GROUPE DE TRAVAIL
D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

GILLES CHRISTOL

Structure de Frobénius des systèmes différentiels, I et II

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 4 (1976-1977), exp. n° 3, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1976-1977__4__A2_0>

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Groupe d'étude d'analyse Ultramétrique (2 exposés) 3-01
(Y. AMICE, D. BARSKY, P. ROBBA)
4e année, 1976/77, n° 3, 2 p. 26 octobre et 8 novembre 1976

STRUCTURE DE FROBÉNIUS DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS, I et II

par Gilles CHRISTOL

Le contenu de ces exposés fait l'objet d'un article [2] qui complète l'exposé de Marseille [1]. Nous donnons ici le résumé des principaux résultats.

Nous travaillons dans $\mathbb{C}_p$, le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. Δ sera une réunion finie de boules de rayon 1^- fixée dans la suite. Un ensemble Δ-super-admissible est le complémentaire de la réunion de Δ et d'un nombre fini de disques de rayons strictement inférieur à 1 (y compris éventuellement d'un disque de centre à l'infini). $\mathcal{H}_\Delta$ désignera l'ensemble des éléments analytiques sur un ensemble Δ-super-admissible (qui dépend de l'élément analytique). $\mathcal{H}_\Delta$ est un corps.

A toute matrice A de $M_n(\mathcal{H}_\Delta)$ nous associons le système différentiel

$$x' = Ax \; ; \tag{1}$$

A et B seront <u>équivalentes</u> s'il existe une matrice H de $GL(n , \mathcal{H}_\Delta)$ telle que $H' = BH - HA$ (si x est une solution de (1), alors $y = Hx$ est solution de $y' = By$).

On dira que le point a est <u>ordinaire</u> pour A s'il existe une matrice B , équivalente à A , sans point singulier en a .

A sera dite Δ-<u>normalisée</u> si :

1° tous les points du complémentaire de Δ sont ordinaires,

2° le système $x' = Ax$ a, dans tout disque $D(a , 1^-)$, non contenu dans Δ , n solutions analytiques linéairement indépendantes.

<u>Remarques</u>. - D'après le théorème de transfert de Dwork, il suffit de vérifier 2° dans le disque générique.

Quitte à multiplier la variable par une constante et à changer de Δ , on peut toujours se ramener au cas où A est Δ-normalisée.

PROPOSITION 1. - <u>Pour tout</u> a , <u>non dans</u> Δ , <u>et toute matrice</u> A Δ-<u>normalisée, il existe une matrice</u> B_a <u>équivalente à</u> A <u>dont les coefficients ont une norme de Gauss majorée par</u> 1 <u>et n'ont pas de singularités dans le disque</u> $D(a , 1^-)$.

Pour simplifier, nous supposons maintenant que 0 n'appartient pas à Δ . Nous définissons le Frobénius de la matrice A par

$$A^\varphi(t) = pt^{p-1} A(t^p)$$

(si x est une solution de (1), $y = x(t^p)$ est solution de $y' = A^\varphi y$).

On vérifie assez facilement que A est équivalente à B si, et seulement si,

A^{φ} est équivalente à B^{φ} , et 0 est point ordinaire de B . Par ailleurs, un changement d'origine n'affecte pas le Frobénius (à une équivalence près) si la nouvelle origine appartient encore à Δ .

PROPOSITION 2 (Structure de Frobénius faible). - Pour toute matrice Δ-normalisée A , il existe une matrice Δ-normalisée B telle que A soit équivalente à B^{φ} .

Remarque. - Cette proposition généralise les résultats de ROBBA [4], mais ne répond pas exactement à la conjecture initiale de DWORK [3] pour qui la matrice d'équivalence H devrait, en outre, être à coefficients fractions rationnelles.

Pour montrer l'intérêt d'un tel résultat, nous pouvons énoncer le corollaire suivant :

COROLLAIRE. - Soit A une matrice Δ-normalisée, et a un point n'appartenant pas à Δ . La matrice inversible X , solution de $X' = AX$ dans le disque $D(a, 1^-)$ (X existe par définition), peut s'écrire

$$X(t) = \prod_{k=0}^{\infty} H_k(t^{p^k}) ,$$

où les matrices H_k sont à coefficients éléments analytiques dans $D(0 , 1^-)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHRISTOL (G.). - Structure de Frobénius des équations différentielles p-adiques, Journées d'analyse ultramétrique [1976. Marseille-Luminy], Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 3e année, 1975/76, n° 55, 7 p.

[2] CHRISTOL (G.). - Systèmes différentiels linéaires p-adiques : Structure de Frobénius faible (à paraître).

[3] DWORK (B.). - On p-adic differential equations, I, "Table ronde d'analyse non archimédienne [1972. Paris]", Bull. Soc. math. France, Mémoire 39-40, 1974, p. 27-37.

[4] ROBBA (P.). - Structure de Frobénius faible pour les équations différentielles du premier ordre, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 2e année, 1974/75, n° 20, 11 p.

(Texte reçu le 19 septembre 1977)

Gilles CHRISTOL
5 allée des Gradins
91350 GRIGNY