

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

BERNARD DWORK

PHILIPPE ROBBA

Majorations effectives

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 6 (1978-1979), exp. n° 18, p. 1-2

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1978-1979__6__A12_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MAJORATIONS EFFECTIVES

par Bernard DWORK et Philippe ROBBA (*)
 [Princeton et Orsay]

Soit K un corps valué ultramétrique complet de caractéristique 0 , avec un corps résiduel de caractéristique p (on suppose la valeur absolue normalisée par la condition $|p| = 1/p$).

Soit u analytique dans le disque $D(0, 1^-)$, $u = \sum a_s x^s$. On pose, pour $0 < r < 1$,

$$|u|(r) = \sup_s |a_s| r^s.$$

Pour $s \in \mathbb{N}$, k entier vérifiant $1 \leq k \leq s$, on pose

$$\{s, k\}_p = 1/\inf |\lambda_1 \dots \lambda_k|_p,$$

la borne inférieure étant prise sur tous les ensembles de k nombres entiers distincts majorés par s , c'est-à-dire vérifiant $1 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_k \leq s$.

On voit facilement que, pour k fixé,

$$\{s, k\}_p \sim k \log_p s \text{ quand } s \rightarrow +\infty.$$

Soient u_1, \dots, u_n n fonctions analytiques dans $D(0, 1^-)$, et soit w leur wronskien. On suppose que $w(0) \neq 0$. On pose, pour $s \in \mathbb{N}$,

$$f(s) = \inf_{0 < r < 1} \frac{1}{r^{s+1}} \frac{|w|(r)}{|w(0)|} \dots$$

Soit $u = \sum_s a_s x^s$, appartenant à l'espace vectoriel engendré par $u_1 \dots u_n$.
On a la majoration

$$|a_s| \leq f(s) \{s, n-1\}_p \max_{0 \leq j \leq n-1} |a_j|.$$

On en déduit que, si $w = \sum_s b_s x^s$ vérifie la condition $|b_s| = O(s^\alpha)$, $\alpha \geq 0$ (w a une croissance logarithmique d'ordre α), alors on a $a_s = O(s^{\alpha+n-1})$ (u a une croissance logarithmique d'ordre $\alpha + n - 1$).

Si le wronskien w est borné, on a $f(s) \leq \frac{|w|(1)}{|w(0)|}$ et, en particulier, si w ne s'annule pas dans $D(0, 1^-)$, on a $f(s) = 1$.

On retrouve en particulier que si l'opérateur différentiel

$$L = A_n \left(\frac{d}{dx}\right)^n + \dots + A_0$$

à coefficients analytiques dans $D(0, 1^-)$ possède n solutions linéairement

(*) Texte reçu le 4 juillet 1979.

Bernard DWORK, Fine Hall, Princeton University, PRINCETON, N. J. 08540 (Etats-Unis);

Philippe ROBBA, 138 rue Nationale, 75013 PARIS.

indépendantes et si, de plus, A_n n'a qu'un nombre fini de zéros donc $D(0,1^-)$, alors les solutions de l'équation $Lu = 0$ dans $D(0, 1^-)$ ont une croissance logarithmique d'ordre $n - 1$.

(En effet on est dans la situation où le wronskien est borné, c'est-à-dire a une croissance logarithmique d'ordre 0.)

Mais maintenant nous avons des majorations effectives. De plus, la démonstration est directe (c'est-à-dire ne fait pas appel au disque générique).

Pour plus de détails, on consultera l'article de B. DWORK et P. ROBBA : Effective p-adic bounds for solutions of homogeneous linear differential equations (à paraître).
