \bigcap_{n\geq 1} \pi^n \Omega^\bullet$ que l'on appelle <u>complexe des formes différentielles continues</u> sur A .

On a alors le théorème suivant (Théorème 4.5 de [5]) :

THÉORÈME. - A <u>est une</u> R-<u>algèbre</u> fcfg ; <u>soient</u> $(X_1 , \ldots , X_n)$ <u>ses générateurs faibles</u>, <u>alors</u> :

(i) $D(A)^1$ <u>est un</u> A-<u>module de type fini engendré par les</u> dX_i (<u>mais pas nécessairement libre</u>),

(ii) D(A) <u>est une algèbre extérieure libre sur</u> $D(A)^1$.

On définit alors $H^\bullet_{For}$ la cohomologie formelle d'une k-algèbre $\overline{A}$ admettant un relèvement très lisse sur $(R , (\pi))$ comme étant la cohomologie du complexe différentiel $(D(A) , d)$.

Il faut vérifier que cette association est, d'une part indépendante du choix du relèvement très lisse de $\overline{A}$, et d'autre part qu'elle est bien fonctorielle. Pour cela on a le théorème 5.6 de [5] :

<u>THÉORÈME</u>. - <u>Soient</u>,

$\overline{\mathcal{C}}$ = <u>catégorie des</u> k-<u>algèbres admettant un relèvement très lisse sur</u> $(R , (\pi))$,

$\mathcal{C}$ = <u>catégorie des complexes sur</u> K . $(K = R \otimes \mathbb{Q})$.

<u>L'association</u>

$$H(\cdot\ , K) : \overline{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$$
$$\overline{A} \longmapsto H^\bullet_{For}$$

est un foncteur.

4. Opérateurs de Dwork et traces.

Dans [6], P. MONSKY introduit la notion d'opérateurs de Dwork et pose la définition suivante :

DÉFINITION. - Soit A un relèvement très lisse de $\bar{A}$, et F un endomorphisme de Frobénius de A (c'est-à-dire un relèvement du Frobénius de $\bar{A}$), et M un A-module de type fini.

Les opérateurs de Dwork sont les éléments de $\mathrm{Hom}_A(F_* M , M)$ ou alternativement :

Un opérateur de Dwork θ sur M est une application de $M \to M$, vérifiant :

(i) $\theta(x + y) = \theta(x) + \theta(y)$

(ii) $\forall a \in A \quad \theta(F(a).x) = a.\theta(x)$.

Si $A = R\{X_1 , \dots , X_n\}$ et $F(X_i) = X_i^q$ (q=Card k) (cas utilisé par B. DWORK dans sa démonstration de la rationalité de la fonction zêta), on a l'opérateur de Dwork canonique sur A :

$$\theta \overset{\text{déf}}{=} F^{-1} \circ \mathrm{Tr}_{A/F(A)}$$

et on a

$$\begin{cases} \theta(\prod_{i=1}^n X_i^{\alpha_i}) = q^n . \prod_{i=1}^n X_i^{\alpha_i/q} & \text{, si } q \text{ divise tous les } \alpha_i \\ \theta(\prod_{i=1}^n X_i^{\alpha_i}) = 0 & \text{, sinon.} \end{cases}$$

Considérant d'abord la situation où $A = R\{X_1 , \dots , X_n\}$ et M un A-module libre de type fini, P. MONSKY démontre que l'on peut associer à un opérateur de Dwork sur M une série caractéristique et une trace. Utilisant des résolutions libres de A-module de type fini et quelques résultats sur les opérateurs normaux, P. MONSKY associe à tout module M de type fini sur une algèbre fcfg A , une application trace additive, définie sur l'ensemble des opérateurs de Dwork sur M .

On peut alors appliquer ce résultat au cas où $A = R\{X_1 , \dots , X_n\}$ et $M = D(A)^i$, en utilisant le théorème 8.5 de [5] :

THÉORÈME. - Si $A = R\{X_1 , \dots , X_n\}$ et $F(X_i) = X_i^q$ (q=Card k) . L'application $\mathrm{Tr}_{A/F(A)}$ se prolonge en une application notée ; $S_{A/F(A)} : D(A) \to D(F(A))$. Et l'opérateur $\theta = F^{-1} \circ \mathrm{Tr}_{A/F(A)}$ se prolonge à $D(A)$, en $F^{-1} \circ S_{A/F(A)}$, et vérifie :

(i) θ est R-linéaire et $\theta(F(a).\omega) = a.\theta(\omega)$, $\omega \in D(A)$, $a \in A$,

(ii) $\theta(D(A)^i) \subset D(A)^i$,

(iii) $\theta(F(\omega)) = q^n.\omega$,

(iv) $\theta(d\omega) = d(\theta(\omega))$.

Grâce aux propriétés (iii) et (iv) on peut poser la définition suivante :

DÉFINITION.

$$\begin{aligned} \theta_* : \ & H(\overline{A}, K) \longrightarrow H(\overline{A}, K) \\ & (\dot{\overline{\omega}}) \longmapsto (\dot{\overline{\theta(\omega)}}) \end{aligned}$$

et l'on a

$$\theta_* = q^n . F_*^{-1} .$$

Muni de ces outils P. MONSKY démontre aux paragraphes 3 et 4 de [6] le théorème de points fixes de Lefshetz suivant (théorème 4.5) :

THÉORÈME. - Soit $\overline{A}$ une k-algèbre admettant un relèvement très lisse sur R et dont toutes les composantes sont de même dimension. Alors la somme alternée des traces de θ_* sur les H^i_{For} est égal au nombre d'homomorphismes de $\overline{A}$ dans k qui est aussi le nombre de points k-rationnels de la variété affine associée.

On retrouve ainsi la démonstration de B. DWORK de la rationalité de la fonction zêta, et on utilise le critère de Borel-Dwork pour conclure, ce qui ne serait pas nécessaire si l'on pouvait démontrer que les H^i_{For} sont de dimensions finies sur K (on sait que c'est vrai dans le cas des courbes, et dans le cas général on sait que H^0_{For} est de dimension finie sur K , et aussi H^1_{For} dans le cas d'une variété projective non singulière).

Dans les paragraphes 5 et 6 de [6], P. MONSKY poursuit son étude et en déduit une démonstration de la rationalité des fonctions L de Artin.

RÉFÉRENCES

[1] DWORK (B.). - On the zeta function of an algebraic variety, Amer. J. of Math., t. 82, 1960, p. 631-648.

[2] GROTHENDIECK (A.). - Morphismes lisses ... "Revêtements étales et groupe fondamental, Séminaire de géométrie algébrique de l'IHES, 1960/61", exposé n° 3, p. 58-86. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics, 224).

[3] MAZUR (B.). - Eigenvalues of Frobenius acting on algebraic varieties over finite fields, "Algebraic geometry [1974. Arcata]", p. 231-261. - Providence, American mathematical Society, 1975 (Proceedings of Symposia in pure Mathematics, 29).

[4] MONSKY (P.). - p-adic analysis and zeta function. - Tokyo, Kinokuniya Book-Store Company, 1970 (Lectures in Mathematics, Dept of Mathematics, Kyoto University).

[5] MONSKY (P.) and WASHNITZER (G.). - Formal cohomology, I, Annals of Math., t. 88, 1968, p. 181-217.

[6] MONSKY (P.). - Formal cohomology, III, Annals of Math., t. 93, 1971, p. 315-343.

[7] WEIL (A.). - Number of solutions of equations in finite fields, Bull. Amer. math. Soc., t. 55, 1949, p. 497-508.