Daniel Barski

Algèbre d'Iwasawa

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 4 (1976-1977), exp. nº 2, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1976-1977__4__A1_0>

Groupe de Travail d'Analyse Ultramétrique
(Y. AMICE, D. BARSKI, P. ROBBA)
4e année, 1976/77, n° 2, 10 p.

18 octobre 1976

ALGÈBRE D'IWASAWA

par Daniel BARSKI

Résumé. - On donne une nouvelle caractérisation de l'algèbre d'Iwasawa, et on étudie ses rapports avec les caractérisations antérieures. En particulier, on montre les rapports étroits qui existent entre cette caractérisation et celle de Mazur-Serre-Katz.

1. Notations.

Soit p un nombre premier, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}_p$ ont leur signification habituelle [1], $\mathbb{C}_p$ est le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, et $\mathbb{K}_p$ est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ d'anneau des entiers $\mathcal{O}_p$. La valeur absolue sur $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{K}_p$, $\mathcal{O}_p$ et $\mathbb{C}_p$ est normalisée par $|p| = p^{-1}$. Soit ρ un nombre réel positif, et soit $a \in \mathbb{C}_p$, on désigne par

$$B(a , \rho)^+ = \{X \in \mathbb{C}_p \ ; \ |X - a| \leqslant \rho\} \quad (\text{resp. } B(a , \rho)^- = \{X \in \mathbb{C}_p \ ; \ |X - a| < \rho\})$$

la boule fermée (resp. ouverte) de centre a et de rayon ρ. Si $B \subset \mathbb{C}_p$, on note $H(B)$ (resp. $H_0(B)$) l'espace des éléments analytiques sur B (resp. des éléments analytiques sur B nuls à l'infini), c'est-à-dire le complété pour la norme de la convergence uniforme sur B, notée $\| \|_B$, de l'espace des fractions rationnelles de $\mathbb{C}_p(X)$ sans pôle dans B [1]. Nous dirons que $F(X)$ est une fonction analytique sur $B(a , \rho)^-$ si $F(X)$ est un élément analytique sur $B(a , r)^+$ pour tout $r < \rho$ [1]. On pose $U_1 = \{x \in \mathbb{Z}_p \ ; \ |x - 1| \leqslant q^{-1}\}$ où $q = p$ si $p > 2$, et $q=4$ si $p = 2$, et on pose

$$U_{n+1} = \{x \in \mathbb{Z}_p \ ; \ |x - 1| \leqslant q^{-1} p^{-n}\} .$$

Si $A=U_1$ ou $A=\mathbb{Z}_p$, on note $\mathcal{C}(A,\mathcal{O}_p)$ (resp. $\mathcal{C}(A,\mathbb{K}_p)$, $\mathcal{C}(A,\mathbb{C}_p)$) l'espace des fonctions continues de A dans $\mathcal{O}_p$ (resp. $\mathbb{K}_p$, $\mathbb{C}_p$) muni de la norme de la convergence uniforme sur A notée $\| \|_A$. On note $\mathcal{C}'(A , \mathbb{K}_p)$ (resp. $\mathcal{C}'(A , \mathbb{C}_p)$) le dual topologique de $\mathcal{C}(A , \mathbb{K}_p)$ (resp. $\mathcal{C}(A , \mathbb{C}_p)$) dont les éléments μ seront appelés les mesures sur A. On considérera que $\mathcal{C}'(A , \mathbb{K}_p) \subset \mathcal{C}'(A , \mathbb{C}_p)$. On note $\int_A f \, d\mu$, la valeur de μ sur une fonction de $\mathcal{C}(A , \mathbb{C}_p)$. L'espace des mesures sur A est muni de la norme $\|\mu\| = \sup|\int_A f \, d\mu|/\|f\|_A$, le sup étant pris sur les $f \in \mathcal{C}(A , \mathbb{C}_p) - \{0\}$. On notera

$$\mathcal{C}_0'(A , \mathbb{K}_p) = \{\mu \in \mathcal{C}'(A , \mathbb{K}_p) \ ; \ \|\mu\| \leqslant 1\} .$$

On pose, pour tout $h \in \mathbb{N} = N - \{0\}$,

$$B_{m,h} = B(1 + qm , q^{-1} p^{-h})^+ \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{p,h} = C_p - \bigcup_{m=0}^{p^h-1} B_{m,h} .$$

Il est clair que $\mathcal{D}_{p,h}$ est un quasi-connexe de $\mathbb{C}_p$ dont les trous intérieurs sont les boules $B_{m.h}$ [1]. On note, si $a \in \mathbb{Q}$, $a \geqslant 0$, $[a]$ la partie entière de a $([a] \in \underset{\sim}{N} , \quad a-1 < [a] \leqslant a)$.

2. Introduction.

Dans ses travaux sur les fonctions L p-adiques, K. IWASAWA [6] a défini l'algèbre

$$\Lambda = \mathcal{O}_p[[T]] \simeq \mathcal{O}_p[[U_1]] = \varprojlim \mathcal{O}_p[U_1/U_n] ;$$

J. P. SERRE [10] a défini ensuite l'algèbre $\overline{L}$ qui est l'adhérence pour la topologie de la convergence uniforme sur $\underset{\sim}{Z}_p$ de

$$L = \{f \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \mathcal{O}_p) ;$$
$$f(s) = \sum_u \lambda_u u^s , \quad u \in U_1 \quad \text{et} \quad \lambda_u \in \mathcal{O}_p , \quad \lambda_u = 0 \quad \text{sauf un nombre fini}\} ,$$

il a montré qu'il existait un isomorphisme canonique entre $\overline{L}$ et Λ , et a proposé d'appeler algèbre d'Iwasawa ces algèbres. B. MAZUR [8] et J.-P. SERRE ont montré que l'algèbre d'Iwasawa est aussi isomorphe à l'algèbre des mesures $\mu \in \mathcal{C}_0'(U_1 , \underset{\sim}{K}_p)$ et, si $f \in \overline{L}$, il existe $\mu_f \in \mathcal{C}_0'(U_1 , \underset{\sim}{K}_p)$ telle que

$$f(s) = \int_{u \in U_1} u^s \, d\mu_f \quad \text{pour tout} \quad s \in \underset{\sim}{Z}_p .$$

En outre, il est facile de voir que tout élément de $\overline{L}$ se prolonge en une fonction analytique sur la boule $B(0 , \rho_p)^-$, où $\rho_p = p^{1-1/(p-1)}$ si $p > 2$ et $\rho_2 = 4$. Or Y. AMICE et J. FRESNEL, dans leurs travaux sur les fonctions zéta p-adiques des corps abéliens réels, ont montré qu'il y avait un lien étroit entre les propriétés de continuité, d'analyticité d'une fonction f de $\underset{\sim}{Z}_p$ dans $\underset{\sim}{C}_p$ et les propriétés de prolongeabilité analytique à la Krasner de la fonction génératrice,

$$F(X) = \sum_{n \geqslant 0} f(n) X^n ,$$

de f sur des quasi-connexes du type $\underset{\sim}{C}_p - B(1 , \rho)^-$ avec $\rho \leqslant 1$. En fait, c'est le théorème de Mittag-Leffler p-adique [1] ou [9] qui permet de faire le lien entre ces propriétés grâce aux inégalités de type Cauchy qu'il fournit. Nous allons montrer (théorème 1) qu'une fonction f de $\underset{\sim}{Z}_p$ dans $\underset{\sim}{K}_p$ appartient à $\overline{L}$ si, et seulement si, $F(X) = \sum_{n \geqslant 0} f(n) X^n$ est, pour tout entier $h \geqslant 0$, un élément analytique sur le quasi-connexe $\mathcal{D}_{p,h}$ satisfaisant à $\|F\|_{\mathcal{D}_{p,h}} \leqslant qp^h$. Nous montrerons comment la connaissance de F , et en particulier la connaissance du développement de F en série de faculté, permet de calculer μ_f ainsi que les fonctions de L ($\sum \lambda_u u^s$, somme finie) qui approchent uniformément f sur $\underset{\sim}{Z}_p$.

Le principe qui consiste à relier des propriétés de congruences d'une suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ aux propriétés de prolongeabilité analytique p-adique de la fonction génératrice $\sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$ a été utilisée pour trouver des congruences entre des nombres à définition combinatoire ou arithmétique ([3], [4], [5]).

3. Fonctions génératrices des éléments de l'algèbre d'Iwasawa.

Rappelons la définition de l'algèbre d'Iwasawa. Soit L le sous-$\mathcal{O}_p$-module de

$\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p, \mathcal{O}_p)$ engendré par les fonctions $s \longrightarrow u^s$, où $u \in U_1$, son adhérence $\overline{L}$ pour la topologie de la convergence uniforme sur $\underset{\sim}{Z}_p$ est l'algèbre d'Iwasawa. Nous allons étudier les fonctions génératrices $F(X) = \sum_{n\geqslant 0} f(n)\, X^n$ des fonctions f de l'algèbre d'Iwasawa, et nous les caractériserons parmi les germes de fonctions analytiques au voisinage de zéro.

Soit $\mathfrak{L}$ le sous-$\mathcal{O}_p$-module des fractions rationnelles sur $\underset{\sim}{C}_p$, $\underset{\sim}{C}_p(X)$, engendré par les fractions rationnelles $(1 - uX)^{-1}$, où $u \in U_1$, soit $\overline{\mathfrak{L}}$ son adhérence pour la topologie de la convergence uniforme sur $B(0\,,\,1)^-$, ce qui a un sens car le pôle de $(1 - uX)^{-1}$ est u^{-1} qui est de norme 1, donc les éléments de $\mathfrak{L}$ sont des fonctions analytiques bornées sur $B(0\,,\,1)^-$. Par définition, $\overline{\mathfrak{L}} \subset H(B(0\,,1)^-)$.

PROPOSITION 1. - <u>Pour qu'une application</u> f <u>de</u> $\underset{\sim}{Z}_p$ <u>dans</u> $\mathcal{O}_p$ <u>appartienne à l'algèbre d'Iwasawa</u> $\overline{L}$, <u>il faut et il suffit que</u> $F(X) = \sum_{n\geqslant 0} f(n)\, X^n$ <u>appartienne à</u> $\overline{\mathfrak{L}}$.

Comme $\underset{\sim}{C}_p$ est algébriquement clos les inégalités de Cauchy sont vérifiées, c'est-à-dire que si $G(X) = \sum_{n\geqslant 0} g(n)\, X^n$ est une fonction analytique bornée sur $B(0,\rho)^-$, alors

$$\|G\|_{B(0\,,\,\rho)^-} = \sup_{n\geqslant 0} |g(n)|\, \rho^n \quad [1].$$

La proposition est alors immédiate.

Soit $\pi \in \underset{\sim}{Z}_p$ tel que $|\pi| = q^{-1}$. Si $u \in U_1$, on peut écrire de manière unique $u = 1 + \pi v(u)$, où $v(u) \in \underset{\sim}{Z}_p$. Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> f <u>une application de</u> $\underset{\sim}{Z}_p$ <u>dans</u> $\underset{\sim}{K}_p$. <u>Pour que</u> f <u>appartienne à</u> $\overline{L}$, <u>il faut et il suffit que la fonction génératrice</u> $F(X) = \sum_{n\geqslant 0} f(n)\, X^n$ <u>appartienne, pour tout entier</u> $h \geqslant 0$, <u>à</u> $H_0(\mathfrak{D}_{p,h})$ <u>et que</u> $\|F\|_{\mathfrak{D}_{p,h}} \leqslant qp^h$.

Pour démontrer ce théorème nous aurons besoin de quelques lemmes techniques.

Fixons quelques notations concernant des quantités qui interviennent dans la série d'interpolation sur $\underset{\sim}{N}$ des fonctions $(1 - uX)^{-1}$ avec $u \in U_1$, donc $u = 1 + \pi v(u)$ avec $v(u) \in \underset{\sim}{Z}_p$. Posons, pour α et β appartenant à $\underset{\sim}{C}_p$,

$$\begin{bmatrix} n \\ \alpha, \beta, X \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (1-(\alpha+\beta k)X)^{-1} = \frac{(n!)X^n\, \beta^n}{(1-\alpha X)(1-(\alpha+\beta)X)\ldots(1-(\alpha+\beta n)X)}\,.$$

(<u>Remarque</u> : $\begin{bmatrix} n \\ \alpha\ ,\ \beta\ ,\ X \end{bmatrix} = \dfrac{1}{(n+1)\beta X} \dbinom{(1 - \alpha X)(\beta X)^{-1}}{n+1}^{-1}$, où l'on a posé $\dbinom{Y}{n} = \dfrac{Y(Y-1)\ldots(Y-n+1)}{n!}$.)

Il est clair que $\begin{bmatrix} n \\ \alpha\ ,\ \beta\ ,\ X \end{bmatrix}$ est le n-ième coefficient d'interpolation [2], sur la base des polynômes $\binom{X}{n}$ de la fonction de $\underset{\sim}{Z}_p$ dans $\underset{\sim}{C}_p$

$$g_X(t)\ :\ t \longrightarrow (1 - (\alpha + \beta t)X)^{-1}\,.$$

Il est immédiat que $\begin{bmatrix} n \\ \alpha\ ,\ \beta\ ,\ X \end{bmatrix}$ est un élément analytique sur $B(0\,,\,\rho)^-$ avec $\rho^{-1} = \sup_{0\leqslant k\leqslant n} |\alpha + \beta k|$. En particulier, si $\alpha = 1$ et $\beta = \pi$, alors $\begin{bmatrix} n \\ 1\ ,\ \pi\ ,\ X \end{bmatrix}$

est un élément analytique sur $B(0\ ,\ 1)^-$ et $\left\|\begin{bmatrix} & n & \\ 1\ , & \pi\ , & X\end{bmatrix}\right\|_{B(0,1)^-} \leqslant |n!\ \pi^n|$.

LEMME 1. - <u>Si</u> $u \in U_1$ <u>et</u> $u = 1 + \pi v(u)$, <u>on a formellement</u> (= X-<u>adiquement</u>)

$$(1 - uX)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0} \binom{v(u)}{n} \begin{bmatrix} & n & \\ 1\ , & \pi\ , & X\end{bmatrix} .$$

Soit T l'automorphisme de $\underset{\sim}{C}_p[[X]]$, défini par

$$T(\tilde{f})(X) = f(X) \quad \text{avec} \quad \tilde{f}(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n \frac{X^n}{n!} \quad \text{et} \quad f(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n ,$$

T est X-adiquement continu (et même $(X\ ,\ p)$-adiquement continu). On a de manière évidente, si α et β appartiennent à $\underset{\sim}{C}_p$, $T(e^{\alpha X}) = (1 - \alpha X)^{-1}$ et

$$T(e^{\alpha X}(e^{\beta X} - 1)^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}(1 - (\alpha + k\beta)X)^{-1} = \begin{bmatrix} & n & \\ \alpha\ , & \beta\ , & X\end{bmatrix} .$$

Donc

$$T^{-1}((1-uX)^{-1}) = e^{uX} = e^{(1+\pi v(u))X} = e^X\ ((e^{\pi X}-1)+1)^{v(u)} = \sum_{n\geqslant 0} \binom{v(u)}{n} e^X(e^{\pi X}-1)^n ,$$

et par conséquent,

$$(1 - uX)^{-1} = T(e^{uX}) = \sum_{n\geqslant 0} \binom{v(u)}{n} T(e^X(e^{\pi X} - 1)^n) = \sum_{n\geqslant 0} \binom{v(u)}{n} \begin{bmatrix} & n & \\ 1\ , & \pi\ , & X\end{bmatrix} .$$

LEMME 2. - <u>Soit</u> $G \in H(B(0\ ,\ r)^+)$, <u>avec</u> $0 < r < 1$, <u>alors</u> $G(X) = \sum_{n\geqslant 0} b_n \begin{bmatrix} & n & \\ 1, & \pi, & X\end{bmatrix}$, <u>le second membre converge uniformément sur</u> $B(0\ ,\ r)^+$, <u>et</u>

$$\|G\|_{B(0,r)^+} = \sup_{n\geqslant 0} |b_n\ (n!)\pi^n|\, r^n .$$

<u>Si</u> G <u>est une fonction analytique sur</u> $B(0\ ,\ 1)^-$, <u>on a encore</u> $G(X) = \sum_{n\geqslant 0} b_n \begin{bmatrix} & n & \\ 1, & \pi, & X\end{bmatrix}$, <u>le second membre converge uniformément sur</u> $B(0\ ,\ r)^+$ <u>pour</u> $0 < r < 1$; <u>en outre, si</u> G <u>est borné sur</u> $B(0\ ,\ 1)^-$, <u>on a</u>

$$\|G\|_{B(0,1)^-} = \sup_{n\geqslant 0} |b_n\ (n!)\ \pi^n| .$$

Montrons que si $G \in H(B(0\ ,\ r)^+)$, avec $0 < r < 1$, il existe une suite de nombre de $\underset{\sim}{C}_p$, $(b_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$, telle que $G(X) = \sum_{n\geqslant 0} b_n \begin{bmatrix} & n & \\ 1\ , & \pi\ , & X\end{bmatrix}$ sur $B(0\ ,\ r)^+$. On sait que

$$G(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n \quad \text{sur} \quad B(0\ ,\ r)^+ ,$$

avec $\lim_{n\to\infty} |a_n| r^n = 0$, puisque $G \in H(B(0\ ,\ r)^+)$ et, en outre,

$$\|G\|_{B(0\ ,\ r)^+} = \sup_{n\geqslant 0} |a_n| r^n \ [1].$$

L'existence des b_n est alors immédiate, car on a en fait une égalité de séries formelles. Il reste à montrer que $\sum_{n\geqslant 0} b_n \begin{bmatrix} & n & \\ 1\ , & \pi\ , & X\end{bmatrix}$ converge sur $B(0\ ,\ r)^+$. Nous allons montrer par récurrence que

$$|b_n(n!)\pi^n|\, r^n \leqslant \max_{0\leqslant j\leqslant n} |a_j|\, r^n .$$

C'est vrai pour $j = 0$, car $b_0 = a_0$. Il est facile de montrer que

$$a_n = b_n\ (n!)\pi^n + \sum_{0\leqslant j\leqslant n} \alpha_{j,n}\ (b_j\ (j!)\pi^j) , \quad \text{où} \quad \alpha_{j,n} \in \underset{\sim}{Z}_p .$$

Donc d'après l'inégalité ultramétrique et l'hypothèse de récurrence

$$|b_n\ (n!)\pi^n|r^n \leqslant \max_{0\leqslant j\leqslant n} |a_j|r^n$$

et par conséquent, comme $r < 1$, $\lim_{n\to\infty} |b_n\ (n!)\pi^n|r^n = 0$. Ceci montre la convergence uniforme sur $B(0\ ,\ r)^+$ de $\sum_{n\geqslant 0} b_n \begin{bmatrix} & n & \\ 1\ , & \pi\ , & X\end{bmatrix}$ vers $G(X)$, car

$$|(1 - X)(1 - (1 + \pi)X)\dots(1 - (1 + n\pi)X)| = 1 \quad \text{pour tout} \quad X \in B(0\ ,\ 1)^- .$$

D'après l'inégalité ultramétrique, $\|G\|_{B(0,r)^+} \leqslant \sup_{n\geqslant 0} |(n!)\pi^n\ b_n|r^n$. On a vu que $\lim_{n\to\infty} |b_n\ (n!)\pi^n|r^n = 0$, soit $n(r)$ le plus grand entier tel que

$$|b_{n(r)}\ (n(r)!)\pi^{n(r)}|r^{n(r)} = \sup_{n\geqslant 0} |b_n\ (n!)\pi^n|r^n ,$$

on a $n(r) < +\infty$. Donc

$$\|G\|_{B(0,r)^+} = \|\sum_{n\geqslant 0} b_n \begin{bmatrix} & n & \\ 1, & \pi, & X\end{bmatrix}\|_{B(0,r)^+} = \sup_{|X|=r} |G(X)| = \sup_{|X|=r} |\sum_{n=0}^{n(r)} b_n \begin{bmatrix} & n & \\ 1, & \pi, & X\end{bmatrix}|$$

d'après le principe du maximum [1] et ce qui précède. Donc

$$\|G\|_{B(0,r)^+} = \sup_{|X|=r} \left|\sum_{n=0}^{n(r)} b_n\ (n!)\pi^n\ X^n\ (1-(1+(n+1)\pi)X)\dots(1-(1+n(r)\pi)X)\right| .$$

On est donc ramené au cas d'un polynôme $\sum_{n=0}^{n(r)} c_n\ X^n$. Comme $\underset{\sim}{C}_p$ est algébriquement clos, on a

$$\left\|\sum_{n=0}^{n(r)} c_n\ X^n\right\|_{B(0,r)^+} = \sup_{0\leqslant n\leqslant n(r)} |c_n|r^n \quad [1],$$

or, pour $0 < r < 1$, on a

$$\sup_{0\leqslant n\leqslant n(r)} |c_n|r^n = \sup_{0\leqslant n\leqslant n(r)} |b_n\ (n!)\pi^n|r^n = |b_{n(r)}\ (n(r)!)\pi^{n(r)}|r^{n(r)} .$$

La première partie du lemme est démontrée. La deuxième partie du lemme se démontre en passant à la limite lorsque r tend vers 1.

PROPOSITION 2. - La fonction analytique $F(X) = \sum_{n\geqslant 0} b_n(F)X^n$ appartient à $\bar{\mathfrak{L}}$ si, et seulement si,

$$F(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(F)\begin{bmatrix} & n & \\ 1\ , & \pi\ , & X\end{bmatrix} ,$$

où $\pi \in \underset{\sim}{Z}_p$, $|\pi| = q^{-1}$ et $a_n(F) \in \mathcal{O}_p$.

On sait, d'après le lemme 2, que toute fonction F analytique bornée sur $B(0,1)^-$ peut s'écrire de manière unique

$$F(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(F)\begin{bmatrix} & n & \\ 1\ , & \pi\ , & X\end{bmatrix} ,$$

la série du second membre convergeant simplement vers $F(X)$ sur $B(0\ ,\ 1)^-$. Si $F(X) = (1 - uX)^{-1}$, $u \in U_1$, alors, d'après le lemme 1, si on pose $u = 1 + \pi v(u)$, on a

$$a_n(F) = \binom{v(u)}{n} \in \underset{\sim}{Z}_p \subset \mathcal{O}_p .$$

Donc, si $F \in \mathfrak{L}$, $a_n(F) \in \mathcal{O}_p$. D'après le lemme 2, l'application $F \longrightarrow a_n(F)$ est une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions analytiques bornées sur $B(0\ ,\ 1)^-$, muni de la norme de la convergence uniforme sur $B(0\ ,\ 1)^-$, à valeurs dans $\underset{\sim}{C}_p$. Cette forme est en particulier continue sur le sous-espace $\bar{\mathfrak{L}}$. Donc, comme $\mathcal{O}_p$ est complet, $a_n(F) \in \mathcal{O}_p$ si $F \in \bar{\mathfrak{L}}$ (par passage à la limite).

Réciproquement, soit F une fonction analytique bornée sur $B(0\ ,\ 1)^-$,

$$F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n(F)\begin{bmatrix} & n & \\ 1 & , \pi & , X\end{bmatrix} .$$

Supposons que $a_n(F) \in \mathcal{O}_p$. Alors, pour tout entier $h \geq 0$, il existe $n(h) \in \underset{\sim}{N}$ et $G_h \in \mathcal{O}_p[[X]]$ tels que

$$F(X) = \sum_{n=0}^{n(h)} a_n(F)\begin{bmatrix} & n & \\ 1 & , \pi & , X\end{bmatrix} + p^h\, G_h(X)$$

(il suffit de choisir $n(h)$ de telle sorte que $|n!| \leq p^{-h}$). Posons

$$F_h(X) = \sum_{n=0}^{n(h)} a_n(F)\begin{bmatrix} & n & \\ 1 & , \pi & , X\end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{n(h)} a_n(F) \sum_{k=0}^{n} (-\ 1)^{n-k} \binom{n}{k}(1 - (1 + k\pi)X)^{-1} .$$

Il est clair que $F_h \in \mathfrak{L}$, puisque $a_n(F) \in \mathcal{O}_p$, et par conséquent $F \in \overline{\mathfrak{L}}$.

La proposition est démontrée.

COROLLAIRE. - <u>Une application</u> f <u>de</u> $\underset{\sim}{Z}_p$ <u>dans</u> $\underset{\sim}{C}_p$ <u>appartient à</u> $\overline{L}$ <u>si, et seulement si, sa fonction génératrice</u> $F(X) = \sum_{n\geq 0} f(n)\, X^n$ <u>peut s'écrire</u>

$$F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n(f)\begin{bmatrix} & n & \\ 1 & , \pi & , X\end{bmatrix} ,$$

<u>avec</u> $a_n(f) \in \mathcal{O}_p$ <u>pour tout entier</u> $n \geq 0$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 1.

Soit f une application de $\underset{\sim}{Z}_p$ dans $\underset{\sim}{K}_p$ appartenant à $\overline{L}$, alors d'après la proposition 2,

$$F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n(f)\begin{bmatrix} & n & \\ 1 & , \pi & , X\end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad a_n(f) \in \mathcal{O}_p .$$

Montrons que $F(X)$ est un élément analytique sur $\mathbb{O}_{p,h}$ nul à l'infini. En effet,

$$\begin{bmatrix} & n & \\ 1 & , \pi & , X\end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} (-\ 1)^{n-k} \binom{n}{k}(1 - (1 + k\pi)X)^{-1}$$

est le n-ième coefficient d'interpolation sur la base normale des polynômes $\binom{x}{n}$ (Cf. [2]) de la fonction de $\underset{\sim}{Z}_p$ dans $\underset{\sim}{C}_p$, $g_X(t)$, définie par

$$g_X(t) = (1 - (1 + \pi t)X)^{-1} .$$

Si $X \in \mathbb{O}_{p,h}$, g_X est une fonction localement analytique sur $\underset{\sim}{Z}_p$ de rayon d'analyticité totale p^{-h} [2], et en outre

$$\sup_{X\in\mathbb{O}_{p,h}} \sup_{0\leq m\leq p^h} \sup_{(1+\pi t)\in B_{m,h}} |g_X(t)| \leq qp^h .$$

Donc d'après un résultat général d'Yvette AMICE (corollaire 3 du théorème 3 de [2]), on a

$$\left\|\begin{bmatrix} & n & \\ 1 & , \pi & , X\end{bmatrix}\right\|_{\mathbb{O}_{p,h}} \leq qp^h \left|\left[n/p^h\right] !\right| .$$

Cette inégalité entraîne que $F \in H_0(\mathbb{O}_{p,h})$ puisque $\begin{bmatrix} & n & \\ 1 & , \pi & , X\end{bmatrix}$ tend vers zéro, lorsque n tend vers $+\infty$, uniformément pour $X \in \mathbb{O}_{p,h}$, et que $\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} & n & \\ 1, & \pi, & X\end{bmatrix} = 0$ pour $n \geq 0$.

Enfin, l'inégalité précédente et l'inégalité ultramétrique entraînent $\|F\|_{\mathbb{O}_{p,h}} \leq qp^h$ puisque $a_n(f) \in \mathcal{O}_p$, donc $|a_n(f)| \leq 1$. La condition nécessaire est démontrée.

Remarque. - Au lieu d'utiliser les résultats de [2], on peut donner une démonstration directe du résultat (Cf. [3], [4], [5]).

Réciproquement, supposons que $F(X) = \sum_{n\geq 0} f(n)\, X^n$ se prolonge en une application de $H_0(\mathbb{D}_{p,h})$ (d'une manière unique d'après l'unicité du prolongement analytique [1]) et que $\|F\|_{\mathbb{D}_{p,h}} \leq qp^h$, pour tout entier $h \geq 0$. On sait, d'après le théorème de Mittag-Leffler p-adique ([1] ou [9]), que l'on peut écrire de manière unique sur $\mathbb{D}_{p,h}$,

$$F(X) = \sum_{m=0}^{p^h-1} F_{m,h}(X) ,$$

où $F_{m,h} \in H_0(\underset{\sim}{C}_p - B_{m,h})$ et $F - F_{m,h}$ se prolonge analytiquement sur $B_{m,h}$; en outre, on a

$$\|F\|_{\mathbb{D}_{p,h}} = \sup_{0\leq m<p^h} \|F_{m,h}\|_{\underset{\sim}{C}_p - B_{m,h}} .$$

Comme $F_{m,h} \in H_0(\underset{\sim}{C}_p - B_{m,h})$, on a de manière unique [1],

$$F_{m,h}(X) = \sum_{n\geq 1} \lambda_{m,n,h}\, (1 - (1 + qm)^{-1}\, X)^{-n}$$

$$\text{avec } \sup_{n\geq 1} |\lambda_{m,n,h}|\, q^n\, p^{hn} = \|F_{m,h}\|_{\underset{\sim}{C}_p - B_{m,h}} \leq qp^h .$$

On obtient donc d'une part que $|\lambda_{m,1,h}| \leq 1$, et d'autre part que, pour $n \geq 2$, $|\lambda_{m,n,h}| \leq q^{-1}\, p^{-h}$. Donc

$$\|F(X) - \sum_{m=0}^{p^h-1} \lambda_{m,1,h}\, (1 - (1 + qm)^{-1}\, X)^{-1}\|_{B(0,1)^-} \leq p^{-h}\, q^{-1} .$$

Si l'on montre que $\lambda_{m,1,h} \in \mathcal{O}_p$, on aura alors montré que $F \in \overline{\mathfrak{L}}$ et donc que $f \in \overline{L}$. Il suffit en fait de montrer que $\lambda_{m,1,h} \in \underset{\sim}{K}_p$ puisque $|\lambda_{m,1,h}| \leq 1$.

Soit alors σ un élément du groupe de Galois de $\underset{\sim}{C}_p$ sur $\underset{\sim}{K}_p$. On sait que σ est une application continue de $\underset{\sim}{C}_p$ dans lui-même. Donc, si l'on pose

$$F^{\sigma}(X) = \sum_{n\geq 0} \sigma(f(n))\, X^n ,$$

on a

$$F^{\sigma}(X) = F(X) = \sum_{m=0}^{p^h-1} F^{\sigma}_{m,h}(X) = \sum_{m=0}^{p^h-1} \sum_{n\geq 1} \sigma(\lambda_{m,n,h})\, (1 - (1 + qm)^{-1}\, X)^{-n}$$

$$= \sum_{m=0}^{p^h-1} \sum_{n\geq 1} \lambda_{m,n,h} (1 - (1 + qm)^{-1}\, X)^{-n} .$$

D'après l'unicité de la décomposition de Mittag-Leffler de F et de l'unicité du développement de $F_{m,h}$ en série de Laurent en $(1 - (1 + qm)^{-1}\, X)$, on déduit que $\lambda_{m,n,h} = \sigma(\lambda_{m,n,h})$, et donc que $\lambda_{m,n,h} \in \underset{\sim}{K}_p$. Le théorème est démontré.

Remarque. - Le fait que $\underset{\sim}{K}_p$ soit une extension finie de $\underset{\sim}{Q}_p$ n'est pas essentiel.

4. Lien avec les mesures p-adiques.

Nous allons faire le lien entre la caractérisation obtenue au paragraphe précédent pour les éléments de l'algèbre d'Iwasawa et la caractérisation employée par N. KATZ dans ses travaux sur les fonctions L p-adiques.

Nous avons vu que $f \in \overline{L}$ (f application de $\underset{\sim}{Z}_p$ dans $\underset{\sim}{C}_p$) si, et seulement si, $F(X) = \sum_{n\geqslant 0} f(n)\, X^n = \sum_{n\geqslant 0} a_n(f) \begin{bmatrix} & n & \\ 1 \;, & \pi \;, & X \end{bmatrix}$ avec $a_n(f) \in \mathcal{O}_p$ (proposition 2).

Nous avons remarqué que $\begin{bmatrix} & n & \\ 1 \;, & \pi \;, & X \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (1 - (1 + k\pi)X)^{-1}$ est le n-ième coefficient d'interpolation sur $\underset{\sim}{N}$ de la fonction de t,

$$g_X(t) = (1 - (1 + \pi t)X)^{-1} ,$$

qui appartient à $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p \,,\, \underset{\sim}{C}_p)$ si $\inf_{u\in U_1} |u - X| > 0$.

D'après J.-P. SERRE [11], ceci suggère d'essayer de lire la formule précédente donnant $F(X)$ comme étant la valeur d'une certaine mesure de $\mathcal{C}'(\underset{\sim}{Z}_p \,,\, \underset{\sim}{C}_p)$ sur $g_X(t)$. Or la suite $(a_n(f))_{n\geqslant 0}$ est une suite bornée d'éléments de $\underset{\sim}{K}_p$, il existe donc, d'après [11], une unique mesure $\mu_f \in \mathcal{C}'(\underset{\sim}{Z}_p \,,\, \underset{\sim}{K}_p)$ telle que

$$\int_{x\in \underset{\sim}{Z}_p} \binom{x}{n}\, d\mu_f(x) = a_n(f)$$

pour tout $n \geqslant 0$. En outre, $\mu_f \in \mathcal{C}'_0(\underset{\sim}{Z}_p \,,\, \underset{\sim}{K}_p)$ puisque $a_n(f) \in \mathcal{O}_p$ pour $n \geqslant 0$. On peut donc écrire, si $f \in \overline{L}$,

$$F(X) = \sum_{n\geqslant 0} f(n)\, X^n = \sum_{n\geqslant 0} a_n(f) \begin{bmatrix} & n & \\ 1 \;, & \pi \;, & X \end{bmatrix} = \int_{t\in \underset{\sim}{Z}_p} g_X(t)\, d\mu_f(t) ,$$

où μ_f est définie par $\int_{x\in \underset{\sim}{Z}_p} \binom{x}{n}\, d\mu_f(x) = a_n(f)$ pour $n \geqslant 0$. Nous avons démontré la proposition suivante :

PROPOSITION 3. - <u>Si</u> $f \in \overline{L}$, <u>il existe une unique mesure</u> $\mu_f \in \mathcal{C}'_0(\underset{\sim}{Z}_p \,,\, \underset{\sim}{K}_p)$ <u>telle que, si</u> $F(X) = \sum_{n\geqslant 0} f(n)\, X^n$,

$$F(X) = \int_{t\in \underset{\sim}{Z}_p} g_X(t)\, d\mu_f(t) \;, \text{ \underline{où} } g_X(t) = (1 - (1 + \pi t)X)^{-1} \;,\quad X \notin U_1 .$$

Notons $\psi_{m,h} \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p \,,\, \mathcal{O}_p)$ la fonction caractéristique de la boule de $\underset{\sim}{Z}_p$, de centre $m \in \underset{\sim}{Z}_p$ et de rayon p^{-h} $(= B(m \,,\, p^{-h})^+ \cap \underset{\sim}{Z}_p)$. On a

$$g_X(t) = \lim_{h\to\infty} \sum_{m=0}^{p^h-1} \psi_{m,h}(t)\, (1 - (1 + m\pi)X)^{-1} ,$$

la limite étant uniforme en t sur $\underset{\sim}{Z}_p$. On a donc, comme μ_f est continue,

$$\int_{t\in \underset{\sim}{Z}_p} g_X(t)\, d\mu_f(t) = \int_{t\in \underset{\sim}{Z}_p} (\lim_{h\to\infty} \sum_{m=0}^{p^h-1} \psi_{m,h}(t)\, g_X(m))\, d\mu_f(t)$$

$$= \lim_{h\to\infty} \sum_{m=0}^{p^h-1} \int_{t\in \underset{\sim}{Z}_p} \psi_{m,h}(t)\, g_X(m)\, d\mu_f(t) \;,\quad X \notin U_1 .$$

Donc en développant $g_X(m)$ en série de Taylor au voisinage de zéro, en fait pour $|X| < 1$, il vient

$$F(X) = \lim_{h\to\infty} \sum_{m=0}^{p^h-1} \int_{t\in \underset{\sim}{Z}_p} (\sum_{n\geqslant 0} (1 + m)^n\, X^n)\, \psi_{m,h}(t)\, d\mu_f(t)$$

$$= \sum_{n\geqslant 0} X^n \int_{t\in \underset{\sim}{Z}_p} (\lim_{h\to\infty} \sum_{m=0}^{p^h-1} (1 + m)^n\, \psi_{m,h}(t))\, d\mu_f(t) ,$$

les permutations effectuées entre les sommations, l'intégration et le passage à la limite sont légitimes puisque, d'après les inégalités de Cauchy,

$$\sum_{m=0}^{p^h-1} (1 + m)^n\, \psi_{m,h}(t)$$

converge uniformément en n et en t lorsque h tend vers ∞. Or

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{p^h-1} (1+m)^n \psi_{m,h}(t) = (1+\pi t)^n ,$$

la convergence étant uniforme en t sur $\underset{\sim}{Z}_p$ et en n sur $\underset{\sim}{N}$. Par conséquent, si $f \in \overline{L}$, $|X| < 1$,

$$F(X) = \sum_{n\geq 0} f(n) X^n = \sum_{n\geq 0} \left(\int_{t\in \underset{\sim}{Z}_p} (1+\pi t)^n \, d\mu_f(t)\right) X^n .$$

Or,

$$\int_{t\in \underset{\sim}{Z}_p} (1+\pi t)^n \, d\mu_f(t) = \int_{u\in U_1} u^n \, d\nu_f(u)$$

où $\nu_f \in \mathcal{C}_0^!(U_1 , \underset{\sim}{K}_p)$, et est définie par

$$\int_{u\in U_1} g(u) \, d\nu_f(u) = \int_{t\in \underset{\sim}{Z}_p} g(1+\pi t) \, d\mu_f(t) \quad \text{pour} \quad g \in \mathcal{C}(U_1 , \underset{\sim}{C}_p) .$$

Donc

$$F(X) = \sum_{n\geq 0} X^n \left(\int_{u\in U_1} u^n \, d\nu_f(u)\right) .$$

Par conséquent, si $f \in \overline{L}$, on a, pour $n \in \underset{\sim}{N}$,

$$f(n) = \int_{u\in U_1} u^n \, d\nu_f(u)$$

et, par continuité, pour $s \in \underset{\sim}{Z}_p$,

$$f(s) = \int_{u\in U_1} u^s \, d\nu_f(u) .$$

Il est clair que ν_f est unique, car les monômes u^n engendrent un espace dense dans $\mathcal{C}(U_1 , \mathcal{O}_p)$ d'après le théorème de Weierstrass p-adiques [2]. Donc ν_f est la mesure associée par MAZUR-SERRE-KATZ ([7] et [6]) à la fonction f de l'algèbre d'Iwasawa. Nous avons donc démontré le résultat suivant :

THÉORÈME 2. - <u>Soit</u> $\pi \in \underset{\sim}{Z}_p$ <u>tel que</u> $|\pi| = q^{-1}$. <u>Soit</u> f <u>une application de</u> $\underset{\sim}{Z}_p$ <u>dans</u> $\underset{\sim}{C}_p$. <u>Une condition nécessaire et suffisante pour que</u> $f \in \overline{L}$ <u>est qu'il existe une mesure</u> $\nu_f \in \mathcal{C}_0^!(U_1 , \underset{\sim}{K}_p)$ <u>telle que, pour</u> $s \in \underset{\sim}{Z}_p$, <u>on ait</u> $f(s) = \int_{u\in U_1} u^s d\nu_f(u)$ <u>Cette mesure est définie de la manière suivante</u> : <u>Si</u>

$$F(X) = \sum_{n\geq 0} f(n) X^n = \sum_{n\geq 0} a_n(f) \begin{bmatrix} 1 , & \frac{n}{\pi} , & X \end{bmatrix}$$

<u>et si</u> μ_f <u>est l'unique mesure de</u> $\mathcal{C}_0^!(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{K}_p)$ <u>telle que</u> $\int_{x\in \underset{\sim}{Z}_p} \binom{x}{n} d\mu_f(x) = a_n(f)$ <u>alors</u>

$$\int_{u\in U_1} g(u) \, d\nu_f(u) = \int_{t\in \underset{\sim}{Z}_p} g(1+\pi t) \, d\mu_f(t) \quad \underline{\text{pour toute}} \quad g \in \mathcal{C}(U_1 , \underset{\sim}{C}_p) .$$

<u>Enfin</u>, <u>on a</u>

$$F(X) = \int_{u\in U_1} (1-uX)^{-1} \, d\nu_f(u) = \int_{t\in \underset{\sim}{Z}_p} (1-(1+\pi t)X)^{-1} \, d\mu_f(t) .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Nombres p-adiques. - Paris, Presses Universitaires de France, 1975 (Collection SUP. "Le Mathématicien", 14).

[2] AMICE (Y.). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, T. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1964).

[3] BARSKY (D.). - Analyse p-adique et nombres de Bell, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 282, 1976, Série A, p. 1257-1259.

[4] BARSKY (D.). - Analyse p-adique et nombre de Bernoulli, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 283, 1976, Série A, p. 1069-1072.

[5] BARSKY (D.). - Analyse p-adique et nombres de Bernoulli-Hurwitz, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 284, 1977, Série A, p. 137-140.

[6] IWASAWA (K.). - Lectures on p-adic L-functions. - Princeton, Princeton University Press, 1972 (Annals of Mathematics Studies, 74).

[7] KATZ (N.). - p-adic L-functions via moduli of elliptic curves, "Algebraic geometry [1974. Arcata]", p. 479-506. - Providence, American mathematical Society, 1975 (Proceedings of Symposia in pure Mathematics, 29).

[8] MAZUR (B.) and SWINNERTON-DYER (P.). - Arithmetic of Weil curves, Invent. math., t. 25, 1974, p. 1-61.

[9] ROBBA (P.). - Fonctions analytiques sur les corps valués complets ultramétriques, Astérisque n° 10, 1973, p. 109-218.

[10] SERRE (J.-P.). - Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques, "Modular functions of one variable, III [1972. Antwerp]", p. 192-288. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 350).

[11] SERRE (J.-P.). - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. - Paris, Presses Universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 12, p. 69-85).

(Texte reçu le 21 juin 1977)

Daniel BARSKY
Mathématiques
Université Paris-7, Tour 45-55,
2 place Jussieu
75221 PARIS CEDEX 05