PHILIPPE ROBBA

Nombre de zéros des fonctions exponentielles-polynômes

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 4 (1976-1977), exp. nº 9, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1976-1977__4__A8_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, D. BARSKY, P. ROBBA)
4e année, 1976/77, n° 9, 3 p.
10 janvier 1977

NOMBRE DE ZÉROS DES FONCTIONS EXPONENTIELLES-POLYNÔMES

par Philippe ROBBA
(d'après A. I. Van der POORTEN)

Soit $u(z) = \sum_{i=1}^{k} f_i(z) \exp a_i z$ une fonction exponentielle-polynôme où les a_i appartiennent à un corps valué complet K, et les f_i sont des polynômes de degrés $m_i - 1$ à coefficients dans K. Le problème posé est d'estimer le nombre N_R de zéros de u dans le disque $|z| \leqslant R$ en fonction de $\Delta = \sup_i |a_i|$ et de $m = \sum_{i=1}^{k} m_i$ uniquement. (Par un changement de variable, on voit facilement qu'une telle majoration ne dépendra que de m et $R\Delta$.)

Une telle estimation sert dans des problèmes de transcendance (Cf. par exemple [5] pour le cas complexe, et [1] ou [5] pour le cas p-adique).

Dans le cas complexe, on obtient (TIJDEMAN [2])

(1) $$N_R \leqslant 3(m - 1) + 4R\Delta .$$

Dans le cas p-adique, il faut bien sûr que R soit plus petit que le plus petit rayon de convergence des exponentielles, c'est-à-dire que

(2) $$R\Delta < p^{-1/(p-1)} .$$

On posera $\delta = -(\log_p R\Delta + 1/(p - 1))$; δ est donc un nombre > 0. La première estimation est due à SHOREY en 1972 [1]. Sa démonstration utilise l'intégrale de Schnirelmann. Il obtient

(3) $$N_R \leqslant 30[(m - 1) + \frac{1}{\delta}(\frac{3}{\operatorname{Log} p} + \frac{m - 1}{p - 1})] .$$

Une nouvelle majoration est établie par WALDSCHMIDT en 1973 [5] par une démonstration purement p-adique, mais dans un cas particulier : Si $\Delta < 1/p$ et $R = p^{-2/(p-1)}$, on a $N_R \leqslant 2m$.

En 1975, Van der POORTEN [3] améliore la majoration de SHOREY. Sa démonstration utilise la remarque que les exponentielles-polynômes sont solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Il obtient

(4) $$N_R \leqslant m - 1 + \frac{1}{\delta}\frac{m - 1}{p - 1} .$$

En 1976, Van der POORTEN [4] améliore cette estimation en utilisant l'interpolation d'Hermite. Il obtient

(5) $$N_R \leqslant m - 1 + \frac{1}{\delta} \max_{0 \leqslant r \leqslant p-1} \{[\log_p(m + r)] - \frac{r}{p - 1}\} .$$

Cette majoration semble être la meilleure possible. Malheureusement cette dernière démonstration est nettement plus compliquée que la précédente.

Nous allons montrer comment, en reprenant l'idée que u est solution d'une équation différentielle, on peut établir simplement une majoration équivalente à (5). Précisément, nous allons montrer que

(6) $$N_R \leqslant m - 1 + \frac{1}{\delta}\frac{s-1}{p-1} ,$$

avec $s = \max_{j \leqslant m-1} \operatorname{Schiff}_p j$.

Remarquons que l'on a $s \leqslant ([\log_p m] + 1)(p - 1)$, ce qui montre que (6) équivaut à (5).

Pour $m \leqslant p$, (4) et (5) donnent

$$N_R \leqslant m - 1 + \frac{1}{\delta}\frac{m-1}{p-1} ,$$

tandis que (6) donne

$$N_R \leqslant m - 1 + \frac{1}{\delta}\frac{m-2}{p-1} \quad \text{(car alors } s = m - 1 \text{).}$$

On suppose que K est un corps valué complet de caractéristique 0, et que son corps de restes est de caractéristique p . On suppose la valuation de K normalisée, c'est-à-dire $|p| = p^{-1}$, et on pose, pour tout $a \in K$,

$$v(a) = -\log_p |a| .$$

Nous noterons $\mathfrak{U}$ l'anneau de valuation de K .

Quitte à agrandir K , on peut supposer que R , Δ et $p^{-1/(p-1)}$ appartiennent au groupe des valeurs de K . Alors par une homothétie, on peut se ramener au cas $R = 1$. Soit $c \in K$ tel que $v(c) = \delta + 1/(p - 1)$, et soit $\alpha_i = a_i/c$. Il résulte alors de la définition de δ que les α_i appartiennent à $\mathfrak{U}$.

Il est bien connu que u est solution de l'équation différentielle

$$P(D)u = 0 \quad \text{avec} \quad D = \frac{d}{dz} \quad \text{et} \quad P(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i} .$$

Posons

$$Q(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)^{m_i} .$$

Alors Q est unitaire, et a ses coefficients dans $\mathfrak{U}$.

Soit R_n le reste de la division de X^n par Q . Alors R_n a ses coefficients dans $\mathfrak{U}$. Donc, puisque $P(X) = c^m Q(X/c)$, on a

$$(D/c)^n \equiv R_n(D/c) \mod P(D)$$

et

$$\frac{D^n}{n!} \equiv \sum_{j=0}^{m-1} b_j^{(n)} c^{n-j} \frac{j!}{n!} \frac{D^j}{j!} \mod P(D) ,$$

avec $R_n(X) = \sum_{j=0}^{m-1} b_j^{(n)} X^j$, $b_j^{(n)} \in \mathfrak{U}$.

Par conséquent, si $u(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$, on a

$$a_n = \sum_{j=0}^{m-1} b_j^{(n)} c^{n-j} \frac{j!}{n!} a_j .$$

Rappelons que $v(j!) = (j - \operatorname{Schiff}_p j)/(p - 1)$, par conséquent,

$$v(b_j^{(n)}\, c^{n-j}\, \frac{j!}{n!}) = v(b_j^{(n)}) + \frac{n-j}{p-1} + (n-j)\delta + \frac{j\text{-Schiff}_p\, j}{p-1} - \frac{n\text{-Schiff}_p\, n}{p-1}$$

$$\geqslant (n-j)\delta - \frac{\text{Schiff}_p\, j}{p-1} + \frac{1}{p-1} ,$$

et donc, pour $j \leqslant m - 1$, on a

$$v(b_j^{(n)}\, c^{n-j}\, \frac{j!}{n!}) \geqslant (n - m + 1)\delta - \frac{s-1}{p-1} .$$

Il en résulte que, pour $n > m - 1 + \frac{1}{\delta}\frac{s-1}{p-1}$, on a

$$|a_n| < \sup_{j\leqslant m-1} |a_j| . \tag{7}$$

Si N est le plus grand entier tel que

$$|a_N| = \sup_n |a_n| ,$$

il est bien connu que N est le nombre de zéros de u dans le disque $|z| \leqslant 1$ (dans la clôture algébrique de K). Il résulte alors de la majoration (7) que l'on a nécessairement

$$N \leqslant m - 1 + \frac{1}{\delta}\frac{s-1}{p-1} .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] SHOREY (T. N.). - Algebraic independence of certain numbers in the p-adic domain, Indag. Math., t. 34, 1971, p. 423-435.

[2] TIJDEMAN (R.). - On the number of zeros of general exponential polynomials, Indag. Math., t. 33, 1971, p. 1-7.

[3] Van der POORTEN (A. I.). - Zeros of p-adic exponential polynomials, Indag. Math., t. 38, 1975, p. 46-49.

[4] Van der POORTEN (A. I.). - Hermite interpolation and p-adic exponential polynomials, J. Austral. math. Soc., t. 22, 1976, p. 12-26.

[5] WALDSCHMIDT (M.). - Propriétés arithmétiques des valeurs de fonctions méromorphes algébriquement indépendantes, Acta Arithm., Warszawa, t. 23, 1973, p. 19-88.

(Texte reçu le 7 juin 1977)

Philippe ROBBA
138 rue Nationale
75013 PARIS