GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

PHILIPPE ROBBA

Disque générique et équations différentielles

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 4 (1976-1977), exp. nº 8, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1976-1977__4__A7_0>

DISQUE GÉNÉRIQUE ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

par Philippe ROBBA
(en collaboration avec B. DWORK)

Pour étudier les propriétés d'un opérateur différentiel dans le disque $D(0, 1^-)$, une idée, due à DWORK [1], consistait à étudier les propriétés de l'opérateur considéré dans le disque générique $D(t, 1^-)$, et à utiliser un principe de transfert pour en déduire les propriétés dans le disque $D(0, 1^-)$.

Cette méthode ne s'appliquait qu'aux opérateurs à coefficients éléments analytiques dans $D(0, 1^-)$ (ou dans une couronne $D(0, 1^-) - D(0, r^+)$, $0 < r < 1$) que nous savions interpréter, grâce au prolongement analytique, comme des fonctions analytiques (inversibles) dans le disque générique. Notons dans [2] une tentative de généralisation aux éléments algébriques grâce au prolongement algébrique.

Nous allons adopter un point de vue plus abstrait pour définir le disque générique, ce qui nous permettra d'interpréter l'espace des germes de fonctions analytiques bornées au bord du disque $D(0, 1^-)$ comme sous-ensemble d'un corps de fonctions analytiques bornées dans le nouveau disque générique. Alors la plupart des résultats obtenus par DWORK et moi-même ([1], [3], [4]) se généralisent de façon standard au cas des opérateurs différentiels à coefficients analytiques bornés dans le disque $D(0, 1^-)$ (ou dans une couronne $D(0, 1^-) - D(0, r^+)$).

La plupart des démonstrations étant alors de simples transpositions de celles concernant les opérateurs différentiels à coefficients éléments analytiques, nous ne les ferons pas, sauf lorsque le nouveau point de vue permet de simplifier la démonstration.

Notons que pour les problèmes d'indice et de factorisation, nous sommes obligés de supposer que les coefficients de l'opérateur différentiel appartiennent à un sous-corps de l'espace des germes de fonctions analytiques bornées au bord de $D(0, 1^-)$. Cette hypothèse sera automatiquement vérifiée dans le cas où les coefficients sont des éléments algébriques [5].

1. Germe de fonction analytique bornée au bord de $D(0, 1^-)$.

K désigne un corps valué ultramétrique complet de caractéristique zéro. Si A est un disque ou une couronne de K, on notera $W(A)$ l'espace des fonctions analytiques bornées sur A.

Considérons la classe résiduelle $D(0, 1^-)$. On pose

$$\Delta_r = D(0, 1^-) - D(0, r^-), \quad r \in]0, 1[.$$

On note W l'espace des germes de fonctions analytiques bornées au bord de $D(0\ ,\ 1^-)$,

$$W = \lim \mathrm{ind}_{r\to 1}\ W(\Delta_r)\ .$$

Si $f \in W$, f se décompose en série de Laurent, $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\ x^n$. On définit la norme frontière de f par la formule

$$\|f\| = \sup_n\ |a_n|\ .$$

Cette norme sur W définit une valeur absolue sur l'anneau intègre W , et se prolonge sur W' , le corps des fractions de W . Un élément de W' sera appelé un germe de fonction méromorphe bornée au bord de $D(0\ ,\ 1^-)$. On notera Ω le complété de W' .

Comme les espaces $W(\Delta_r)$ sont stables par dérivation, W est également stable par dérivation. De plus, la dérivation D est continue pour la norme frontière, et l'on a même $\|D\| = 1$.

La dérivation s'étend de façon unique à W' , et est continue sur W' , donc s'étend à Ω , et l'on a encore $\|D\| = 1$ sur Ω .

On a, dans W , $\|D^m/m!\| = 1$, et ceci est encore vrai dans W' . (En effet, soit $u \in W'$, $u = f/g$, f , $g \in W$, on a

$$\frac{D^m}{m!}\ f = \frac{D^m}{m!}\ (ug) = \sum_{i+j=m} \frac{D^i}{i!}\ u\ \frac{D^j}{j!}\ g\ ,$$

et par induction sur m , on montre que $\|D^m\ u/m!\| \leq \|u\|$.)

Par continuité, on voit que l'on a encore $\|D^m/m!\| = 1$ dans Ω . Remarquons que Ω est de façon évidente une extension valuée de K .

2. Disque générique. Représentation des germes de fonctions méromorphes bornées.

2. 1. - Soit t un point quelconque de Ω . Nous appellerons disque générique le disque $D(t\ ,\ 1^-)$ de Ω .

Pour chaque $u \in W'$, on pose

$$\tau(u) = \sum_{n\geq 0} \frac{D^n\ u}{n!}\ (Y - t)^n\ .$$

Comme $|\frac{D^n\ u}{n!}| \leq |u|$, la série $\tau(u)$ converge dans le disque générique, et définit une fonction analytique bornée, à coefficients dans Ω , dans le disque générique. De plus,

$$\|\tau u\|_{D(t,1^-)} = |u|\ .$$

Par ailleurs,

$$\tau(u') = \sum_{n\geq 0} \frac{D^{n+1}\ u}{n!}\ (Y - t)^n = \tau(u)'\ .$$

La formule de Leibnitz s'écrit

$$\frac{D^n(uv)}{n!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{D^j\ u}{j!}\ \frac{D^{n-j}\ v}{(n - j)!}\ ,$$

ce qui donne

$$\tau(uv) = \tau(u)\ \tau(v) .$$

On a donc montré le théorème suivant.

2. 2. THÉORÈME. - L'application τ définit un morphisme de corps valué avec dérivation de W' dans l'anneau des fonctions analytiques bornées dans le disque générique.

2. 3. Remarque. - Pour les applications, le choix du point t ne joue aucun rôle. Mais si l'on choisit $t = X$, considéré comme élément de $K(X) \subset W \subset \Omega$, on vérifie facilement que pour u fraction rationnelle, on a $\tau(u) = u(Y)$. Alors, si u est un élément analytique dans le disque $D(0\ ,\ 1^-)$ de K, on peut considérer que u est un élément analytique dans le disque $D(0\ ,\ 1^-)$ de Ω, considéré comme extension valuée de K, et alors $\tau(u)$ est tout simplement le prolongement analytique de u dans le disque générique $D(t\ ,\ 1^-)$. On retrouve ainsi la présentation originelle de DWORK.

3. Équations différentielles dans le disque générique.

3. 1. - Soit $\pi = (\pi_\nu)_{\nu\in\underline{N}}$ une suite décroissante au sens large de nombres réels > 0 tels que $\pi_0 = 1$ et que $\pi_\nu/\pi_{\nu+1}$ soit croissante au sens large. On note W_a^π l'espace de Banach des germes de fonctions analytiques en a,

$$u = \sum_{\nu=0}^{+\infty} b_\nu (x - a)^\nu$$

tels que

$$\|u\|_\pi = \sup_\nu \pi_\nu\ |b_\nu| < + \infty ,$$

muni de la norme $u \longmapsto \|u\|_\pi$.

Lorsque π est la suite $\pi_\nu = 1/(\nu + 1)^\alpha$, $\alpha \geqslant 0$, on écrit $W_a^\alpha = W_a^\pi$ (W_a^α est l'espace des fonctions analytiques dans $D(a\ ,\ 1^-)$ de croissance logarithmique d'ordre α). Il est clair que $W_a^0 = W(D(a\ ,\ 1^-))$ est l'espace des fonctions analytiques bornées dans $D(a\ ,\ 1^-)$.

Nous noterons $\mathfrak{A}_a$ l'espace des fonctions analytiques dans le disque $D(a\ ,\ 1^-)$.

3. 2. - Soit E' un sous-corps de W_t^0 complet pour la norme de la convergence uniforme sur $D(t\ ,\ 1^-)$, et stable par dérivation.

Par exemple, si E désigne la fermeture dans W_t^0 de $\tau(K(X))$ (où $K(X)$ est considéré comme sous-corps de W), E est un sous-corps fermé de W_t^0 stable par dérivation.

La fermeture de $\tau(W')$ dans W_t^0 est également un sous-corps fermé de W_t^0 stable par dérivation.

Les propriétés établies antérieurement sur les opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans E se généralisent sans peine aux opérateurs à coefficients dans E' : il suffit dans les démonstrations de remplacer E par E'.

Notons $\mathcal{R}_{E'} = E'[D]$, l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans E' . Alors $\mathcal{R}_{E'}$ agit sur W_t^π avec la norme d'opérateur

$$\|\sum c_m \, D^m\|_\pi = \sup_m |c_m|_{E'}/\pi_m \, .$$

3. 3. THÉORÈME. - Soit $L \in \mathcal{R}_{E'}$, soit R le générateur unitaire de la π-fermeture dans $\mathcal{R}_{E'}$ de l'idéal $\mathcal{R}_{E'} \, L$. Alors

$$\mathrm{Ker}_t \, R = W_t^\pi \cap \mathrm{Ker}\, L \, .$$

($\mathrm{Ker}_t \, R$ désigne l'espace vectoriel des germes de fonctions analytiques à t , annihilées par R .)
(Cf. [4], Theorem 2. 6.)

3. 4. COROLLAIRE. - Si L est d'ordre n , alors

$$\mathcal{A}_t \cap \mathrm{Ker}\, L \subset W_t^{n-1} \, .$$

(Cf. [1], Theorem 2.)

4. Équations différentielles dans le disque $D(0 , 1^-)$.

4. 1. - Nous noterons $\mathcal{A}$ l'espace des germes de fonctions analytiques au bord de $D(0 , 1^-)$, c'est-à-dire $\mathcal{A} = \lim \mathrm{ind}_{r\to 1} \mathcal{A}(\Delta_r)$, où $\mathcal{A}(\Delta_r)$ désigne l'espace des fonctions analytiques dans la couronne $\Delta_r = D(0 , 1^-) - D(0 , r^-)$.

Nous noterons $\mathcal{M}$ l'espace des germes de fonctions méromorphes au bord de $D(0 , 1^-)$, c'est-à-dire le corps des fractions de $\mathcal{A}$.

Enfin $\mathcal{R}_W = W[D]$ désignera l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans W .

Si $L = \sum c_m \, D^m \in \mathcal{R}_W$, nous poserons

$${}^\tau L = \sum \tau(c_m) D^m$$

qui appartient à $\mathcal{R}_{E'}$, où E' désigne le complété de $\tau(W')$ dans W_t^0 .

4. 2. THÉORÈME. - Soit $L \in \mathcal{R}_W$. S'il existe $u \in \mathcal{M}$ annihilé par L , il existe $v \in W_t^0$ annihilé par ${}^\tau L$.
(Cf. [4], Theorem 3. 5.)

4. 3. LEMME. - Les éléments $u_1 , \dots , u_n$ de W' sont linéairement indépendants sur K si, et seulement si, $\tau(u_1) , \dots , \tau(u_n)$ sont linéairement indépendants sur Ω .

Démonstration. - Si $u \in W'$ et $u' = 0$, alors $u \in K$, il en résulte de façon classique que $u_1 , \dots , u_n$ sont linéairement indépendants sur K si, et seulement si,

$$\mathrm{Wr}(u_1 , \dots , u_n) = 0 \, ,$$

où Wr désigne le Wronskien.

De même, si $v \in W_t^0$ et $v' = 0$, alors $v \in \Omega$, et donc $\tau(u_1)$, ... , $\tau(u_n)$ sont linéairement indépendants sur Ω si, et seulement si,

$$Wr(\tau(u_1) , \ldots , \tau(u_n)) = 0 .$$

Mais d'après le théorème 2. 2,

$$\tau\, Wr(u_1 , \ldots , u_n) = Wr(\tau(u_1) , \ldots , \tau(u_n)) ,$$

ce qui achève la démonstration.

4. 4. THÉORÈME. - Soit $L \in \mathcal{R}_W$. On a

$$\dim_K(\operatorname{Ker} L \cap W') \leq \dim_\Omega(\operatorname{Ker} {}^\tau L \cap W_t^0) .$$

Démonstration. - Soit $(u_1 , \ldots , u_n)$ une base de $\operatorname{Ker} L \cap W'$. Alors $\tau(u_1)$, ... , $\tau(u_n)$ sont visiblement des éléments de $\operatorname{Ker} {}^\tau L \cap W_t^0$, linéairement indépendants sur Ω d'après le lemme 4. 2.

5. Équations différentielles dans le disque $D(0 , 1^-)$ (suite).

5. 1. - Nous avons regroupé dans ce paragraphe les résultats pour lesquels nous avons besoin d'une hypothèse supplémentaire sur les coefficients de l'opérateur L .

Nous supposerons que $L \in \mathcal{R}_W$ vérifie la condition suivante :

(*) Il existe un sous-corps V de W stable par dérivation, tel que les coefficients de L appartiennent à V .

Remarquons que si $u \in W$, alors $1/u \in W$ si, et seulement si, u n'a qu'un nombre fini de zéros dans une couronne $\Delta_r = D(0 , 1^-) - D(0 , r^-)$, où u est défini.

Par exemple, l'espace des germes de fonctions algébriques au bord de $D(0 , 1^-)$ (Cf. [5]) est un sous-corps de W stable par dérivation.

Si la valuation de K est discrète, W est un corps, et donc la condition (*) est toujours vérifiée.

5. 2. - Une étude des équations différentielles non linéaires analogue à celle développée dans [3], § 3, est possible. Nous n'en parlerons pas, car l'exposition serait trop longue. Nous indiquons seulement le résultat suivant qui nécessite cette étude.

THÉORÈME. - Soit V un sous-corps stable par dérivation de W fermé dans W . Soit $L \in \mathcal{R}_V$. Il existe $R \in \mathcal{R}_V$, divisant L à droite, tel que

$$\operatorname{Ker}_t {}^\tau R = \tau(\operatorname{Ker} {}^\tau L \cap \mathcal{A}_t) .$$

(Cf. [3], Theorem 4. 1. 2.)

Notons que l'hypothèse que V est fermé dans W est essentielle. Ainsi, P. MONSKY nous a indiqué ([4], § 4.26.1) un opérateur $L \in K(X)[D]$ irréductible dans $K(X)[D]$, du second ordre, mais tel que $\dim \operatorname{Ker} {}^\tau L \cap \mathcal{A}_t = 1$.

L'opérateur R du théorème n'a donc pas ses coefficients dans $K(X)$, mais dans l'adhérence de $K(X)$ dans W , c'est-à-dire que ces coefficients sont des germes d'éléments analytiques au bord de $D(0 , 1^-)$.

Remarquons que l'espace des germes d'éléments algébriques au bord de $D(0 , 1^-)$ est fermé dans W .

5. 3. L'hypothèse que V est fermé dans W est innocente ainsi que le montre le lemme suivant.

LEMME. - <u>Si</u> V <u>est un sous-corps de</u> W , <u>stable par dérivation</u>, <u>son adhérence dans</u> W <u>est un sous-corps stable par dérivation.</u>

<u>Démonstration</u>. - Comme W est un anneau stable par dérivation et que la dérivation est continue, il est clair que $\overline{V}$, adhérence de V dans W , est un anneau stable par dérivation. Pour montrer que $\overline{V}$ est un corps, il suffit de montrer que, pour tout $v \neq 0$ de $\overline{V}$, $1/v \in \overline{V}$, et pour cela il suffit de montrer que $1/v \in W$. Cette dernière assertion équivaut à dire que, pour un $r \in]0 , 1[$, v est analytique dans la couronne $\Delta_r = D(0 , 1^-) - D(0 , r^-)$ et ne s'y annule pas (on considère v comme défini sur la clôture algébrique K^{alg} de K).

Or, si $v \neq 0$ appartient à $\overline{V}$, il existe $u \in V$ tel que $\|u - v\| < \|v\|/z$. On peut choisir r suffisamment voisin de 1 pour que u et v soient analytiques sur Δ_r et que, pour tout $\rho \in (r , 1)$, on ait

$$|u|_0(\rho) = |v|_0(\rho) > 2\|v\|/3 \quad \text{et} \quad |u - v|_0(\rho) < 2\|v\|/3$$

(on utilise la continuité de la fonction de valuation). De plus, comme V est un corps, $1/u \in W$, et donc on peut choisir r assez voisin de 1 pour que u ne s'annule pas dans Δ_r . On a alors, pour tout $x \in \Delta_r$,

$$|u(x)| = |u|_0(|x|) > 2\|v\|/3 > |u - v|_0(|x|) \geqslant |u(x) - v(x)| ,$$

et ceci montre que v ne s'annule pas non plus dans Δ_r , ce qui achève la démonstration du lemme.

5. 4. THÉORÈME. - <u>Soit</u> $L \in \mathcal{R}_W$ <u>vérifiant la condition</u> (*) . <u>Alors</u>

$$\dim_K(\operatorname{Ker} L \cap \mathfrak{M}) \leqslant \dim_\Omega(\operatorname{Ker} {}^\tau L \cap \mathfrak{A}_t) .$$

<u>Démonstration</u>. - Soit R l'opérateur associé à L par le théorème 5. 2. On a $L = QR$ avec $Q , R \in \mathcal{R}_W$. De plus, d'après la définition de R ,

$$\operatorname{Ker} {}^\tau Q \cap \mathfrak{A}_t = \{0\} .$$

Il en résulte, grâce au théorème 4. 2, que

$$\operatorname{Ker} Q \cap \mathfrak{M} = \{0\} .$$

Par conséquent,

$$\dim_K(\operatorname{Ker} L \cap \mathfrak{M}) = \dim_K(\operatorname{Ker} R \cap \mathfrak{M}) \leqslant \text{ordre } R = \text{ordre } {}^\tau R = \dim_r(\operatorname{Ker} {}^\tau L \cap \mathfrak{A}_t) .$$

5. 5. THÉORÈME. - Soit $L \in \mathcal{R}_W$ vérifiant la condition (*) et à coefficients analytiques dans $D(0, 1^-)$. Si

$$\dim_K(\mathrm{Ker}\ L \cap \mathfrak{a}_0) = \dim_r(\mathrm{Ker}\ {}^T L \cap \mathfrak{a}_t) ,$$

L a un incice en tant qu'opérateur linéaire dans $\mathfrak{a}_0$.

(Cf. [3], Theorem 4. 4.)

5. 6. THÉORÈME. - Soit $L \in \mathcal{R}_W$ d'ordre n , vérifiant la condition (*) et à coefficients analytiques dans $D(0, 1^-)$. Si l'équation $Lu = 0$ possède n solutions linéairement indépendantes analytiques dans $D(0, 1^-)$, on a

$$\mathrm{Ker}_0\ L \subset W_0^{n-1} .$$

Démonstration. - D'après le théorème 5. 4 et l'hypothèse

$$\mathrm{Ker}_t\ L \subset \mathfrak{a}_t ,$$

et donc d'après le corollaire 3. 4,

$$\mathrm{Ker}_t\ L \subset W_t^{n-1} .$$

Par ailleurs, d'après la condition (*), L a au plus un nombre fini de singularités dans $D(0, 1^-)$ et, d'après l'hypothèse, ces singularités sont artificielles (c'est-à-dire qu'au voisinage de chacune de ces singularités, L possède n solutions linéairement indépendantes). On utilise alors le lemme 4. 25 de [4] pour en déduire que

$$\mathrm{Ker}_0\ L \subset W_0^{n-1} .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] DWORK (B.). - On p-adic differential equations, II, Annals of Math., t. 98, 1973, p. 366-376.

[2] DWORK (B.). - On ordinary linear p-adic differential equations with algebraic function coefficients, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 3e année, 1975/76, n° 18, 10 p.

[3] DWORK (B.). and ROBBA (P.). - On ordinary linear p-adic differential equations, Trans. Amer. math. Soc., 1977 (à paraître).

[4] ROBBA (P.). - On the index of p-adic differential operators, I, Annals of Math., t. 101, 1975, p. 280-316.

[5] ROBBA (P.). - Nouveau point de vue sur le prolongement algébrique, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 4e année, 1976/77, n° 5, 14 p.

(Texte reçu le 17 juin 1977)

Philippe ROBBA
138 rue Nationale
75013 PARIS