GROUPE DE TRAVAIL
D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

JEAN-PAUL BEZIVIN

Systèmes d'équations analytiques

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 5 (1977-1978), exp. nº 5, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1977-1978__5__A3_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
5e année, 1977/78, n° 5, 5 p.

28 novembre 1977

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS ANALYTIQUES

par Jean-Paul BEZIVIN

(d'après G. I. GUSEV [1])

Résumé. - On expose un article de G. I. GUSEV, sur les solutions d'un système d'équations analytiques. GUSEV se donne n séries restreintes en n variables, G_i , à coefficients dans l'anneau de valuation d'un corps ultramétrique localement compact K , et étudie le système $G_i(x) = 0$.

1. Définitions et notations.

Soit A un anneau commutatif unitaire, et n et m deux entiers non nuls. Soit B un sous-ensemble de $A^m \times A^n$. Pour α parcourant un certain ensemble d'indices Λ , on note $\bar{M}_\alpha = (M_{\alpha,1} , \ldots , M_{\alpha,m})$ et $\bar{N}_\alpha = (N_{\alpha,1} , \ldots , N_{\alpha,n})$, deux familles de m-uplets et n-uplets d'idéaux de A .

Définition 1. - On dira que B est concordant pour le système $(\bar{M}_\alpha , \bar{N}_\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$, si la condition suivante est réalisée : $\forall\ x = (x_1 , \ldots , x_{n+m})$, $\forall\ y = (y_1 , \ldots , y_{n+m})$, x et $y \in B$, la relation

$$x_i \equiv y_i \ [M_{\alpha,i}] , \quad \forall\ \alpha , \quad \forall\ i \in (1 , m)$$
$$\text{implique} \quad x_{j+m} \equiv y_{j+m} \ [N_{\alpha,j}] , \quad \forall\ \alpha \in \Lambda , \quad \forall\ j \in (1 , n) .$$

Définition 2. - On dira que B est totalement concordant si la propriété réciproque est vérifiée : $\forall\ x$ et $\forall\ y$ dans B , si l'on a

$$x_{j+m} \equiv y_{j+m} \ [N_{\alpha,j}] , \quad \forall\ \alpha , \quad \forall\ j ,$$

alors

$$x_i \equiv y_i \ [M_{\alpha,i}] , \quad \forall\ \alpha , \quad \forall\ i .$$

Dans la suite, on prendre $A = V$, anneau de valuation d'un corps ultramétrique localement compact K , on fera $n = m$, et on prendra B comme image d'une application de V^n dans $V^n \times V^n$, notée $H = (F_1 , \ldots , F_n , G_1 , \ldots , G_n)$. On notera $\bar{F}\ \mathcal{S}\ \bar{G}\ [\bar{M}_\alpha , \bar{N}_\alpha]$ si B est concordant, et $\bar{F}\ \mathcal{R}\ \bar{G}$ s'il est totalement concordant, avec $\bar{F} = (F_1 , \ldots , F_n)$ et $\bar{G} = (G_1 , \ldots , G_n)$.

On note π une uniformisante de V , et ρ sa valeur absolue. La valuation sera notée v , et supposée normalisée par $v(\pi) = 1$. Tout idéal de V est principal, et engendré par une puissance de π . L'idéal maximal de V est noté $\mathfrak{P}$.

2. Propriétés des systèmes concordants et totalement concordants.

PROPOSITION 1. - On suppose que l'on a deux applications $\bar{F}$ et $\bar{T}$ de V^n dans V^n , et n suites d'entiers $d_k^{(i)}$ non décroissantes, telles que :

(a) $\bar{T}(x) \equiv 0 \quad [(\wp^{d_1^{(i)}})]$,

(b) $\bar{F} \mathrel{S} \bar{T} \quad [(\wp^{d_k^{(i)}}), (\wp^{d_{k+1}^{(i)}})]$.

Alors, si l'on pose $\bar{G} = \bar{F} + \bar{T}$, on a $\bar{F} \mathrel{R} \bar{G} \quad [(\wp^{d_k^{(i)}}), (\wp^{d_k^{(i)}})]$.

Preuve. - On procède par récurrence sur l'entier k . Pour $k = 1$, la propriété est triviale. Supposons que

$$\bar{F}(x) \equiv \bar{F}(y) \quad [\wp^{d_k^{(i)}}] \Longleftrightarrow \bar{G}(x) \equiv \bar{G}(y) \quad [\wp^{d_k^{(i)}}] ,$$

et soient x et y dans V^n tels que $\bar{F}(x) \equiv \bar{F}(y) \quad [\wp^{d_{k+1}^{(i)}}]$. On a alors, par l'hypothèse (b), $\bar{T}(x) \equiv \bar{T}(y) \quad [\wp^{d_{k+2}^{(i)}}]$, donc $\bar{T}(x) \equiv \bar{T}(y) \quad [\wp^{d_{k+1}^{(i)}}]$ puisque les suites $d_k^{(i)}$ sont non décroissantes, et par suite

$$\bar{G}(x) \equiv \bar{G}(y) \quad [\wp^{d_{k+1}^{(i)}}] .$$

Supposons maintenant que $\bar{G}(x) \equiv \bar{G}(y) \quad [\wp^{d_{k+1}^{(i)}}]$. On a alors $\bar{G}(x) \equiv \bar{G}(y) \quad [\wp^{d_k^{(i)}}]$ donc, par l'hypothèse de récurrence, $\bar{F}(x) \equiv \bar{F}(y) \quad [\wp^{d_k^{(i)}}]$, et par suite $\bar{T}(x) \equiv \bar{T}(y) \quad [\wp^{d_{k+1}^{(i)}}]$, donc que

$$\bar{F}(x) \equiv \bar{F}(y) \quad [\wp^{d_{k+1}^{(i)}}]$$

par différence.

Remarque 1. - Ici le résultat est valable dans un anneau quelconque, l'idéal $\wp$ et les suites d'entiers étant fixées comme ci-dessus.

PROPOSITION 2. - *On se donne n suites d'entiers $d_k^{(i)}$ telles que $d_k^{(i)} \longrightarrow +\infty$, si $k \longrightarrow +\infty$, et deux fonctions $\bar{F}$ et $\bar{G}$ de V^n dans V^n telles que :*

(a) $\bar{G} \mathrel{S} \bar{F} \quad [(\wp^{d_k^{(i)}}), (\wp^{d_k^{(i)}})]$,

(b) $\bar{G}$ *est continue,*

(c) $\bar{G}(V^n) \subset \bar{F}(V^n)$.

Alors on a $\bar{G}(V^n) = \bar{F}(V^n)$.

Preuve. - Soit x_0 dans V^n , il s'agit de montrer qu'il existe z_0 dans V^n tel que $\bar{F}(x_0) = \bar{G}(z_0)$. Pour cela, on réalise la partition de $\bar{F}(V^n)$ et de $\bar{G}(V^n)$ modulo $[\wp^{d_k^{(i)}}]$ en classes $K_1^{(k)}, \ldots, K_{t_k}^{(k)}$ et $L_1^{(k)}, \ldots, L_{s_k}^{(k)}$ respectivement. On montre d'abord qu'il y a le même nombre de classes. Il est clair que, $\forall\, i \in [1 , s_k]$, il existe un unique $j \in [1 , t_k]$ tel que $L_i^{(k)} \subset K_j^{(k)}$. On en déduit que $t_k \geqslant s_k$.

Soient maintenant $x_1, \dots, x_{t_k}$ dans V^n , tels que les $\bar{F}(x_j)$ constituent des représentants des classes $K_j^{(k)}$. D'après la condition (a), il est clair que les $\bar{G}(x_j)$ sont non congrus modulo $[\wp^{d_k^{(i)}}]$, donc $s_k \geqslant t_k$, et l'égalité annoncée.

Dans la classe de $\bar{F}(x_0)$, il existe donc un élément de $\bar{G}(V^n)$, donc, pour tout k , il existe un z_k dans V^n tel que $\bar{G}(z_k) \equiv \bar{F}(x_0)$ $[\wp^{d_k^{(i)}}]$. Puisque V est supposé compact, il existe une sous-suite convergente de z_k de limite z_0 ; il est clair que l'on a alors $\bar{G}(z_0) = \bar{F}(x_0)$.

3. Systèmes d'équations.

THÉORÈME 1. - *On se donne :*

(a) *Un système de formes linéaires indépendantes, à coefficients dans* V , $F_i(x) = \sum_{j=1}^{j=n} a_{i,j} x_j$,

(b) *Une suite d'entiers* d_m , *strictement croissante,*

(c) *Un système* S_i *de fonctions de* V^n *dans* $V \cap \wp^{\Delta_0 - \Delta}$, *où* $\Delta_0 = v(\det(a_{i,j}))$; *et* Δ *est un entier quelconque* $\geqslant d_1$.

Si le système satisfait à $\bar{X} \mathbin{S} \bar{S}$ $[(\wp^{d_m - \Delta_0}) , (\wp^{d_{m+1} - \Delta})]$, *alors si* $\bar{G} = \bar{F} + \pi^{\Delta} \bar{S}$, *on a*

$$\bar{F} \mathbin{R} \bar{G} \ [(\wp^{d_m}) , (\wp^{d_m})] \ \text{et} \ \bar{F}(V^n) = \bar{G}(V^n) .$$

Preuve. - L'hypothèse faite sur $\bar{F}$ montre que $\bar{F} \mathbin{S} \bar{X}$ $[(\wp^{d_m}) , (\wp^{d_m - \Delta_0})]$. On obtient donc que $\bar{F} \mathbin{S} \bar{S}$ $[(\wp^{d_m}) , (\wp^{d_{m+1} - \Delta})]$, d'où, d'après la proposition 1, $\bar{F} \mathbin{R} \bar{G}$ $[(\wp^{d_m}) , (\wp^{d_m})]$. On a facilement $\bar{G}(V^n) \subset \bar{F}(V^n)$, en résolvant le système par la règle de CRAMER. D'autre part, l'hypothèse $\bar{X} \mathbin{S} \bar{S}$ $[\dots]$, implique $\bar{S}$ continue, donc aussi $\bar{G}$. La proposition 2 donne alors $\bar{G}(V^n) = \bar{F}(V^n)$.

Remarque 2. - Les conclusions du théorème 1 sont vraies sous des hypothèses plus faibles. En effet, remarquons que la condition $\bar{X} \mathbin{S} \bar{S}$ $[(\wp^{d_m - \Delta_0}) , (\wp^{d_{m+1} - \Delta})]$ implique (si l'on prend sur V^n la norme "sup des coordonnées")

$$\rho^{\Delta} \|S(x) - S(y)\| \leqslant \rho^{1+\Delta_0} \|x - y\| .$$

On garde alors l'hypothèse (a), on suppose simplement K complet, et on note $\lambda = |\det(a_{i,j})|$. On se donne une application $\bar{T}$ de V^n dans V^n , vérifiant

$$\|\bar{T}(x) - \bar{T}(y)\| \leqslant \theta\lambda \|x - y\| \quad \text{où} \quad \theta \in [0 , 1[$$

et on suppose $\|\bar{T}(x)\| \leqslant \lambda$, $\forall\, x$ dans V^n .

Alors pour $\bar{G} = \bar{F} + \bar{T}$, on a encore les conclusions du théorème 1. En effet, on vérifie facilement que

$$\|\bar{T}(x) - \bar{T}(y)\| \leqslant \theta \, \|\bar{F}(x) - \bar{F}(y)\| ,$$

d'où

$$\|\bar{F}(x) - \bar{F}(y)\| = \|\bar{G}(x) - \bar{G}(y)\| .$$

L'hypothèse $\|\bar{T}(x)\| \leqslant \lambda$ donne comme précédemment que $\bar{G}(V^n) \subset \bar{F}(V^n)$, et l'autre inclusion est simplement un théorème de point fixe pour l'application

$$x \longrightarrow x_0 - \bar{F}^{-1}(T(x)) = \bar{U}(x) ;$$

on vérifie facilement que $\|\bar{U}(x) - \bar{U}(y)\| \leqslant \theta \, \|x - y\|$. On a alors les résultats suivants.

COROLLAIRE 1. - <u>Dans les conditions du théorème</u> 1, <u>pour tout</u> c <u>dans</u> V^n , <u>le système</u> $\bar{G}(x) - c = 0$ <u>a une unique solution</u> $\Longleftrightarrow$ <u>le système</u> $\bar{F}(x) - c = 0$ <u>a une unique solution.</u>

COROLLAIRE 2. - <u>Soient</u> $G_1 , \dots , G_n$, n <u>series restreintes à coefficients dans</u> V , <u>et un point</u> x_0 <u>de</u> V <u>où</u> $J(\bar{G}(x_0)) \neq 0$, <u>où</u> J <u>est le jacobien du système. On pose</u> $\Delta_0 = v(J(\bar{G}(x_0)))$, <u>et on suppose que,</u> $\forall\, i$, $G_i(x_0)$ <u>appartient à</u> $\wp^{2\Delta_0+1}$. <u>Alors, dans le disque circonférentié</u> $D(x_0 , \rho^{\Delta_0+1})$, <u>le système</u> $\bar{G}(x) = 0$ <u>a une unique solution.</u>

<u>Preuve</u>. - On suppose $x_0 = 0$, et on écrit

$$G_i(x) = G_i(0) + F_i(x) + T_i(x) ,$$

où F_i est la partie linéaire de G_i , et

$$T_i(x) = \sum_{|r| \geqslant 2} b_r^{(i)} \, x^r , \quad r = (r_1 , \dots , r_n) , \quad |r| = r_1 + r_2 + \dots + r_n .$$

On se ramène dans V^n en posant $x = \pi^{-\Delta_0-1} t$. On note alors

$$G_i^*(x) = \pi^{-\Delta_0-1} , \quad G_i(x) = \pi^{-\Delta_0-1} G_i(0) + F_i(t) + T_i^*(t) .$$

On vérifie facilement que $T_i^*(t) \in \wp^{2\Delta_0+1}$, $\forall\, t$ dans V^n , et que l'on a

$$|T_i^*(t) - T_i^*(t')| \leqslant \rho^{1+\Delta_0} \, \|t - t'\| , \quad \forall\, t , t' \text{ dans } V^n .$$

Pour le système F_i et le système $R_i = F_i + T_i^*$, on est donc dans les conditions du théorème 1. Le corollaire 1 nous indique qu'il suffit de regarder le système $F_i(x) = - \pi^{-\Delta_0-1} G_i(0)$. L'hypothèse faite sur les $G_i(0)$ permet alors de conclure.

<u>Remarque</u> 3. - On peut bien entendu donner une version de ce corollaire dans le cas où K est supposé simplement complet, en utilisant la remarque 2.

4. Applications.

PROPOSITION 3. - Soit un système G_i de n séries restreintes à coefficients dans V, tel que, $\forall x$ dans V^n, $J(G(x)) \neq 0$. Alors le système $\bar{G}(x) = 0$ a un nombre fini de solutions dans V^n.

Preuve. - A chaque solution x_0 de $\bar{G}(x) = 0$, on associe le disque circonférencié $D(x_0, \rho^{1+\Delta_0})$, où Δ_0 est entier tel que $|J(\bar{G}(x))| \geqslant \rho^{\Delta_0}$, $\forall x$ dans V^n. Dans ce disque, d'après le corollaire 2, x_0 est la seule solution de $\bar{G}(x) = 0$. Si q est le cardinal du corps résiduel de K, il y a au plus $q^{n(\Delta_0+1)}$ tels disques distincts, donc il y a au plus $q^{n(\Delta_0+1)}$ solutions au système $\bar{G}(x) = 0$.

PROPOSITION 4. - Soit $x_0 \in V^n$ et supposons que $J(\bar{G}(x_0)) \neq 0$. Soit Δ_0 un entier tel que $\rho_n^{\Delta_0} \leqslant |J(\bar{G}(x_0))|$. On se donne $d_1, \ldots, d_m$ dans V, et une unité de V, ε, tels que

$$|\sum_1^m d_k - \varepsilon| \leqslant \rho^{\Delta_1}, \text{ où } \Delta_1 = \sup(0, (2\Delta_0 + 1) - \inf v(G_i(x_0))) .$$

Alors, pour tout choix de $x_1, \ldots, x_m$ dans le disque circonférencié $D(x_0, \rho^{\Delta_0+1})$, il existe y dans ce disque tel que

$$\sum_1^m d_k\, G_i(x_k) = \varepsilon\, G_i(y), \quad \forall i \in [1, n] .$$

La preuve est analogue à celle des autres propositions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GUSEV (G. I.). - Concordant and totally concordant systems of functions in non archimedean valued fields [en russe], Issled. Teor. Čisel, t. 5, 1975, p. 22-44.

(Texte reçu le 18 janvier 1978)

Jean-Paul BEZIVIN
Mathématiques, Tour 46,
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05