Bernard Jacob

Algèbre de Banach des éléments analytiques sur un corps valué non archimédien

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 4 (1976-1977), exp. nº 10, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1976-1977__4__A9_0>

Groupe d'étude d'Analyse Ultramétrique
(Y. AMICE, D. BARSKY, P. ROBBA)
4e année, 1976/77, N° 10, 6 p.

24 janvier 1977

ALGÈBRE DE BANACH DES ÉLÉMENTS ANALYTIQUES SUR UN CORPS VALUÉ NON ARCHIMÉDIEN

par Bernard JACOB
(d'après Alain ESCASSUT [1])

Avertissement.

L'étude suivante conduit à énoncer des conditions nécessaires et suffisantes sur un domaine D d'un corps valué complet non archimédien et algébriquement clos pour que l'algèbre $H(D)$ des éléments analytiques sur D soit intègre d'une part, noethérienne ou principale d'autre part. L'introduction de la notion de filtre percé permettra de résoudre le problème.

La présente rédaction, excluant les démonstrations, se borne à exposer les résultats importants et les liens logiques entre eux.

La plupart des résultats sont issus de la thèse d'Alain ESCASSUT : Algèbre de Banach d'éléments analytiques au sens de Krasner (1970).

Introduction.

Nous appellerons D une partie d'un corps K, valué, complet et algébriquement clos. Rappelons que si $K(D)$ est l'algèbre des fractions rationnelles sur K, sans pôle dans D, plongée par l'homomorphisme canonique Φ dans K^D, de manière injective pour D infini, on appelle élément analytique sur D, toute application f appartenant au complété $H(D)$ de $\Phi(K(D))$, dans K^D, muni de la topologie de la convergence uniforme sur D.

$H(D)$ est alors une K-algèbre unitaire, ultramétrique et de Banach pour la norme,

$$\|f\| = \sup_{x\in D} |f(x)|$$

si, et seulement si, D est fermé et borné.

Nous supposerons donc toujours D fermé, borné et infini.

1. Premières propriétés de $H(D)$.

(a) Les éléments inversibles de $H(D)$ se caractérisent par la propriété suivante:

$$f \text{ inversible} \iff \exists\, \delta > 0\ ,\ \forall\, x \in D\ ,\ |f(x)| \geqslant \delta \quad ([1]\ \text{I},\ \S\ 5).$$

(b) Lorsque D est un disque d, circonférencié ou non, l'algèbre $H(d)$ possède les propriétés suivantes :

(i) La norme de $H(d)$ est multiplicative,

(ii) Tout élément non identiquement nul a, au plus, un nombre fini de zéros dans D ,

(iii) Le module des valeurs d'une application f de H(d) , ne s'annulant pas sur d , est constant sur ce disque ([1], I, § 5).

(c) Les éléments de H(D) possèdent la propriété de factorisation suivante : Si f est élément de H(D) et a, au plus, un nombre fini de zéros, tous intérieurs à D , il existe un polynôme P de K[X] , et un élément g de H(D) qui ne s'annule pas sur D , tels que

$$f = Pg .$$

Nous dirons qu'un élément f de H(D) est quasi inversible s'il existe un polynôme P de K[X] , dont les zéros sont tous intérieurs à D , et un élément g de H(D) , inversible, tels que

$$f = Pg .$$

Nous pouvons alors énoncer les deux résultats suivants :

PROPOSITION 1. - Si tous les éléments de H(D) sont quasi inversibles, H(D) est intègre.

PROPOSITION 2. - D étant d'intérieur non vide, soit I un idéal de H(D) contenant un élément quasi inversible. I est alors engendré par un polynôme dont les zéros sont intérieurs à D ([1], I, § 5).

(d) Nous dirons qu'un élément f de H(D) est quasi minoré si toute suite $(a_m)_{m\geq 0}$ de D , telle que $\lim_{m\to+\infty} f(a_m) = 0$, admet une sous-suite de Cauchy.

On vérifie alors que

(i) Si f est un élément quasi inversible de H(D) , il est quasi minoré.

(ii) Si D est ouvert, ces deux propriétés sont équivalentes ([1], I, § 6)

(e) L'étude de l'intégrité de H(D) conduit à celle des idempotents. A ce propos, rappelons que D est dit infraconnexe si, $\forall\ a \in D$, la fermeture dans $\underline{R}$ de l'ensemble $\{|x - a| \ ;\ x \in D\}$ est un intervalle, et notons le résultat suivant.

PROPOSITION 3. - Si H(D) n'a pas d'idempotents non triviaux, D est infraconnexe.

Une condition nécessaire d'intégrité est donc l'infraconnexité de D ([1], I, § 7).

2. Filtre percé sur un infraconnexe.

Nous supposerons à partir de maintenant que le corps K est en outre maximalement complet. Cette hypothèse ne restreint en fait en rien la généralité des résultats établis, mais en simplifie l'exposition.

Dans ce paragraphe, nous supposerons que D est un fermé borné infraconnexe.

(a) <u>Un filtre</u> $\mathfrak{F}$ <u>sur</u> D <u>annule un élément</u> f de $H(D)$ lorsque, $(D_i)_{i\in I}$ étant une base de ce filtre, on a

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\quad \exists\ i_\varepsilon \in I\ ,\quad \|f\|_{D_{i_\varepsilon}} < \varepsilon\ .$$

Nous dirons que f est <u>proprement annulé</u> par $\mathfrak{F}$ si $\mathfrak{F}$ annule f , et en outre, pour tout i de I , $\|f\|_{D_i} > 0$.

$\mathfrak{F}$ est appelé <u>filtre annulateur</u> s'il existe au moins un élément f de $H(D)$, proprement annulé par $\mathfrak{F}$.

(b) Une suite de trous de D , $(T_m)_{m\geqslant 0}$, sera dite respectivement <u>monotone</u>, <u>croissante</u>, <u>décroissante</u> ou <u>de Cauchy</u> si la suite réelle définie par $d_m = d(T_m, T_{m+1})$ est strictement monotone, strictement croissante, strictement décroissante de limite non nulle, strictement décroissante et tendant vers 0.

A partir d'une suite décroissante (resp. de Cauchy) de trous $(T_m)_{m\geqslant 0}$ de D , si K est maximalement complet, on peut trouver un point a de K tel que

$$\forall\ m \geqslant 0\ ,\quad d(a\ ,\ T_m) = d_m = d(T_m\ ,\ T_{m+1})\ .$$

Si l'on pose $R = \lim_{m\to+\infty} d_m$, et si l'on considère les ensembles

$$D_m = \{x \in D\ ;\ \ R < |x - a| < d_m\}\ ,$$

la famille $(D_m)_{m\geqslant 0}$ engendre un filtre de D , indépendant du choix de a , vérifiant la propriété ci-dessus, et appelé <u>filtre percé décroissant de diamètre</u> R (resp. <u>de Cauchy</u>), et <u>de centre</u> a .

On trouve de la même façon, étant donnée une suite croissante de trous de D , $(T_m)_{m\geqslant 0}$, telle que $R = \lim_{m\to+\infty} d_m$, un point a de K vérifiant

$$\forall\ m \geqslant 0\ ,\quad d(a\ ,\ T_m) = d_m\ ,$$

et les ensembles $D_m = \{x \in D\ ;\ \ d_m \leqslant |x - a| < R\}$ engendrent encore un filtre de D , indépendant de a vérifiant la propriété précédente, appelé <u>filtre percé croissant de diamètre</u> R <u>et de centre</u> a .

(c) – Un filtre percé croissant ou décroissant (à l'exclusion des filtres de Cauchy) est dit <u>large</u>.

– Une suite $(a_m)_{m\geqslant 0}$ de D <u>décrit le filtre</u> $\mathfrak{F}$ s'il existe une base $(D_m)_{m\geqslant 0}$ de $\mathfrak{F}$ telle que

$$\forall\ m \geqslant 0\ ,\quad \exists\ n(m) \in \underset{\sim}{N}\ ,\quad a_{n(m)} \in D_m\ .$$

– Nous appellerons <u>plage</u> d'un filtre percé $\mathfrak{F}$, l'ensemble $\mathcal{P}(\mathfrak{F}) = \{x\in D ; |x-a| \leqslant R\}$ si $\mathfrak{F}$ est décroissant ou de Cauchy, $\mathcal{P}(\mathfrak{F}) = \{x \in D\ ;\ \ |x - a| \geqslant R\}$ si $\mathfrak{F}$ est croissant.

(d) La notion de filtre percé ainsi introduite va être fondamentale pour la caractérisation des algèbres $H(D)$ intègres ou noethériennes. Il nous faut toutefois la préciser par celle de filtre percé auto-annulateur.

Si R_0 est le diamètre de l'infraconnexe D, et $\mathfrak{F}$ un filtre percé décroissant de centre a et de diamètre R, I étant l'intervalle $[- \log R_0 , - \log R[$, nous dirons que $\mathfrak{F}$ est <u>auto-annulateur</u> s'il existe un élément f de $H(D)$ vérifiant :

(i) $\lim_{\mu \to -\log R} v(f_a , \mu) = + \infty$,

(ii) Pour μ dans I, $v(f_a , \mu)$ est fini,

(iii) Pour x dans $\mathcal{P}(\mathfrak{F})$, $v(f(x)) = + \infty$.

Lorsque $\mathfrak{F}$ est croissant, la définition est analogue, en remplaçant I par $]- \log R , + \infty[$.

On vérifie alors qu'<u>un filtre percé auto-annulateur est annulateur</u>.

On peut aussi donner une autre définition, équivalente à celle de filtre auto-annulateur ([1], IV, § 7), qui est celle de T-filtre. Plus "géométrique", elle fournit des exemples de tels filtres, et intervient dans certaines démonstrations basées sur ces exemples. On appelle <u>T-filtre décroissant</u> un filtre percé décroissant défini par une suite décroissante de cercles percés emboîtés (procédé analogue à la définition précédente) C_m, de rayons d_m, et vérifiant la propriété :

C_m admet au moins un nombre fini $k(m)$ de classes $\Gamma_{m,i}$ où $1 \leq i \leq k(m)$; il existe de plus des entiers $q_{m,i}$ $(1 \leq i \leq k(m))$ tels que si l'on pose

$$\gamma_m = \sup \gamma[\Gamma_{m,i} , q_{m,i}] \quad \text{et} \quad q_m = \sum_{i=1}^{k(m)} q_{m,i} ,$$

on a la relation

$$\lim_{m \to +\infty} \gamma_m \prod_{j=1}^{j=m-1} \left(\frac{dm}{dj}\right)^{q_j} = 0 .$$

Rappelons que si A est un disque non circonférencié de diamètre au plus égal à celui de D, tel que $A \cap D \neq A$, et si $\varepsilon(A , q)$ désigne l'ensemble des polynômes unitaires de degré q, à zéros dans $A - A \cap D$, on définit alors :

$$\gamma(A , q) = r^q \inf_{p \in \varepsilon(A,q)} \|\tfrac{1}{p}\|_{A \cap D} \quad \text{si } A \cap D \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \gamma(A , q) = 1 \quad \text{sinon.}$$

(e) Nous avons vu (Proposition 2) que la présence d'un élément quasi inversible, dans un idéal de $H(D)$, en définit la structure. Ils jouent un rôle capital dans la caractérisation des algèbres $H(D)$ noethériennes et principales. L'étude des éléments non quasi inversibles de $H(D)$ permet de montrer la propriété suivante ([1], III, § 6).

PROPOSITION 4. - <u>Soit</u> f <u>un élément non identiquement nul de</u> $H(D)$ <u>et non quasi-inversible, alors</u>

(i) <u>Il existe un filtre percé annulateur</u> $\mathfrak{F}$, <u>annulant proprement</u> f,

(ii) <u>Pour toute suite</u> $(a_m)_{m \geq 0}$ <u>de</u> D <u>telle que</u> $f(a_m) \neq 0$ <u>pour tout</u> $m \geq 0$, <u>que</u> $\lim_{m \to +\infty} f(a_m) = 0$, <u>et que</u> $(|a_m - a_{m+1}|)_{m \geq 0}$, <u>soit une suite strictement mono-</u>

tone de limite non nulle, alors il existe un filtre percé large annulateur $\mathfrak{F}$ décrit par la suite $(a_m)_{m\geqslant 0}$, et annulant proprement f .

Et l'on déduit de ceci la propriété suivante ([1], III, § 6) :

PROPOSITION 5. - *Si* $\mathfrak{F}$ *est un filtre percé de* D , *l'idéal* $I(\mathfrak{F})$ *des éléments de* H(D) , *annulés par* $\mathfrak{F}$, *est premier et fermé*.

Les propositions 2 et 4 prouvent donc qu'un tel idéal $I(\mathfrak{F})$ est soit principal, soit formé d'éléments proprement annulés par des filtres percés.

3. Caractérisation des algèbres H(D) intègres et principales.

A l'aide des outils précédents, nous nous proposons à présent de déterminer les conditions à satisfaire par un fermé borné D pour que H(D) soit intègre ou noethérienne et principale.

3. 1. Etude de l'intégrité.

(a) La proposition 3 a fourni une condition nécessaire d'intégrité.

(b) Nous dirons que deux T-filtres $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ (ou filtres percés autoannulateurs) sont *complémentaires* si l'on a

$$D = \mathcal{P}(\mathfrak{F}_1) \cup \mathcal{P}(\mathfrak{F}_2) .$$

On vérifie alors immédiatement que si D est infraconnexe, et admet un couple de T-filtres $(\mathfrak{F}_1 , \mathfrak{F}_2)$ complémentaires, H(D) n'est pas intègre. La réciproque est vraie car, à partir de deux éléments non identiquement nuls f et g de H(D) tels que $fg \equiv 0$, on peut construire deux T-filtres complémentaires $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ annulant proprement f et g respectivement ([1], V, § 2).

(c) Nous sommes donc en mesure d'énoncer les deux résultats fondamentaux ;

PROPOSITION 6. - *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'algèbre* H(D) *soit intègre est que* D *soit infraconnexe, sans couple de* T-*filtres complémentaires*.

PROPOSITION 6 bis. - *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'algèbre* H(D) *admette des idempotents non triviaux est que* D *ne soit pas infraconnexe*.

3. 2. Etude de l'algèbre noethérienne.

(d) Nous supposerons à présent D infraconnexe.

PROPOSITION 7. - *Si* $\mathfrak{F}$ *est un* T-*filtre percé (annulateur)*, $I(\mathfrak{F})$ *n'est pas de type fini* ([1], V, § 4).

(e) A l'aide de ce résultat et des précédents, on établit le théorème final résumant les caractérisations annoncées ([1], V, § 5).

THÉORÈME. - Soit D un infraconnexe ouvert non vide. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Tout idéal de H(D) est fermé ;

(2) Tout idéal premier et fermé de H(D) est de type fini ;

(3) H(D) est noethérienne ;

(4) H(D) est principale ;

(5) Tout élément de H(D) est quasi inversible ;

(6) D est sans T-filtre.

N.-B. - Pour prouver que (3) $\Longrightarrow$ (1) , il faut utiliser un théorème de J. TATE [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] ESCASSUT (A.). - Algèbres de Banach d'éléments analytiques au sens de Krasner, Thèse Sc. math. Univ. Bordeaux-I, 1970.

[2] TATE (J.). - Rigid analytic spaces, Private note, Institut des Hautes Études Scientifiques, Bures-sur-Yvette (multigraphié).

(Texte reçu le 7 juin 1977)

Bernard JACOB
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 PALAISEAU