Daniel Bertrand

Une mesure de transcendance liée à la torsion des courbes elliptiques

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 5 (1977-1978), exp. nº 14, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1977-1978__5__A7_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
5e année, 1977/78, n° 14, 9 p.

UNE MESURE DE TRANSCENDANCE LIÉE A LA TORSION DES COURBES ELLIPTIQUES

par Daniel BERTRAND

1. Introduction.

(a) Position du problème.

Une fois démontrée la transcendance d'un nombre donné γ , on est conduit (en vue de résultats d'indépendance algébrique, par exemple) à en établir une mesure de transcendance. Il s'agit de minorer le terme d'erreur, dans l'approximation de γ par un nombre algébrique α , en fonction du degré et de la hauteur de α .

Les démonstrations de mesures de transcendance suivent le schéma des démonstrations de transcendance correspondantes. Mais ces dernières utilisent des arguments qualitatifs (et apparemment non effectifs), tels que le principe des zéros isolés, et ces points doivent être quantifiés. Voici quelques techniques permettant d'y parvenir.

1° estimation des coefficients d'un polynôme auxiliaire ;

2° preuve de la non-nullité de certains déterminants, et, plus généralement :

3° majoration des multiplicités locales d'une "fonction auxiliaire" ;

4° appel à un argument galoisien.

L'utilisation de ces techniques est désormais classique lorsque le nombre γ est lié à la fonction exponentielle (voir [1] ; la troisième est, plus généralement, à la base de l'étude des E-fonctions satisfaisant un système d'équations différentielles linéaires). Dans le domaine des fonctions elliptiques, les deux premières techniques ont été introduites par FEL'DMAN (voir [10], p. 168 ; [11], lemmes 2 et 3 ; [12], lemme 3) ; la première a été considérablement développée par MASSER [13] ; la troisième est due, pour l'essentiel, à BROWNAWELL et MASSER (cf. [5] ; un cas particulier avait été traité par GEL'FOND, voir le lemme 4 de [10]). La quatrième technique a été élaborée par COATES dans [8]. Mais elle n'a pas encore été poussée jusqu'à l'obtention d'une mesure de transcendance où la dépendance en le degré de α soit explicite. C'est ce que nous nous proposons de faire ici.

L'exemple que nous avons choisi est tiré de la théorie analytique des courbes elliptiques de Tate.

(b) Enoncé des résultats.

Soient K un corps de nombres, v une place finie de K et E une courbe elliptique définie sur K . On suppose que E a mauvaise réduction de type multiplicatif en v . La valuation v-adique de l'invariant modulaire j de E est alors

< 0 , et il existe un élément q du complété K_v de K en v , de valuation > 0 , tel que

$$j = J(q) = (1 + 240 \sum_{n>0} n^3 q^n/(1 - q^n))^3/(q\prod_{n>0} (1 - q^n)^{24}) .$$

Quitte à faire une extension finie de K_v , on peut supposer la courbe $E(K_v)$ isomorphe à la courbe de Tate $K_v^\times/q^{\mathbb{Z}}$. L'isomorphisme est donné par la fonction elliptique de Tate (normalisée)

$$\varphi(z) = (\gamma(q))^2[\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{q^n z}{(1 - q^n z)^2} + \frac{1}{12} - 2\sum_{n\geq 1} \frac{q^n}{(1 - q^n)^2}]$$

et sa dérivée pour l'opérateur de dérivation $\Delta = \gamma(q)z(d/dz)$, où l'on a posé

$$\gamma = \gamma(q) = (-(q(d/dq)J(q))/J(q))^{-(1/2)} .$$

Plus précisément, φ est q-périodique et vérifie

$$(\Delta\varphi)^2 = 4\varphi^3 - \frac{j}{12(j - 1728)}\varphi + \frac{j}{216(j - 1728)} .$$

Le résultat principal de [3] énonce que γ est transcendant. Nous donnons ci-dessus une mesure de transcendance pour γ . On rappelle que la <u>hauteur</u> (logarithmique) d'un nombre algébrique désigne le logarithme du maximum des modules des coefficients de son polynôme minimal sur $\mathbb{Z}$. D'autre part, on note $|\ |$ le prolongement à une cloture algébrique $\overline{K_v}$ de K_v de la valeur absolue normalisée de K_v .

THÉORÈME 1. - <u>Il existe un nombre réel</u> $c_1 > 0$ <u>ne dépendant que de</u> q <u>et vérifiant la propriété suivante : Pour tout nombre algébrique</u> α <u>de degré</u> d <u>et de hauteur</u> h , <u>on a</u>

$$|\gamma(q) - \alpha| > \exp(- c_1 d(d + h)^2 (\log(d + h))^2) .$$

Ce résultat peut être précisé lorsque le nombre α est soumis à certaines conditions algébriques. On note $K(E_\infty)$ le corps engendré sur K par les coordonnées des ppints de torsion de E .

THÉORÈME 2. - <u>Il existe un nombre réel</u> $c_2 > 0$ <u>ne dépendant que de</u> q <u>et vérifiant la propriété suivante : Pour tout nombre algébrique</u> α <u>de degré</u> d , <u>de hauteur</u> h <u>et tel que</u> $K(\alpha) \cap K(E_\infty) = K$, <u>on a</u>

$$|\gamma(q) - \alpha| > \exp(- c_2(d + h)^2 (\log(d + h))^2) .$$

La démonstration de ces résultats comporte une construction classique exposée au § 2. Les nouveaux arguments sont rassemblés au § 3. Le théorème 1 ayant été démontré pour l'essentiel dans [4], § 4, nous avons surtout développé la preuve du théorème 2.

(c) <u>Remarques</u>.

Nous discutons maintenant les énoncés des théorèmes 1 et 2.

Remarque 1 (cas complexe). - L'analogue complexe du nombre γ est égal, à un facteur algébrique près, au quotient par π d'une période de la fonction elliptique de Weierstrass associée à E. Au moyen de la première technique décrite plus haut, REYSSAT a obtenu pour cet analogue complexe un énoncé similaire au théorème 2, mais valable sans restriction sur α (voir [15], théorème 2).

Remarque 2 (questions d'effectivité). - Le résultat de SERRE ([16], IV, § 3.2, théorème, et, plus généralement, [17], théorème 3), sur lequel repose la démonstration, et, par conséquent, les constantes c_1 et c_2 des théorèmes 1 et 2 ne sont en général pas effectifs. Mais, comme nous nous sommes placés dans le cas où j n'est pas entier, ces résultats deviennent effectifs lorsque l'on suppose, par exemple, que E est définie sur $\mathbb{Q}$ (voir [17], corollaire 1 de la proposition 21, et proposition 24).

Remarque 3 (amélioration du théorème 2). - Soit p un nombre premier quelconque, et $K(E_{p^\infty})$ le corps engendré sur K par les coordonnées des points de torsion de E d'ordre une puissance de p. Ainsi que me l'a suggéré J. COATES, on peut remplacer, dans l'énoncé du théorème 2, la condition $K(\alpha) \cap K(E_\infty) = K$ par l'hypothèse moins restrictive $K(\alpha) \cap K(E_{p^\infty}) = K$ (la constante c_2 dépendant alors de p). En particulier, la conclusion du théorème 2 est valable si l'on suppose seulement que le degré de α sur K est premier à 6.

2. La construction standard.

Soit α un nombre algébrique de degré d et de hauteur h. On désigne par t la somme $d + h$, par $c_3, c_4, \ldots$ des nombres réels > 0 ne dépendant que de q, par ν un entier $> c_3$ et par $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de K. On se propose de montrer que, si $K(\alpha) \cap K(E_\infty) = K$, l'inégalité

$$(*) \qquad |\gamma - \alpha| < \exp(-\nu^7 t^2 (\log t)^2)$$

conduit à une contradiction. Le théorème 2 en résultera.

LEMME 1. - On suppose $(*)$ satisfaite, et on pose

$$L_1 = k = \nu^3 [t \log t] , \quad L_2 = 2\nu , \quad \delta = [K(\alpha) : K] , \quad H = \nu^4 (t^2/d)(\log t)^2 .$$

Il existe des éléments $p_{\lambda_1,\lambda_2,\mu}$ de $\mathcal{O}$ non tous nuls, de hauteur $\leq c_4 H$, tels que la fonction

$$F(z) = \sum_{\lambda_1=0,\ldots,L_1;\lambda_2=0,\ldots,L_2;\mu=0,\ldots,\delta-1} p_{\lambda_1,\lambda_2,\mu} \alpha^\mu z^{\lambda_1} \varphi^{\lambda_2}(z)$$

vérifie, pour tout élément ζ de $\overline{K_v}$ tel que $|\zeta| = |1 - \zeta| = 1$, et tout entier s tel que $0 \leq s \leq k$,

$$|\Delta^s F(\zeta)| < \exp(-\nu^6 t^2 (\log t)^2) .$$

[Pour démontrer le théorème 1, on posera $L_1 = \nu^3\, d[t \log t] = k$, $L_2 = 2\nu d$, $H = \nu^4\, t^2(\log t)^2$ et (c'est la principale différence, voir [4], théorème 2) $\delta = 1$. On obtient $|\gamma - \alpha| > \exp(-\nu^7\, dt^2(\log t)^2)$.]

Démonstration. - Pour tout entier $s \geq 0$, on associe, à la dérivée s-ième de la fonction F par rapport à l'opérateur Δ

$$\Delta^s F(z) = \sum_{\lambda_1,\lambda_2,\mu} p_{\lambda_1,\lambda_2,\mu}\, \alpha^\mu \sum_{\sigma=0,\dots,s} \binom{s}{\sigma} (\gamma\lambda_1)^\sigma z^{\lambda_1} \Delta^{s-\sigma} \varphi^{\lambda_2}(z) ,$$

la fonction

$$\Lambda^s F(z) = \sum_{\lambda_1,\lambda_2,\mu} p_{\lambda_1,\lambda_2,\mu}\, \alpha^\mu \sum_{\sigma=0,\dots,s} \binom{s}{\sigma} (\alpha\lambda_1)^\sigma z^{\lambda_1} \Delta^{s-\sigma} \varphi^{\lambda_2}(z) .$$

Soit $S = \nu^4[t \log t]$. On construit F de telle sorte que

$$\forall\, s = 0 , \dots , S , \quad \Lambda^s F(-1) = 0 .$$

Il s'agit de résoudre dans $\mathcal{O}$ un système $\delta(S+1)$ équations à $(L_1+1)(L_2+1)\delta$ inconnues dont les coefficients sont des éléments de K qu'on évalue au moyen du lemme 2 de [10] (on a supposé, ce qui ne restreint pas la généralité, que K contient $\varphi(-1)$). Le lemme 4 de [14] (voir également [7], lemme 4.8 et [15], lemme 3.2) permet d'en choisir une solution non triviale formée d'éléments de $\mathcal{O}$ de hauteur majorée par

$$c_4(h(S/d) + S(\log S + \log L_1 + \log d) + L_2) \leq c_4 H .$$

Soit $\Theta(z)$ la fonction $(1 - z^{-1})\prod_{n\geq 1} (1 - q^n z)(1 - q^n z^{-1})$. La fonction $f = \Theta^{2L_2} F$ est entière sur $K_v^\times$ et vérifie, pour tout entier $n \geq 0$ (voir [3], démonstration du lemme 1),

$$\|f\|_n \leq c_5^{L_1 n + L_2 n^2} ,$$

où $\|f\|_n$ désigne le maximum de $|f(z)|$ lorsque z parcourt la couronne $\mathcal{C}_n = \{z \in \overline{K_v} \; ; \; |q|^n < |z| < |q|^{-n}\}$.

Les formules de Cauchy appliquées au disque $|z + 1| < 1$ entrainent, pour tout entier $s \geq 0$, $|\Delta^s\, \Theta^{2L_2}(-1)| \leq 1$. Si $s \leq S$, on a, en vertu de l'inégalité (*),

$$|\Delta^s F(-1) - \Lambda^s F(-1)| < \exp(-\nu^7\, t^2(\log t)^2) .$$

On déduit donc de la construction de F :

$$\forall\, s = 0 , \dots , S , \quad |\Delta^s f(-1)| < \exp(-\nu^7\, t^2(\log t)^2) .$$

Le lemme d'approximation énoncé plus bas (lemme 2) entraîne alors, lorsqu'on donne à l'entier N la valeur $\nu^2[t \log t]$,

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_n \leq \exp(-\nu^6\, t^2(\log t)^2) ,$$

et la conclusion du lemme 1 découle des formules de Cauchy.

LEMME 2. - <u>Soient</u> N <u>un entier</u> ≥ 0 , <u>et</u> f <u>une fonction entière sur</u> $\mathcal{C}_{2N}$. <u>On a</u>

$$\|f\|_n \leq \sup(|q|^{SN/4} \|f\|_{2N} , |q|^{-2SN} \sup_{0\leq s<S} |\frac{\Delta^s f(-1)}{s!}|) .$$

Démonstration. - Soit P le polynôme à une variable de degré s tel que, pour $s = 0 , \ldots , S-1$, $\Delta^s P(-1) = \Delta^s f(-1)$. D'après le lemme 2 de [3] (lemme de Schwarz sur les couronnes), on a

$$\|f - P\|_N \leq (|q|^{-N}/|q|^{-2N})^{S/4} \|f - P\|_{2N} ,$$

d'où

$$\|f\|_N \leq \sup(|q|^{SN/4} \|f\|_{2N} , \|P\|_{2N}) .$$

Or $P(z) = \sum_{s=0,\ldots,S-1} (d/dz)^s P(-1)(z+1)^s/s!$. On conclut en notant que la matrice de passage des opérateurs $z^s(d/dz)^s$ aux opérateurs $(z(d/dz))^s$ est à coefficients entiers (elle s'exprime à l'aide des nombres de Stirling, voir par exemple [9], et est unimodulaire) et que les nombres -1 et γ sont des unités v-adiques.

3. L'argument galoisien.

(a) Rappels.

Soient ℓ un nombre premier, $\mathbb{F}_\ell$ le corps à ℓ éléments, ζ_ℓ une racine primitive ℓ-ième de l'unité, E_ℓ le $\mathbb{F}_\ell$-espace vectoriel de dimension 2 formé des points de ℓ-torsion de la courbe E , et $K(E_\ell)$ l'extension galoisienne de K engendrée par les coordonnées des éléments de E_ℓ . Si $q^{1/\ell}$ désigne une racine ℓ-ième de q , $K(E_\ell)$ est engendré sur K par $\varphi(\zeta_\ell)$, $\Delta\varphi(\zeta_\ell)$, $\varphi(q^{1/\ell})$ et $\Delta\varphi(q^{1/\ell})$. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K(E_\ell)/K)$ opère de façon naturelle sur E_ℓ . Cette action est donnée par un homomorphisme injectif

$$\rho_\ell : \mathrm{Gal}(K(E_\ell)/K) \longrightarrow GL_2(\mathbb{F}_\ell)$$

qui associe à l'élément σ de $\mathrm{Gal}(K(E_\ell)/K)$ la matrice $\rho_\ell(\sigma) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ définie par

$$\sigma(\varphi(\zeta_\ell)) = \varphi(\zeta_\ell^a\, q^{b/\ell}) , \quad \sigma(\Delta\varphi(\zeta_\ell)) = \Delta\varphi(\zeta_\ell^a\, q^{b/\ell}) ;$$
$$\sigma(\varphi(q^{1/\ell})) = \varphi(\zeta_\ell^c\, q^{d/\ell}) , \quad \sigma(\Delta\varphi(q^{1/\ell})) = \Delta\varphi(\zeta_\ell^c\, q^{d/\ell}) .$$

Le corps $K(E_\ell)$ contient $K(\zeta_\ell)$, sur lequel σ agit par la formule

$$\sigma(\zeta_\ell) = \zeta_\ell^{\,\mathrm{dét}(\rho_\ell(\sigma))} .$$

D'après un résultat fondamental de SERRE, il existe un entier ℓ_0 ne dépendant que de E et de K tel que, pour $\ell > \ell_0$, l'homomorphisme ρ_ℓ soit surjectif, puisque l'invariant modulaire de E n'est pas entier ([16], IV, § 3.2) ou, plus généralement, puisque E n'a pas de multiplication complexe ([17], théorème 2). Voici, pour $\ell > \ell_0$, quelques conséquences de ce résultat.

(C.1) Parmi les différents plongements de $K(\zeta_\ell , \varphi(\zeta_\ell) , \Delta\varphi(\zeta_\ell))$ dans $\overline{K_v}$ apparaissent les $\ell - 1$ plongements σ_a , $a = 1 , \dots , \ell - 1$, associés aux éléments $\rho_\ell^{-1}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $Gal(K(E_\ell)/K)$.

Ces éléments σ_a vérifient, en particulier, la propriété suivante.

(C.2) $\forall\ a = 1 , \dots , \ell - 1 , \quad \sigma_a(\zeta_\ell) = \zeta_\ell^a , \quad \sigma_a(\varphi(\zeta_\ell)) = \varphi(\zeta_\ell^a)$.

Les sous-groupes $\rho_\ell(Gal(K(E_\ell)/K(\zeta_\ell)) \simeq SL_2(\mathbb{F}_\ell)$ et

$$\rho_\ell(Gal(K(E_\ell)/K(\varphi(\zeta_\ell) , \Delta\varphi(\zeta_\ell)))) \simeq \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} ; \quad c \in \mathbb{F}_\ell , \quad d \in \mathbb{F}_\ell^\times\}$$

engendrent $GL_2(\mathbb{F}_\ell)$. Par conséquent, les extensions $K(\varphi(\zeta_\ell) , \Delta\varphi(\zeta_\ell))$ et $K(\zeta_\ell)$ sont disjointes sur K , et l'on a

(C.3) $[K(\zeta_\ell , \varphi(\zeta_\ell)) : K(\zeta_\ell)] = [K(\varphi(\zeta_\ell)) : K] = (\ell^2 - 1)/2$.

Ces remarques sont suffisantes pour conclure la preuve du théorème 1 (voir [3], § 4). Pour obtenir l'inégalité du théorème 2, on a été amené, lors de la construction de F (voir le choix de δ), à prendre pour corps de base $K(\alpha)$ et non K . Dans la démonstration qui suit, le nombre ℓ est lié à l'entier ν qui doit être indépendant de α . C'est pourquoi nous avons imposé la restriction

$$K(\alpha) \cap K(E_\infty) = K$$

que nous supposerons désormais satisfaite. Elle entraîne, pour l'extension galoisienne $K(\alpha , E_\ell)$ de $K(\alpha)$,

(**) $$Gal(K(\alpha , E_\ell)/K(\alpha)) \simeq Gal(K(E_\ell)/K) ,$$

ce qui permet, dans les énoncés (C.1), (C.2) et (C.3), de remplacer le corps K par $K(\alpha)$ tout en conservant l'hypothèse

$$\ell > \ell_0 = \ell_0(E , K) ,$$

c'est-à-dire, avec les notations du § 2, $\ell > c_6$.

(b) <u>Fin de la démonstration.</u>

Soit ℓ un nombre premier tel que

$$3L_2 \leqslant \ell^2 < 12L_2 .$$

On reprend les notations ζ_ℓ , E_ℓ , ... introduites à l'alinéa précédent et on pose, pour $\lambda_2 = 0 , \dots L_2$,

$$P_{\lambda_2}(z) = \sum_{\lambda_1=0,\dots,L_1 ; \mu=0,\dots,\delta-1} p_{\lambda_1,\lambda_2,\mu}\, \alpha^\mu z^{\lambda_1} .$$

On se propose de montrer, à partir du lemme 1, que, pour tout entier s compris entre 0 et k , la propriété suivante est satisfaite.

(I_s) $$\forall \lambda_2 = 0 , \dots , L_2 , \quad \Delta^s p_{\lambda_2}(\zeta_\ell) = 0 .$$

D'après (**), $\mathrm{Gal}(K(\alpha , \zeta_\ell)/K(\alpha))$ est isomorphe à $\mathrm{Gal}(K(\zeta_\ell)/K)$, c'est-à-dire, pour $\ell > c_6$, à $\underset{\sim}{F}_\ell^\times$. Chacun des polynômes p_{λ_2} admet alors les $\ell - 1$ conjugués ζ_ℓ^a , $a = 1 , \dots , \ell - 1$, de ζ_ℓ pour zéro d'ordre $> k$. Or $k(\ell - 1) > L_1$ et $\delta - 1 < [K(\alpha) : K]$. Les coefficients $p_{\lambda_1,\lambda_2,\mu}$ sont donc tous nuls. Ceci contredit la construction du lemme 1 et conclut la démonstration du théorème 2.

<u>Démonstration de</u> (I_0). – Pour $\nu > c_7$, les nombres ζ_ℓ^a et $1 - \zeta_\ell^a$ sont des unités v-adiques. Le lemme 1 entraîne donc :

$$\prod_{a=1,\dots,\ell-1} |F(\zeta_\ell^a)| < \exp(- \nu^6(\ell - 1)t^2(\log t)^2) .$$

Supposons que $F(\zeta_\ell)$ soit non nul et posons $K_\ell = K(\zeta_\ell , \varphi(\zeta_\ell) , \Delta\varphi(\zeta_\ell))$. Le nombre $N_{K_\ell(\alpha)/K(\alpha)} F(\zeta_\ell)$ est un élément non nul de $K(\alpha)$ qui s'écrit comme un polynôme en α , de degré $\leq \ell^3 \delta$, dont les coefficients sont des éléments de K admettant $(c_{14} \ell^2)^{L_2\ell^3}$ pour dénominateur commun, et de hauteurs majorées par

$$N = c_{10} \ell^3(c_4 H + c_8 L_2 \log \ell) .$$

Un lemme classique de FEL'DMAN, que la démonstration donnée **dans** [7], lemme 1.10, permet de transposer sans difficulté au cas p-adique, entraîne alors

$$|N_{K_\ell(\alpha)/K(\alpha)} F(\zeta_\ell)| > \exp(- c_{11}(\ell^3 \delta h + \delta N)) > \exp(- c_{12} \ell^3 \nu^4 t^2(\log t)^2) .$$

En vertu de l'énoncé (C.1) et de (**), la norme de $F(\zeta_\ell)$, relativement à l'extension $K_\ell(\alpha)/K(\alpha)$, s'écrit

$$N_{K_\ell(\alpha)/K(\alpha)} F(\zeta_\ell) = \prod_{a=1,\dots,\ell-1} \sigma_a(F(\zeta_\ell)) \prod_{\sigma\neq\sigma_a} \sigma(F(\zeta_\ell)) ,$$

où, dans le deuxième produit, σ parcourt l'ensemble des plongements de $K_\ell(\alpha)$ dans $\overline{K_v}$ laissant fixe $K(\alpha)$ et différents de $\sigma_1 , \dots , \sigma_{\ell-1}$. Pour traiter le premier produit, on note que, d'après (C.2) et (**),

$$\forall\ a = 1 , \dots , \ell - 1 , \quad \sigma_a(F(\zeta_\ell)) = F(\zeta_\ell^a) .$$

D'autre part, $|\sigma(F(\zeta_\ell))| < \exp(c_{13} L_2 \log \ell)$, pour tout plongement σ , puisque $\varphi(\zeta_\ell)$ admet $c_{14} \ell^2$ pour dénominateur. On obtient, en regroupant les résultats précédents,

$$|\prod_{a=1,\dots,\ell-1} F(\zeta_\ell^a)| > \exp(- c_{15} \ell^3 \nu^4 t^2(\log t)^2) ,$$

ce qui, ℓ^2 étant majoré par 12ν , est incompatible avec la majoration obtenue plus haut.

Ainsi, $F(\zeta_\ell)$ est nul, et $\varphi(\zeta_\ell)$ vérifie une équation algébrique de degré

$\leq L_2 < (\ell^2 - 1)/2$ sur le corps $K(\alpha, \zeta_\ell)$. D'après (C.3) et (**), les coefficients $p_{\lambda_2}(\zeta_\ell)$, $\lambda_2 = 0, \ldots, L_2$, de cette équation sont nécessairement nuls, et I_0 est satisfaite.

Le cas général. - On termine la démonstration par récurrence. Soit s un entier $\leq k$ et supposons que, pour $\sigma = 0, \ldots, s-1$, la propriété (I_σ) soit satisfaite. Alors

$$\Delta^s F(\zeta_\ell) = \sum_{\lambda_2=0,\ldots,L_2} (\Delta^s p_{\lambda_2}(\zeta_\ell))\varphi^{\lambda_2}(\zeta_\ell)$$

et si $D = z(d/dz) = \gamma^{-1}\Delta$, le nombre $D^s F(\zeta_\ell)$ est un élément de $K_\ell(\alpha)$ qui vérifie

$$\forall\, a = 1, \ldots, \ell - 1, \quad \sigma_a(D^s F(\zeta_\ell)) = D^s F(\zeta_\ell^a) .$$

La norme $N_{K_\ell(\alpha)/K(\alpha)} D^s F(\zeta_\ell)$ s'écrit comme un polynôme en α de degré $\leq \ell^3 \delta$ dont les coefficients sont des éléments de K, admettant $(c_{14}\,\ell^2)^{2L_2\ell^3}$ pour dénominateur commun et de hauteurs majorées par

$$c_{16}\,\ell^3(c_4 H + c_8 L_2 \log \ell + k \log L_1) \leq N .$$

En reprenant le raisonnement précédent, on déduit du lemme 2 que $D^s F(\zeta_\ell) = 0$. Cette égalité, jointe à (C.3) et (**), entraîne que, pour $\lambda_2 = 0, \ldots, L_2$, les nombres $D^s p_{\lambda_2}(\zeta_\ell)$ sont nuls et (I_s) est vérifiée. Le théorème 2 est donc démontré.

Remarque 4. - Pour démontrer l'assertion annoncée à la remarque 3, on considère la représentation p-adique ρ_p de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ sur le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel associé à l'ensemble E_{p^∞}. D'après [16], IV, § 2.2, l'indice de $\rho_p(\mathrm{Gal}(K(E_{p^n})/K))$ dans $GL_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ est borné, lorsque n parcourt $\mathbb{N}$, par une constante c_{17} ne dépendant que de E, K et p. On remplacera le nombre premier ℓ de la démonstration précédente par un entier n tel que $3c_{17} L_2 \leq p^{2n} < 3c_{17}\, p^2 L_2$.

Remarque 5. - L'action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ sur les valeurs de la fonction auxiliaire (voir la relation (C.2)) a joué un rôle fondamental dans la démonstration. Une étude systématique de ce type de situation est exposée dans [2], III, 1°. On pourra rapprocher son principe de la méthode des "fonctions auxiliaires conjuguées" de [6].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAKER (A.). - Transcendental number theory. - Cambridge, Cambridge University Press, 1975.

[2] BERTRAND (D.). - Méthodes algébriques et démonstrations de transcendance locales, Séminaire de Théorie des Nombres, Bordeaux, 1974/75, n° 19.

[3] BERTRAND (D.). - Séries d'Eisenstein et transcendance, Bull. Soc. math. France, t. 104, 1976, p. 309-321.

[4] BERTRAND (D.). - Modular functions and transcendence, Proceedings of the conference on p-adic analysis [1978. Nijmegen], Math. Inst. Kath. Univ. Report 7806, 1978.

[5] BROWNAWELL (W. D.). - Sur les multiplicités des zéros de certaines fonctions, conférence donnée à Paris en Mars 1978.

[6] CHOODNOVSKI (G. V.). - A new method for the investigation of arithmetical properties of analytic functions, Preprint IHES, 1977.

[7] CIJSOUW (P. L.). - Transcendence measures, Thèse Univ. Amsterdam, 1972.

[8] COATES (J.). - An application of the division theory of elliptic functions to diophantine approximations, Inv. Math., Berlin, t. 11, 1970, p. 167-182.

[9] COMTET (L.). - Analyse combinatoire, tomes 1 et 2. - Paris, Presses universitaires de France, 1970 (Collection SUP. "Le Mathématicien", 4 et 5).

[10] FEL'DMAN (N. I.). - Approximation de certains nombres transcendants, II [en russe], Izvestia Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., t. 15, 1951, p. 153-176.

[11] FEL'DMAN (N. I.). - Sur les approximations simultanées des périodes d'une fonction elliptique par des nombres algébriques [en russe], Izvestia Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., t. 22, 1958, p. 563-576.

[12] FEL'DMAN (N. I.). - Un analogue elliptique d'une inégalité d'A. O. GEL'FOND [en russe], Trudy Mosk. Mat. Ob., t. 18, 1968, p. 65-76.

[13] MASSER (D.). - Elliptic functions and transcendence. - Berlin, Springer-Verlag, 1975 (Lecture Notes in Mathematics, 437).

[14] MIGNOTTE (M.) and WALDSCHMIDT (M.). - Linear forms in two logarithms and Schneider's method, Math. Annalen, t. 231, 1978, p. 241-267.

[15] REYSSAT (E.). - Mesures de transcendance de nombres liés aux fonctions elliptiques, Thèse 3e cycle, Univ. Paris-VI, 1977.

[16] SERRE (J.-P.). - Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves. - New York, Benjamin, 1968.

[17] SERRE (J.-P.). - Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques, Inv. Math., Berlin, t. 15, 1972, p. 259-331.

(Texte reçu le 4 septembre 1978)

Daniel BERTRAND
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau
91128 PALAISEAU CEDEX