

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

ALAIN ESCASSUT

Problème des 4 exponentielles p -adiques et algèbres topologiquement de type fini

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 5 (1977-1978), exp. n° 15, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1977-1978__5__A8_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLÈME DES 4 EXPONENTIELLES p -ADIQUES
 ET ALGÈBRES TOPOLOGIQUEMENT DE TYPE FINI

par Alain ESCASSUT

Le problème des 4 exponentielles p -adiques (interprétation p -adique d'une conjecture de LANG [7] évoquée, dès 1966, par Jean-Pierre SERRE [8]) se ramène, en fait, à un problème de minoration du "module maximum", sur un disque centré à l'origine, de fonctions de la forme

$$P(\exp(ax), \exp(bx)), \text{ où } P(X, Y) \in \mathbb{Z}[X, Y].$$

On se propose ici de montrer que ce module maximum s'interprète, en fait, comme la norme quotient d'un élément (lié à P) d'une algèbre topologiquement de type dépendant de a/b , et on étudiera des conséquences de cette relation.

1. Algèbres topologiquement de type fini.

Soit p un entier premier. $(\mathbb{C}_p, |\cdot|)$ désigne le corps complété de la clôture algébrique de \mathbb{Q}_p .

Pour tout $a \in \mathbb{C}_p$ et $r \in \mathbb{R}^+$, on note

$$d(a, r) = \{x \in \mathbb{C}_p; |x - a| \leq r\}, \quad U = d(0, 1) \quad \text{et} \quad D = d(0, \frac{1}{p}).$$

Soit \mathcal{O} un fermé borné de \mathbb{C}_p . On note $H(\mathcal{O})$ l'algèbre de Banach des éléments analytiques sur \mathcal{O} , et $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$ sa norme de la convergence uniforme sur \mathcal{O} [2]. Pour tout $h \in H(U)$, pour tout $r \in]0, 1[$, on pose $H(h, r) = \sup_{|x| \leq r} |h(x)|$.

Soit $\mathbb{C}_p\{X, Y\}$ une extension topologiquement pure de \mathbb{C}_p de degré 2 [9], et soit $\|\cdot\|$ sa norme canonique ($\|\sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j\| = \sup_{i,j} |a_{ij}|$).

On notera \exp la fonction exponentielle p -adique définie, pour $|x| < p^{-(1/(p-1))}$, par $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n/n!)$, et on notera $\mathcal{L}g(x)$ la fonction logarithme p -adique définie, pour $|x| < 1$, par $\mathcal{L}g(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} (x^n/n)$.

Soit $\alpha \in U$, soit

$$J_{\alpha}(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np} ((pX)^n - \alpha(pY)^n) \in \mathbb{C}_p\{X, Y\},$$

et soit $\mathcal{C}(\alpha)$ l'algèbre topologiquement de type fini $\mathbb{C}_p\{X, Y\}/(J_{\alpha}\{X, Y\} \mathbb{C}_p\{X, Y\})$ [9]. Soit Γ la surjection canonique de $\mathbb{C}_p\{X, Y\}$ sur $\mathcal{C}(\alpha)$.

Soit $\|\cdot\|^{\alpha}$ la norme de $\mathcal{C}(\alpha)$ quotient de la norme canonique de $\mathbb{C}_p\{X, Y\}$ par $J_{\alpha}\{X, Y\} \mathbb{C}_p\{X, Y\}$, et enfin soit $\|\cdot\|^{\alpha}$ la semi-norme définie, sur $\mathbb{C}_p\{X, Y\}$, par $\|\Gamma(L)\|^{\alpha} = \|\Gamma(L)\|^{\alpha}$.

LEMME 1. - Soient $b \in \mathbb{C}_p$ tel que $|b| = 1/p$, $\alpha \in \mathbb{C}_p$ tel que $|\alpha| \leq 1$, $a = \alpha b$ et $g = (1 - \exp(ax))/p^2$, et soit $f = (1 - \exp(ax))/p^2$. Alors il existe un isomorphisme Θ de $\mathcal{C}(\alpha)$ sur $H(D)$ tel que

$$\Theta \circ \Gamma(X) = f \quad \text{et} \quad \Theta \circ \Gamma(Y) = g,$$

et la norme $\|\cdot\|^\alpha$ de $\mathcal{C}(\alpha)$ est égale à sa norme spectrale $\|\cdot\|_{\text{sa}}^{\mathcal{C}(\alpha)}$.

Remarquons d'abord que $\mathbb{C}_p[g]$ est dense dans $H(D)$. En effet, $\|pg\|_D = 1/p$, et par suite $\sum_{n=1}^{\infty} ((p^2g)^n/n)$ appartient à l'adhérence $\overline{\mathbb{C}_p[g]}$ de $\mathbb{C}_p[g]$ dans $H(D)$. Or $\sum_{n=1}^{\infty} ((p^2g)^n/n) = \mathcal{L}g(1 - p^2g)$, d'où $x \in \overline{\mathbb{C}_p[g]}$ et, comme $H(D) = \overline{\mathbb{C}_p[x]}$, on voit que $H(D) = \overline{\mathbb{C}_p[g]}$.

Montrons maintenant que $\mathcal{C}(\alpha)$ est isomorphe à $H(D)$ par un isomorphisme Θ tel que $\Theta \circ \Gamma(X) = f$ et $\Theta \circ \Gamma(Y) = g$. Par définition de $H(D)$, pour tout $h \in H(D)$, on a $\|h\|_D = \|h\|_{\text{sa}}^{H(D)}$. D'autre part, l'homomorphisme naturel de $\mathbb{C}_p[X, Y]$ dans $H(D)$ défini par $L(X, Y) \rightarrow L(f, g)$ est continu pour la norme canonique de $\mathbb{C}_p[X, Y]$ et la norme $\|\cdot\|_D$ de $H(D)$. Donc, il se prolonge en un homomorphisme continu Δ de $\mathbb{C}_p\{X, Y\}$ dans $H(D)$. De plus, on voit que f et g satisfont la relation

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (b(p^2f)^n - a(p^2g)^n) = 0.$$

Alors, il est évident que $\text{Ker } \Delta \supset \text{Ker } \Gamma$, de sorte que $H(D)$ apparaît comme un quotient de $\mathcal{C}(\alpha)$.

Maintenant, nous allons montrer que $\mathcal{C}(\alpha) = \Gamma(\mathbb{C}_p\{Y\})$. En effet, soit $u \in \mathcal{C}(\alpha)$ tel que $\|u\|^\alpha < 1$. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} (u^n/n)$ converge dans $\mathcal{C}(\alpha)$, on la notera $-\mathcal{L}g(1 - u)$. De même, si $\|v\|^\alpha < p$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} (v^n/n!)$ converge dans $\mathcal{C}(\alpha)$, et on la notera $\exp(v)$. Alors, notons $x = \Gamma(X)$ et $y = \Gamma(Y)$. Dans $\mathcal{C}(\alpha)$, on a donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{2n}}{n} (x^n - \alpha y^n) = 0.$$

D'où, comme $\|x\|^\alpha \leq \|X\| = 1$ et $\|y\|^\alpha \leq \|Y\| = 1$, on voit que

$$\mathcal{L}g(1 - (p^2x)) = \alpha \mathcal{L}g(1 - (p^2y)).$$

Or, il est immédiat de voir que

$$\|\mathcal{L}g(1 - p^2x)\|^\alpha \leq \frac{1}{p^2} \quad \text{et} \quad \|\mathcal{L}g(1 - p^2y)\|^\alpha \leq \frac{1}{p^2}.$$

D'où

$$\exp(\mathcal{L}g(1 - p^2x)) = \exp(\alpha(\mathcal{L}g(1 - p^2y))),$$

ce qui prouve que x peut se mettre sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$, où $\sum_{n=0}^{\infty} a_n Y^n \in \mathbb{C}_p\{Y\}$, donc $x \in \Gamma(\mathbb{C}_p\{Y\})$, et donc $\mathcal{C}(\alpha) = \Gamma(\mathbb{C}_p\{Y\})$.

Par suite, on voit que $H(D) = \Theta \circ \Gamma(\mathbb{C}_p\{Y\})$, et, comme $H(D)$ et $\mathbb{C}_p\{Y\}$ sont isomorphes [3], Θ et Γ sont des isomorphismes. On en déduit que

$$\|\Theta(u)\|_{\text{sa}}^{H(D)} = \|u\|_{\text{sa}}^{\mathcal{C}(\alpha)}, \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{C}(\alpha),$$

et que

$$\|\Gamma(L(Y))\|_{sa}^{\mathcal{C}(\alpha)} = \|L(Y)\|, \text{ pour tout } L(Y) \in \underline{C}_p\{Y\}.$$

Or, trivialement, on a

$$\|\Gamma(F(X, Y))\|_{sa}^{\mathcal{C}(\alpha)} \leq \|\Gamma(F(X, Y))\|^\alpha \leq \|F(X, Y)\|,$$

pour tout $F(X, Y) \in \underline{C}_p\{X, Y\}$. Maintenant, soit $u \in \mathcal{C}(\alpha)$, et, puisque $\mathcal{C}(\alpha) = \Gamma(\underline{C}_p\{Y\})$, soit $L(Y) \in \underline{C}_p\{Y\}$ tel que $u = \Gamma(L(Y))$. On voit donc que

$$\|u\|_{sa}^{\mathcal{C}(\alpha)} \leq \|u\|^\alpha \leq \|L(Y)\| = \|u\|_{sa}^{\mathcal{C}(\alpha)},$$

d'où $\|u\|_{sa}^{\mathcal{C}(\alpha)} = \|u\|^\alpha$, ce qui montre que la norme quotient $\|\cdot\|^\alpha$ et la norme spectrale $\|\cdot\|_{sa}^{\mathcal{C}(\alpha)}$ sont égales.

Notations. - Soit \log la fonction logarithme réelle de base p .

Pour tout nombre $x \in \underline{C}_p$, algébrique sur \underline{Q} , on notera $d(x)$ le plus petit des entiers naturels n tels que nx soit un entier algébrique, et si $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ sont les plongements de $\underline{Q}[x]$ dans \underline{C} , dont la valeur absolue est notée $|\cdot|_\infty$, on notera

$$|\bar{x}| = \max_i |\sigma_i(x)|_\infty, \text{ et } s(x) = \max(\log |\bar{x}|, d(x)).$$

Soit

$$P(X_1, \dots, X_n) = \sum a_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} \in \underline{Z}[X_1, \dots, X_n].$$

On note

$$t(p) = \max(\log \max_{(i_1, \dots, i_n)} |a_{i_1, \dots, i_n}|, \max_{1 \leq j \leq n} \deg_{X_j}(P)).$$

Pour tout polynôme $P(X, Y) \in \underline{C}_p[X, Y]$, on pose

$$\tilde{P}(X, Y) = P(1 + p^2 X, 1 + p^2 Y).$$

D'autre part, pour toute fonction analytique f dans le disque $|x| \leq r$, on notera $M(f, r) = \sup_{|x| \leq r} |f(x)|$. Alors, nous pouvons maintenant énoncer le théorème 1.

THÉORÈME 1. - Soient a et $b \in \underline{C}_p$ tels que $|a| \leq |b| = 1/p$. Alors, pour tout polynôme $P(X, Y) \in \underline{C}_p[X, Y]$, on a

$$M(P(\exp(ax), \exp(bx)), \frac{1}{p}) = \|\tilde{P}\|^{a/b}.$$

Preuve. - En effet, il est clair que $P(\exp(ax), \exp(bx)) = \tilde{P}(f, g)$, et par suite

$$\|P(\exp(ax), \exp(bx))\|_{\mathcal{D}} = \|\tilde{P}(f, g)\|_{\mathcal{D}}.$$

Or $\|\tilde{P}(f, g)\|_{\mathcal{D}} = \|\tilde{P}\|^\alpha$, d'après le lemme précédent, ce qui prouve le théorème, puisque $M(h, (1/p)) = \|h\|_{\mathcal{D}}$.

Remarque. - Le théorème 1 peut s'interpréter de la façon suivante. Soit

$\tilde{P}(X, Y) = \sum_{i \leq N, j \leq N} \delta_{ij} X^i Y^j$, et supposons que $\|\tilde{P}\|^\alpha < \varepsilon$. Alors, par définition, il existe $L \in \mathbb{C}_p\{X, Y\}$ tel que $\|\tilde{P} - J_\alpha L\| < \varepsilon$. Soit

$$L(X, Y) = \sum_{i, j} \lambda_{ij} X^i Y^j,$$

et soit $J_\alpha L = \sum_{i, j} \mu_{ij} X^i Y^j$. Il est immédiat de voir que

$$\mu_{ij} = \sum_{h=0}^{i-1} \lambda_{h, j} \frac{p^{i-h-1}}{i-h} - \alpha \sum_{k=0}^{j-1} \lambda_{i, k} \frac{p^{j-k-1}}{j-k}.$$

On voit donc qu'il doit exister une suite double $(\lambda_{m, n})_{m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} (\lambda_{m, n}) = 0$, et telle que

$$|\delta_{ij} - \sum_{k=0}^{i-1} \lambda_{h, j} \frac{p^{i-h-1}}{i-h} + \alpha \sum_{k=0}^{j-1} \lambda_{i, k} \frac{p^{j-k-1}}{j-k}| < \varepsilon,$$

quels que soient $i \leq N$ et $j \leq N$, et

$$|\sum_{h=0}^{i-1} \lambda_{hj} \frac{p^{i-h-1}}{i-h} - \alpha \sum_{k=0}^{j-1} \lambda_{i, k} \frac{p^{j-k-1}}{j-k}| < \varepsilon,$$

quels que soient i et j tels que $\max(i, j) > N$. Soit $n \geq \deg \tilde{P}$.

Notons C la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{p}{1} & 0 & & & \\ \cdot & \frac{p}{1} & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & 0 & \cdot \\ \frac{p^n}{n} & \frac{p^{n-1}}{n-1} & \dots & \frac{p}{1} & 0 \end{bmatrix},$$

soit Λ la matrice $(\lambda_{ij})_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n}$, et enfin soit Δ la matrice $(\delta_{ij})_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n}$. Alors, il est immédiat de voir que

$$\Delta = \Lambda C - \alpha {}^t C \Lambda.$$

Munissons l'anneau des matrices carrées d'ordre n de la norme $\|(\alpha_{ij})\| = \max |\alpha_{ij}|$.

Soit $\tilde{P} = \sum_{i, j \leq n} a_{ij} X^i Y^j$, et soit $[\tilde{P}]$ la matrice $(a_{ij})_{i \leq n, j \leq n}$. On voit donc que, si $\|\tilde{P}\|^\alpha < \varepsilon$, il existe Λ tel que $\|\Lambda C - \alpha {}^t C \Lambda - [\tilde{P}]\| < \varepsilon$.

2. Problème des 4 exponentielles p-adiques.

Rappelons la conjecture des 4 exponentielles p-adiques [8].

Soient a_1, a_2 (resp. b_1, b_2) deux nombres de \mathbb{C}_p , Q-linéairement indépendants, tels que $\max |a_i b_j| < p^{-(1/(p-1))}$. Alors, l'un au moins des 4 nombres

$\exp(a_i b_j)$ est transcendant.

Ceci est immédiat si le rapport a_1/a_2 est algébrique sur $\underline{\mathbb{Q}}$, ou bien transcendant sur $\underline{\mathbb{Q}}_p$ [5] (corollaires 1.5 et 3.2); la conjecture concerne donc le cas où les rapports a_1/a_2 et b_1/b_2 sont tous les deux à la fois transcendants sur $\underline{\mathbb{Q}}$ et algébriques sur $\underline{\mathbb{Q}}_p$.

Le théorème 1 permet d'établir une relation entre cette conjecture et les algèbres topologiquement de type fini.

THÉORÈME 2. - Soient a_1, a_2 (resp. b_1, b_2) $\in \underline{\mathbb{C}}_p$, $\underline{\mathbb{Q}}$ -linéairement indépendants, tels que $\max_{i,j} |a_i b_j| < p^{-(1/(p-1))}$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $-\log |||Q|||^{a_1/a_2} \leq Ct(Q)$, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{Z}[X, Y]$. Alors, l'un au moins des 4 nombres $\exp_{i,j}(a_i b_j)$ est transcendant.

Preuve. - Supposons algébriques les nombres $\exp(a_i b_j)$, soit $K = \underline{\mathbb{Q}}[\exp(a_i b_j)]$, et soit $t = [K : \underline{\mathbb{Q}}]$. Soit $A = \max(\exp(a_i b_j))$. Soit $\lambda > 0$ tel que

$$(2) \quad \frac{7\lambda A t C}{\lambda^2 - t} < 1.$$

Grâce au lemme de SIEGEL, il est immédiat de construire, pour tout $N \in \underline{\mathbb{N}}$ assez grand, une famille d'entiers $(\alpha_{m,n,N})_{m \leq N, n \leq N}$ de $\underline{\mathbb{Z}}$ telle que

$$s(\alpha_{m,n,N}) \leq \frac{A\lambda t C N^2}{\lambda^2 - t},$$

et telle que

$$\sum_{m,n \leq \lambda N} \alpha_{m,n,N} \exp((ma_1 + na_2)(ib_1 + jb_2)) = 0,$$

pour tous (i, j) tels que $0 \leq i \leq N$ et $0 \leq j \leq N$ [10] (lemme 1.3.1).

Soit $P_N(X, Y) = \sum_{m,n} \alpha_{m,n,N} X^m Y^n$, et soit $F_N(x) = P_N(\exp(a_1 x), \exp(a_2 x))$. Alors, on a $F_N(ib_1 + jb_2) = 0$, pour (i, j) tels que $0 \leq i \leq N$ et $0 \leq j \leq N$, et par suite F_N admet au moins N^2 zéros dans le disque D . D'où, d'après les propriétés des fonctions analytiques [1], on obtient la relation

$$(3) \quad \log \|F_N\|_D \leq -N^2.$$

Or, d'après le théorème 1, on a $\|F_N\|_D = \|\tilde{F}\|^{a_1/a_2}$, et, par hypothèse,

$$-\log |||\tilde{F}|||^{a_1/a_2} \leq Ct(\tilde{P}_N).$$

Mais il est immédiat de voir que $t(\tilde{P}_N) \leq 7t(P_N)$, et donc

$$-\log \|F_N\|_D \leq 7Ct(P_N) \leq \frac{7A\lambda t N^2}{\lambda^2 - t}$$

d'où, grâce à (3), $N^2 \leq (7A\lambda t C N^2 / (\lambda^2 - t))$, ce qui contredit (2), et le théorème 2 est démontré.

3. Minorations d'un polynôme de 2 exponentielles.

Soit $P(X, Y) \in \mathbb{C}_p[X, Y]$, soit $\tilde{P}(X, Y) = \sum_{i,j} a_{i,j} X^i Y^j$, et soit r le plus petit des entiers m tels que $\max_{0 \leq i \leq m} |a_{i,m-i}| > 0$. On notera

$$\hat{P}(X) = \sum_{i=0}^r a_{i,r-i} X^i.$$

THÉORÈME 3. - Soient a et $b \in \mathbb{C}_p$ tels que $|a| \leq |b| = 1/p$. Alors, pour tout polynôme $P(X, Y) \in \mathbb{C}_p[X, Y]$, on a

$$M(P(\exp(ax), \exp(bx)), \frac{1}{p}) \geq |\hat{P}(\frac{a}{b})|.$$

Preuve. - D'après le théorème 1, il s'agit de montrer que $\|P\|^{a/b} \geq |\hat{P}(a/b)|$. Pour cela, soit $\mu > \|\tilde{P}\|^{a/b}$, et montrons que

$$(4) \quad \mu > |\hat{P}(\frac{a}{b})|.$$

Grâce au lemme 1, on voit qu'il existe $G \in \mathfrak{J}$ tel que

$$(5) \quad \|P - G\| < \mu.$$

Alors G s'écrit $J.T$ ($T \in \mathbb{C}_p\{X, Y\}$). Soit $\tilde{P}(X, Y) = \sum_{i,j} \zeta_{ij} X^i Y^j$, soit $G(X, Y) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} X^i Y^j$, et soit $T(X, Y) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} X^i Y^j$.

Par récurrence sur n , on vérifie que, pour chaque couple (i, j) tel que $i + j = n$, les α_{ij} satisfont les relations $(\mathfrak{F}_{i,j})$

$$(\mathfrak{F}_{i,j}) \quad \alpha_{ij} = \left(\frac{b}{p}\right) \lambda_{i,j-1} - \left(\frac{a}{p}\right) \lambda_{i-1,j} + \sum_{s+t \leq n-2} \frac{\omega_{s,t,i,j} a^{\varepsilon_{s,t,i,j}} b^{1-\varepsilon_{s,t,i,j}} p^{3(\sigma_{s,t,i,j} + \tau_{s,t,i,j})}}{(n-s-t)} \lambda_{s,t}$$

$$\text{où } \omega_{s,t,i,j} = 0, 1 \text{ ou } -1,$$

$$\varepsilon_{s,t,i,j} = 0 \text{ ou } 1,$$

$$\max(\sigma_{s,t,i,j}, \tau_{s,t,i,j}) \leq n - s - t - 2,$$

$$\sigma_{s,t,i,j} \varepsilon_{s,t,i,j} = \sigma_{s,t,i,j},$$

$$\tau_{s,t,i,j} (1 - \varepsilon_{s,t,i,j}) = \tau_{s,t,i,j}.$$

Soit $f = \{x \in \mathbb{C}_p, |x| < \mu\}$, et soit $B = U/f$. Pour tout $x \in U$, on notera \bar{x} la classe de x dans B . Alors, d'après (5), on a donc

$$(6) \quad \overline{\zeta_{ij}} = \overline{\alpha_{ij}},$$

quel que soit $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Soit r le plus petit des entiers m tels que $\max_{0 \leq i \leq m} |a_{i,m-i}| > 0$. Alors, d'après $(\mathfrak{F}_{i,j})$, il est immédiat de voir que l'on a $\lambda_{s,t} = 0$, pour tout couple (s, t) tel que $s + t < r - 1$, et par suite, pour $i + j = r$, les relations (\mathfrak{F}_{ij}) nous donnent

$$(\overline{\xi}_{ij}) \quad \overline{\alpha}_{ij} = \left(\frac{\overline{b}}{p}\right) \overline{\lambda}_{i,j-1} - \left(\frac{\overline{a}}{p}\right) \overline{\lambda}_{i-1,j} .$$

D'après (6), on a

$$\overline{\zeta}_{ij} = \left(\frac{\overline{b}}{p}\right) \overline{\lambda}_{i,j-1} - \left(\frac{\overline{a}}{p}\right) \overline{\lambda}_{i-1,j} , \text{ pour } i + j = r .$$

C'est un système de $r + 1$ équations à r inconnues $(\overline{\lambda}_{s,t})_{s+t=r-1}$ à coefficients dans B , et s'il admet une famille solution, le déterminant $\Lambda \in B$ suivant doit être nul.

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \overline{\alpha}_{r,0} & \left(\frac{\overline{b}}{p}\right) & \overline{0} & & & & \overline{0} \\ \overline{\alpha}_{r-1,1} & \left(\frac{\overline{a}}{p}\right) & \left(\frac{\overline{b}}{p}\right) & & & & \overline{0} \\ \overline{\alpha}_{r-2,2} & \overline{0} & \left(\frac{\overline{a}}{p}\right) & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & \left(\frac{\overline{a}}{p}\right) & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \dots & \left(\frac{\overline{b}}{p}\right) & \overline{0} \\ \overline{\alpha}_{1,r-1} & & & & \overline{0} & \left(\frac{\overline{a}}{p}\right) & \left(\frac{\overline{b}}{p}\right) \\ \overline{\alpha}_{0,r} & & & & \overline{0} & \overline{0} & \left(\frac{\overline{a}}{p}\right) \end{vmatrix}$$

Ainsi, on voit que $\sum_{i=0}^r \overline{\zeta}_{i,r-i} \left(\frac{\overline{a}}{p}\right)^i \left(\frac{\overline{b}}{p}\right)^{r-i} = \overline{0}$, d'où

$$\left| \sum_{i=0}^r \overline{\zeta}_{i,r-i} \left(\frac{\overline{a}}{p}\right)^i \right| < \mu .$$

Or $\sum_{i=0}^r \overline{\zeta}_{i,r-i}(X) = \hat{P}(X)$, et la relation (4) est donc établie.

Rappelons que, si μ et $\nu \in \underline{\mathbb{R}}^+$, on note $\mathcal{S}(\mu, \nu)$ [5] l'ensemble des $x \in \underline{\mathbb{C}}_p$ tels qu'il existe $C \in \underline{\mathbb{R}}^+$ vérifiant

$$\log |P(x)| > C((\log H(P))^\mu + (\deg P)^\nu) .$$

Alors, on déduit du théorème 2 le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. - Soient μ et $\nu \in \underline{\mathbb{R}}^+$, et soient a et $b \in \underline{\mathbb{C}}_p$ tels que $|a| \leq |b| = 1/p$ et tels que $a/b \in \mathcal{S}(\mu, \nu)$. Alors, il existe $C \in \underline{\mathbb{R}}^+$ tels que, pour tout $P(X, Y) \in \underline{\mathbb{Z}}[X, Y]$, on ait

$$\log M(P(\exp(ax), \exp(bx)), \frac{1}{p}) \geq C(t(P)^\mu + (\deg P)^\nu) .$$

Preuve. - En effet, d'après le théorème 2, on a

$$M(P(\exp(ax), \exp(bx)), \frac{1}{p}) \geq |\hat{P}\left(\frac{a}{b}\right)| .$$

Or, puisque $a/b \in \mathcal{S}(\mu, \nu)$, il existe $K > 0$ tel que

$$\log |Q\left(\frac{a}{b}\right)| \geq K((\log H(Q))^\mu + (\deg Q)^\nu) , \text{ pour tout } Q \in \underline{\mathbb{Z}}[X] .$$

On peut donc appliquer cette relation à \hat{P} , en remarquant que

$$H(\hat{P}) \leq H(\tilde{P}) = H(P) + 6 \deg P \leq 7 t(P) \quad \text{et} \quad \deg(\hat{P}) \leq \deg(\tilde{P}) = \deg P,$$

et on obtient le corollaire 1 de façon immédiate.

D'autre part, grâce à l'utilisation de la méthode du résultant des 2 polynômes, on peut déduire, du théorème 2, le théorème 3 qui va suivre.

Rappelons d'abord la définition du résultant de deux polynômes.

Soient $P(X) = \sum_{i=0}^m a_i X^i$, et soit $Q(X) = \sum_{j=0}^n b_j X^j \in \mathbb{C}_p[X]$. On note $R(P, Q)$ le déterminant de la matrice carrée d'ordre $m+n$

$$\begin{array}{c} \text{\scriptsize } n\text{-ième colonne} \\ \downarrow \\ \left[\begin{array}{cccccc} a_m & 0 & \dots & 0 & b_n & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & a_m & & \cdot & \cdot & b_n & & \vdots \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\ \cdot & \cdot & & 0 & \cdot & \cdot & & b_n \\ a_0 & \cdot & & a_m & b_1 & \cdot & & \cdot \\ 0 & a_0 & & 0 & b_0 & \cdot & & \cdot \\ \cdot & 0 & & \cdot & 0 & b_0 & & \cdot \\ \cdot & \vdots & & \cdot & \cdot & \vdots & & \cdot \\ \cdot & \vdots & & \cdot & \cdot & \vdots & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & \cdot & \cdot & & b_0 \end{array} \right] \end{array}$$

Alors on sait que $R(P, Q) \neq 0$ si, et seulement si, P et Q sont premiers entre eux [6], et en adaptant la démonstration d'un résultat classique [10] (lemme 5.3.1) au cas ultramétrique, on montre aisément le lemme suivant.

LEMME 2. - Soient $P(X)$ et $Q(X) \in \mathbb{Z}[X]$, soient $m = \deg(P)$ et $n = \deg(Q)$, et soit $\alpha \in \mathbb{C}_p$ tel que $|\alpha| \leq 1$. Alors

$$\frac{1}{(m+n)! H(P)^n H(Q)^m} \leq R(P, Q) < \|P\|^n \|Q\|^m \max(|P(\alpha)|, |Q(\alpha)|).$$

Alors, par un raisonnement apparenté à celui du théorème 5.1.1 de [10], on peut établir la proposition suivante.

PROPOSITION. - Soit une suite de polynômes $Q_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$ telle que

$$\log H(Q_n) \leq kn \quad (k \in \mathbb{R}^+) \quad \text{et} \quad \deg(Q_n) \leq q, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{C}_p$ transcendant sur \mathbb{Q} tel que $|\alpha| \leq 1$. Alors, on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-\log |Q_n(\alpha)|}{2q \log H(Q_n)} \right) \leq 1.$$

Grâce au théorème 3, on en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2. - Soit P_n une suite de $\mathbb{Z}[X, Y]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(0, 0)$ soit un zéro de P_n d'ordre $\leq q$, et telle que

$$\log H(P_n) \leq Kn \quad (K \in \mathbb{R}^+) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\deg(P_n)}{\log(H_n)} = 0 .$$

Soient a et $b \in \mathbb{C}_p$ tels que $|a| \leq |b| = 1/p$, et tels que a/b soit trans-
cendant.

(i) On a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log M(P_n(\exp(ax), \exp(bx)), \frac{1}{p})}{2q \log H(P_n)} \leq 1 .$$

(ii) Il existe une sous-suite $r \rightarrow P_{n_r}$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, le nom-
bre des zéros de $P_{n_r}(\exp(ax), \exp(bx))$ dans D soit majoré par
 $(2q \log H(P_{n_r}))(1 + \varepsilon)$, quand r est assez grand.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Yvette). - Les nombres p -adiques. - Paris, Presses Universitaires de France, 1975 (Collection Sup. "Le Mathématicien", 14).
- [2] ESCASSUT (Alain). - Algèbres d'éléments analytiques en analyse non archimédienne, Nederl. Akad. Wetensch. Proc., Series A, t. 77, 1974, p. 339-351.
- [3] ESCASSUT (Alain). - Algèbres de Banach ultramétriques et algèbres de Krasner-Tate, Astérisque n° 10, 1973, p. 1-107.
- [4] ESCASSUT (Alain). - Eléments spectralement injectifs et générateurs universels dans une algèbre de Tate, Collectanea Math., Barcelona, t. 28, 1977, p. 131-148.
- [5] ESCASSUT (Alain). - Type de transcendance p -adique, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 5e année, 1977/78, n° 8.
- [6] LANG (Serge). - Algebra. - **Reading**, Addison-Wesley publishing Company, 1965 (Addison-Wesley Series in Mathematics).
- [7] LANG (Serge). - Introduction to transcendental numbers. - Reading, Addison-Wesley publishing Company, 1966 (Addison-Wesley Series in Mathematics).
- [8] SERRE (Jean-Pierre). - Dépendance d'exponentielles p -adiques, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 7e année, 1965/66, n° 15, 13 p.
- [9] TATE (John). - Rigid analytic spaces, Invent. Math., Berlin, t. 12, 1971, p. 257-289.
- [10] WALDSCHMIDT (Michel). - Nombres transcendants. - Berlin, Springer-Verlag, 1974 (Lecture Notes in Mathematics, 402).

(Texte reçu le 7 juillet 1978)

Alain ESCASSUT
Laboratoire Math.
et Inform. associé au CNRS
Université de Bordeaux-I
351 cours de la libération
33405 TALANCE