GROUPE DE TRAVAIL
D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

YVETTE PERRIN

Fonctions analytiques de plusieurs variables sur certains corps valués au sens de Krull

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 6 (1978-1979), exp. nº 17, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1978-1979__6__A11_0>

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
6e année, 1978/79, n° 17, 7 p.

26 mars 1979

FONCTIONS ANALYTIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES SUR CERTAINS CORPS VALUÉS AU SENS DE KRULL

par Yvette PERRIN (*)
[Univ. Clermont-Ferrand]

Dans un exposé précédent [3], nous avons présenté une notion générale des fonctions analytiques d'une variable sur certains corps valués au sens de Krull. Nous nous proposons ici de généraliser cette théorie aux fonctions de plusieurs variables.

Rappelons ce que nous entendons par "certains corps valués au sens de Krull".

Si l'on considère les corps valués les plus généraux, c'est-à-dire les corps munis d'une valeur absolue prenant ses valeurs dans un groupe totalement ordonné de rang quelconque, ceux sur lesquels une analyse non triviale est possible se répartissent en deux groupes :

Le premier est constitué des corps dont la charpente [1] du groupe des valeurs a un plus grand élément, c'est en particulier le cas des groupes de rang 1 dont la charpente n'a qu'un élément.

Le deuxième est constitué des corps dont la charpente admet une suite cofinale dénombrable.

Le premier cas conduit à une analyse très proche de l'analyse ultramétrique classique. Nous nous plaçons uniquement dans le deuxième cas.

Nous considérons donc un corps K muni d'une valeur absolue $|\ |$ dont le groupe des valeurs Γ, totalement ordonné, admet une suite cofinale dénombrable de classes de comparabilité. Nous supposons de plus K complet et algébriquement clos. Le fait que Γ ait une suite cofinale de classes de comparabilité implique que l'anneau $\mathfrak{a}$ de valuation de K ait une suite décroissante d'idéaux premiers d'intersection $\{0\}$.

Nous nous donnons pour toute la suite de l'exposé une telle suite d'idéaux, strictement décroissante, $(\mathcal{P}_K)$, telle que

$$\lim_{K\to\infty} |\mathcal{P}_K| = 0 ,$$

$|\mathcal{P}_K|$ désignant l'élément du complété de Kurepa $\hat{\Gamma}$ de Γ correspondant à la classe inférieure de la coupure de Γ, définie par $\{|x| \ ;\ x \in \mathcal{P}_K\}$.

Nous désignons par $\mathfrak{a}_{\mathcal{P}_K}$ l'anneau des fractions de $\mathfrak{a}$ défini par $\mathcal{P}_K$, et par

(*) Texte reçu le 11 juin 1979.
Yvette PERRIN, Mathématiques, Université de Clermont-Ferrand, Complexe des Cézeaux, Boîte postale 45, 63170 AUBIÈRE.

$K_{\wp_K}$ son corps résiduel.

Soit n un entier strictement positif. $(\Gamma \cup \{0\})^n$, et $\hat{\Gamma}^n$ étant muni de l'ordre produit, on défini sur K^n une application, que l'on notera encore $| \ |$, et appellera valeur absolue, à valeurs dans $(\Gamma \cup \{0\})^n$ par

$$|x| = (|x_i|)_{1 \leq i \leq n} \quad \text{si} \quad x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} .$$

Si $r \in \hat{\Gamma}^n$ et $a \in K$, on appellera polydisque de centre a de rayon r , l'ensemble $D(a , r)$ des $x \in K$ tels que $|x - a| \leq r$.

Enfin, si $\alpha = (\alpha_i) \in N^n$ est un multi-indice, et $X = X_1 \ldots X_n$ une famille d'indéterminées on notera

$$|\alpha| = \sum_i \alpha_i , \quad X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$$

et, si $y \in K^n$,

$$\alpha y = \sum_i \alpha_i y_i \quad \text{et} \quad y^\alpha = \prod_i y_i^{\alpha_i} .$$

Une série de Taylor converge soit partout sur K , soit presque nulle part, c'est-à-dire seulement sur certains hyperplans

$$H_i = \{x \in K \ ; \ x_i = 0\}$$

i étant tel que il existe $\alpha_0 \in N$ tel que, pour tout $\alpha \geq \alpha_0$ on ait $\alpha_i \neq 0$.

Le problème du prolongement de la somme de telles séries ne se pose pas. Nous allons essayer de définir sur certains sous-ensembles de K une famille de fonctions que nous appellerons analytiques et qui comprendra les sommes de séries de Taylor et de Laurent convergentes sur de tels sous-ensembles. Nous demandons à ces fonctions d'être de classe C^∞ et de vérifier le principe du prolongement analytique. Comme en analyse ultramétrique classique nous définissons ces fonctions à partir des éléments analytiques.

1. Ensembles analytiques.

Définitions. - Soit D une partie de K^n , $f : D \longrightarrow K$ est appelé élément analytique sur D si f est limite uniforme sur D d'une suite de fractions rationnelles sans singularités dans D .

Nous noterons $H(D)$ l'ensemble des éléments analytiques sur D .

Une partie D de K est un ensemble analytique si tout $f \in H(D)$ qui s'annule sur un polydisque contenu dans D s'annule sur D tout entier.

THÉORÈME 1. - *Tout ouvert de K^n est un ensemble analytique.*

Démonstration. - Ce résultat a été démontré dans le cas $n = 1$ [3]. Soit D un ouvert de K^n , f un élément analytique sur D , nul sur le polydisque $D(x,r)$. Soit $(f_k)_{k \in N}$ une suite approximante de f . Par la translation $x \longrightarrow x - x_0$, on peut se ramener au cas où D contient 0, et où f est nul sur le polydisque $D(0\,,\,r)$. Soit y un point quelconque de $D\setminus\{0\}$. Montrons que $f(y)=0$.

L'ensemble $A=\{\lambda\in K\ ;\ \lambda y\in D\}$ est un ouvert de K. La fonction

$$f^y : A \longrightarrow K$$
$$\lambda \longrightarrow f(\lambda y)$$

est un élément analytique sur A, limite uniforme sur A de la suite de fractions rationnelles f_k^y sans pôles dans A.

Sur le disque $D(0\,,\,\rho)\subset A$, où $\rho=\inf_{i\in\{1,\dots,n\}}\frac{r_i}{|y_i|}$, $f^y(\ )=0$.

f^y vérifie le principe du prolongement analytique sur l'ouvert A de K, donc $f^y(\lambda)=0$ pour tout $\lambda\in A$. En particulier, $f^y(1)=0=f(y)$. Ce résultat nous conduit à définir les fonctions analytiques par prolongement d'éléments analytiques sur des familles enchaînées d'ouverts.

2. Fonctions analytiques.

Définition. - Une application $f : D\longrightarrow K$ est une fonction analytique sur D s'il existe une famille $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ enchaînée d'ouverts telle que la restriction de f à chaque $\mathcal{O}_i$ soit un élément analytique sur $\mathcal{O}_i$.

Nous allons montrer que le prolongement ainsi défini conduit à des fonctions globalement uniformes, c'est-à-dire que l'on a le résultat suivant :

THÉORÈME 2 : Principe du prolongement analytique uniforme. - Soit $(D_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille finie d'ouverts telle que, pour tout

$$i\,(1\leq i\leq p)\qquad D_i\cap D_{i+1}\neq\emptyset \ \text{ et }\ D_1\cap D_p\neq\emptyset .$$

Soit, pour tout $i\in\{1\,,\dots,\,p\}$, $f_i\in H(D_i)$. On suppose que, pour tout $i\in\{1\,,\dots,\,p-1\}$, f_i et f_{i+1} coïncident sur $D_i\cap D_{i+1}$. Alors f_1 et f_p coïncident sur $D_1\cap D_p$.

Pour démontrer ce théorème nous utiliserons les propositions suivantes :

LEMME 1. - Soit $Q(X)=\sum a_\alpha X^\alpha$, un polynôme à coefficients dans $\mathfrak{a}_\wp$ tel que $Q(0)=1$. S'il existe $x\in(\mathfrak{a}_\wp)^n$ tel que, dans $k_\wp$, $\overline{Q}(\overline{x})=0$, alors il existe $y\in(\mathfrak{a}_\wp)^n$ tel que $Q(y)=0$ et $|x-y|<(|\wp|\,,\dots,\,|\wp|)=|\wp|^n$.

Démonstration. - Ce résultat a été démontré dans le cas $n=1$ [3].

Soit $x=(x_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ tel que $\overline{Q}(\overline{x})=0$ dans $k_\wp$.

Considérons le polynôme à une indéterminée

$$Q_x(Y)=\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha Y^{|\alpha|} .$$

Q_x a ses coefficients dans $\mathfrak{a}_\wp$ puisque, pour tout α, $a_\alpha \in \mathfrak{a}_\wp$, et $x_i \in \mathfrak{a}_\wp$ pour tout i.

Dans $k_\wp$, $\overline{Q}_x(\overline{1}) = 0$.

$$Q_x(0) = 1 ,$$

donc il existe $\lambda \in \mathfrak{a}_\wp$ tel que $|\lambda - 1| < |\wp|$, et $Q_x(\lambda) = 0$.

Soit $y = (y_i)_{i\in(1,\ldots,n)} \in K^n$ tel que, pour tout i, $y_i = \lambda x_i$,

$$|x - y| = (|1 - \lambda|\,|x_i|)_{i\in(1,\ldots,n)} < |\wp|^n \quad \text{et} \quad Q(y) = 0 .$$

<u>Définition</u>. - Un ouvert D de K^n vérifie la propriété $(\mathcal{K})$ s'il existe $r \in \Gamma^n$ tel que, pour tout $x \in D$, le polydisque $D(x, r)$ soit contenu dans D.

LEMME 2. - <u>Soit</u> f <u>un élément analytique sur un ouvert borné possédant la propriété</u> $(\mathcal{K})$ <u>et contenant</u> 0. f <u>admet une suite approximante</u> $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ <u>telle que</u> :

<u>Pour tout</u> $x \in D$ <u>et tout</u> $k \in \mathbb{N}$, $|f(x) - f_k(x)| < |\wp_k|$.

<u>Il existe</u> $k_0 \in \mathbb{N}$ <u>tel que, pour tout</u> $k \geq k_0$, $f_k \in \mathfrak{a}_{\wp_{k_0}}(X)$.

<u>Pour tout</u> $k \geq k_0$, <u>l'élément</u> $\overline{f}_k$ <u>de</u> $k_{\wp_k}(X)$ <u>est irréductible</u>.

<u>Démonstration</u>. - K, étant algébriquement clos, est initialement dense. Il en résulte que, pour tout polynôme à une indéterminée $P(X) = \sum_i a_i X^i$, on a :

Pour tout $r \in \Gamma$, $\sup_i |a_i| r^i = \sup_{|x|\leq r} |P(x)|$.

r est une valeur singulière si, et seulement si, il existe x tel que $P(x) = 0$ et $|x| = r$.

Ces propriétés sont encore vraies pour les polynômes à n indéterminées. Si $Q(X) = \sum_\alpha a_\alpha X^\alpha$, pour tout $r \in \Gamma^n$, on a :

$\sup_\alpha |a_\alpha| r^\alpha = \sup_{|x|\leq r} |Q(x)|$.

r est valeur singulière si, et seulement si, il existe x tel que $|x| = r$ et $Q(x) = 0$.

Elles se démontrent comme en analyse ultramétrique classique par récurrence sur n [5].

Soit D un ouvert borné de K^n contenant 0, et possédant la propriété $(\mathcal{K})$. Soit $f \in H(D)$, et $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite approximante de f sur D telle que, pour tout $x \in D$,

$$|f(x) - f_k(x)| < |\wp_K| .$$

Posons $f_k = P_k/Q_k$, et supposons $Q_k(0) = 1$.

On montre alors facilement, à partir des propriétés de la fonction de valuation d'un polynôme P , $r \dashrightarrow \sup_{x \leq r} |P(x)|$ et, en tenant compte du fait qu'un polydisque $D(0\ ,\ r)$ est contenu dans D , qu'il existe k_1 tel que $f_k \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{P}_{K_1}}(X)$ quel que soit $k \in \mathbb{N}$. Donc pour $k \geq k_1$, $f_k \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{P}_K}(X)$.

Si $f_k(X) = (\sum_\alpha a_\alpha X^\alpha / \sum_\beta b^\beta X^\beta)$ notons $\overline{f}_k$ l'élément de $k_{\mathfrak{P}_K}(X)$, défini par $\overline{f}_k(X) = (\sum_\alpha \overline{a}_\alpha X^\alpha / \sum_\beta \overline{b}_\beta X^\beta)$, $\overline{a}$ désignant la classe de a modulo $\mathfrak{P}_K$.

Soit $g_k \in K(X)$ tel que, dans $k_{\mathfrak{P}_K}(X)$, $\overline{f}_k = \overline{g}_k$, $\overline{g}_k$ étant irréductible.

Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $k_0 \geq k_1$, $D \subset \mathfrak{a}_{\mathfrak{P}_{K_0}}$, $|\mathfrak{P}_{K_0}| < \inf_i \{r_i\}$. D'après le lemme précédent, quels que soient $x \in D$ et $k \geq k_0$, $\overline{Q}(\overline{x}) \neq 0 \mod \mathfrak{P}_K$ donc

$$|f_k(x) - g_k(x)| < |\mathfrak{P}_K| \ .$$

Il en résulte que la suite g_k est une suite approximante de f sur D .

PROPOSITION 1. - Si A et B sont deux ouverts bornés de K^n vérifiant chacun la propriété $(\mathcal{K})$, et non disjoints, tout élément analytique sur A et sur B est élément analytique sur $A \cup B$.

Démonstration. - Par une translation, ramenons-nous au cas où $0 \in A \cap B$. Soit $f \in H(A) \cap H(B)$.

Soient f_k une suite approximante de f sur A vérifiant les conditions du lemme 2, et g_k une suite approximante de f sur B vérifiant ces mêmes conditions.

Il existe $r \in \Gamma^n$ tel que, pour tout $x \in D(0\ ,\ r)$ et k assez grand, on ait :

$$|f(x) - f_k(x)| < |\mathfrak{P}_K|$$
$$|f(x) - g_k(x)| < |\mathfrak{P}_K|$$

donc

$$|f_k(x) - g_k(x)| < |\mathfrak{P}_K| \ .$$

Il en résulte que, pour k assez grand vérifiant $|\mathfrak{P}_K|^n < r$, $\overline{f}_k = \overline{g}_k$ dans $k_{\mathfrak{P}_K}(X)$. Quel que soit $x \in B$, dans $k_{\mathfrak{P}_K}$, $\overline{x}$ n'est pas pôle de $\overline{g}_k$ en vertu du lemme 1, et puisque $\overline{f}_k$ et $\overline{g}_k$ sont irréductibles, $\overline{x}$ n'est pas non plus pôle de $\overline{f}_k$. Donc, pour tout $x \in B$,

$$|f_k(x) - g_k(x)| < |\mathfrak{P}_K|$$

et par conséquent la suite f_k est une suite approximante de f sur $A \cup B$.

PROPOSITION 2. - Soit D un ouvert quelconque de K^n . Il existe une suite croissante $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'ouverts bornés, vérifiant la propriété $(\mathcal{K})$ dont la réunion est égale à D .

Démonstration. - Soit

$$B_k = \{x \in D \text{ tels qu'il existe } y \in K^n \setminus D \text{ tel que } |x - y| < |\wp_K|^n\}$$

$$D'_k = D \setminus \cup_{x \in B_k} D(x , |\wp_K|^n) ,$$

alors

$$D_k = D'_k \cap (\mathfrak{a}_{\wp_K})^n .$$

COROLLAIRE 1. - Soit $(D_i)_{i\in I}$ une famille enchaînée d'ouverts. Pour tout $i \in I$, soit $(D_{i,k})$ la famille d'ouverts associés à D_i par la proposition ci-dessus. Alors la famille $(D_{i,k})_{\substack{i\in I \\ k\in N}}$ est enchaînée.

Démonstration du théorème II. - 1° Supposons d'abord que les ouverts D_i sont bornés et vérifient la propriété $(\mathcal{K})$. Démontrons le résultat par récurrence sur la longueur p de la chaîne $(D_i)_{1\leq i\leq p}$.

Pour $n = 2$ la propriété est triviale. Supposons la démontrée à l'ordre n et soit $(D_i)_{1\leq i\leq n+1}$ une chaîne de longueur $n + 1$. Posons $A_i = D_i \cup D_{i+1}$ pour $i \in \{1 , \ldots , n\}$. A_i est un ouvert borné, possédant la propriété $(\mathcal{K})$. D'après la proposition 1, il existe un élément analytique g_i sur A_i qui coïncide avec f_i sur D_i et avec f_{i+1} sur D_{i+1} . $A_i \cap A_{i+1}$ contient $D_i \cap D_{i+1}$. Sur $D_i \cap D_{i+1}$, g_i et g_{i+1} coïncident avec f_i et comme ils vérifient le principe du prolongement analytique ils coïncident sur $A_i \cap A_{i+1}$. D'après l'hypothèse de récurrence g_1 et g_n coïncident sur $A_1 \cap A_n$. Mais $D_1 \cap D_{n+1}$ est contenu dans $A_1 \cap A_n$ et sur $D_1 \cap D_{n+1}$, g_1 coïncident avec f_1 et g_n avec f_{n+1} .

2° Supposons les ouverts quelconques et considérons la famille enchaînée $(D_{i,k})$ définie au corollaire 1. Soit $x \in D_1 \cap D_n$, il existe une chaîne finie (D_{i,k_i}) où, pour tout $i \in \{1 , \ldots , n\}$, k_i appartient à une partie finie J_i de N , telle que $x \in D_{1,k_1} \cap D_{n,k_n}$. Alors d'après la démonstration précédente

$$f_1(x) = f_{1|D_{k_1}}(x) = f_{n|D_{k_n}}(x) = f_n(x) .$$

THÉORÈME 3. - Si f est une fonction analytique sur un ouvert D de K^n , elle admet en tout point de D des dérivées partielles par rapport à chaque variable. Ces dérivées sont des fonctions analytiques sur D .

Ce théorème a été démontré dans le cas $n = 1$ [3]. Il se généralise facilement au cas $n > 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HOBEIKA (R.). - Séries de Taylor et séries de Laurent dans certains corps valués au sens de Krull, Thèse 3e cycle, Univ. Paris-VI, 1976.

[2] KRASNER (M.). - Rapport sur le prolongement analytique dans les corps valués complets par la méthode des éléments analytiques quasi connexes, "Table ronde d'analyse non archimédienne [1972. Paris]", Bull. Soc. math. France, Mémoire 39-40, 1974, p. 131-254.

[3] PERRIN (Y.). - Fonctions analytiques dans certains corps valués au sens de Krull, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, 5e année, 1977/78, n° 4, 13 p.

[4] RIBENBOIM (P.). - Théorie des valuations. - Montréal, Les Presses de l'Université de Montréal, 1964 (Séminaire de Mathématiques supérieures, Eté 1964, 9).

[5] ROBBA (P.). - Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets, "Prolongement analytique et algèbre de Banach ultramétrique", Astérisque, 1973, n° 10, p. 109-208.