

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

PIERRETTE CASSOU-NOGUÈS

Fonctions L_p -adiques attachées à une courbe elliptique

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 4 (1976-1977), exp. n° 22, p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1976-1977__4__A15_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS L p-ADIQUES ATTACHÉES À UNE COURBE ELLIPTIQUE

par Pierrette CASSOU-NOGUÈS

Soit K un corps quadratique imaginaire de nombre de classe 1. Soit E une courbe elliptique, définie sur K , dont l'anneau des endomorphismes est isomorphe à l'anneau des entiers de K , \mathcal{O}_K . Fixons un modèle minimal de Weierstrass pour E

$$(1) \quad y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

où g_2 et g_3 appartiennent à \mathcal{O}_K , et dont le discriminant Δ n'est divisible que par les premiers de K pour lesquels E a mauvaise réduction, et éventuellement les premiers de K au-dessus de 2 et 3. Soit $\wp(z)$ la fonction de Weierstrass attachée à ce modèle, et L le réseau associé. Puisque le nombre de classes de K est 1, il existe $\Omega \in L$, tel que $L = \Omega \mathcal{O}_K$.

On notera ψ le Grössencharacter (au sens de SHIMURA [15]) de E , défini sur K , et \mathfrak{f} son conducteur.

Soit F une extension abélienne finie de K , contenue dans \mathbb{C} de conducteur \mathfrak{h} sur K . Soit \mathfrak{G} le p. p. c. m. de \mathfrak{h} et de \mathfrak{f} . Notons $G(F/K)$ le groupe de Galois de F sur K . Pour tout idéal \mathfrak{C} de K , premier à \mathfrak{h} , $\sigma_{\mathfrak{C}}$ désignera le symbole d'Artin $(\mathfrak{C}, F/K)$.

Pour tout $\sigma \in G(F/K)$, on définit

$$\zeta_F(\sigma, k, s) = \sum_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{G})=1, \sigma_{\mathfrak{a}}=\sigma} \overline{\psi}^k(\mathfrak{a}) N\mathfrak{a}^{-s},$$

où la sommation est prise sur les idéaux \mathfrak{a} entiers de K , premiers à \mathfrak{G} tels que $\sigma_{\mathfrak{a}} = \sigma$. Cette fonction, définie pour $\text{Re}(s) > 3/2$, se prolonge analytiquement à tout le plan complexe. Soit χ un caractère de $G(F/K)$ à valeurs complexes. On définit

$$L(\overline{\psi}^k \overline{\chi}, s) = \sum_{\sigma \in G(F/K)} \overline{\chi}(\sigma) \zeta_F(\sigma, k, s)$$

et

$$\xi(s, \overline{\psi}^k \overline{\chi}) = \Gamma(s + \frac{k}{2}) A^s L(\overline{\psi}^k \overline{\chi}, s + \frac{k}{2}), \quad \text{où } A = \frac{1}{2\pi} |\sqrt{dN\mathfrak{G}}|$$

(d désigne le discriminant du corps K).

HECKE [7](n° 14, § 6) a montré que, si $\overline{\psi}^k \overline{\chi}$ est un Grössencharacter primitif mod \mathfrak{G} , alors

$$\xi(1-s, \overline{\psi}^k \overline{\chi}) = W(\overline{\psi}^k \overline{\chi}) \xi(s, \overline{\psi}^k \overline{\chi}),$$

où $W(\overline{\psi}^k \overline{\chi})$ est un nombre algébrique de module 1. Soit $s = k/2$, alors

$$L(\overline{\psi}^k \overline{\chi}, 1) = \frac{1}{W(\overline{\psi}^k \overline{\chi})} (k-1)! A^{k-1} L(\overline{\psi}^k \overline{\chi}, k).$$

D'autre part, N. ARTHAUD [1] a prouvé que, pour k entier positif, $\zeta(\sigma, k, k) \Omega^{-k}$ appartient à F . Donc si $\overline{\psi}^k \overline{\chi}$ est un Grössencharacter primitif mod \mathfrak{G} ,

$\Omega^{-k} \pi^{k-1} L(\psi^k \chi, 1)$ est un nombre algébrique.

Soit p un premier de \mathbb{Z} , qui se décompose dans K , différent de 2 et 3, et ne divisant pas \mathfrak{O} . Soit \mathbb{Q}_p le corps p -adique élémentaire, \mathbb{Z}_p son anneau de valuation, \mathbb{C}_p le complété d'une clôture algébrique de \mathbb{Q}_p , et \mathfrak{M}_p l'idéal de valuation de \mathbb{C}_p . Fixons τ , un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans \mathbb{C}_p , $\overline{\mathbb{Q}}$ étant la clôture algébrique de \mathbb{Q} , contenue dans \mathbb{C} .

Soit \mathfrak{p} le premier de K , au-dessus de p , tel que $\tau(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{M}_p$. On se propose d'étudier le problème suivant :

Existe-t-il une fonction analytique f , définie sur \mathbb{Z}_p , à valeurs dans \mathbb{C}_p , telle que pour tout entier k d'un ensemble dense dans \mathbb{Z}_p , on ait

$$f(k) = \tau(\Omega^{-k} \pi^{k-1} L(\psi^k \chi, 1)) ?$$

(A partir de maintenant, on écrira a pour $\tau(a)$ si $a \in \overline{\mathbb{Q}}$.)

On montrera l'existence de telles fonctions p -adiques, on étudiera l'analogue de la formule de Leopoldt pour $s = 1$, et on en déduira une formule p -adique des résidus. La méthode utilise la Γ -transformation, déjà employée par IWASAWA [8] et LEOPOLDT [10] pour l'étude des fonctions L des extensions abéliennes de \mathbb{Q} . C'est LICHTENBAUM [11] qui le premier a eu l'idée d'utiliser cette méthode dans le cas elliptique pour interpoler des nombres d'Hurwitz généralisés. Il a, depuis, appliqué sa méthode à un cadre plus large. On peut aussi définir des éléments de Stickelberger, et suivre ce que fait IWASAWA ([8], [2]). Signalons enfin que tout ceci se généralise au cas où le nombre de classes est supérieur à 1 [3].

I. Rappels.

1. La Γ -transformation.

Soit M un sous-corps complet de \mathbb{C}_p , \mathfrak{O}_M son anneau des entiers. On note \mathcal{Q}_M l'ensemble des séries formelles de $M[[x]]$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |n! a_n| = 0 \text{ et } P_M = \mathfrak{O}_M[[x]].$$

Soit \mathcal{C}_M l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{Z}_p à valeurs dans M . \mathcal{Q}_M et \mathcal{C}_M sont des algèbres de Banach, munies respectivement des normes

$$\lim_n |n! a_n| \text{ et } \sup_{x \in \mathbb{Z}_p} |f(x)|.$$

Rappelons que ω est la fonction continue

$$\begin{aligned} \omega : \mathbb{Z}_p &\longrightarrow \mathbb{Z}_p \\ x &\longmapsto \lim_{n \rightarrow \infty} x^{p^n}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\omega^p(x) = x \text{ et } \omega(x) \equiv x \pmod{p\mathbb{Z}_p}.$$

On pose, si $x \notin p\mathbb{Z}_p$, $\langle x \rangle = x/\omega(x)$.

LEMME 1. - Soit α une classe de congruences mod $(p-1)$. Il existe une application linéaire, bornée, unique $\Gamma^\alpha : \mathbb{Q}_M \rightarrow \mathbb{C}_M$, telle que $\forall s \in \mathbb{Z}_p$,

$$\Gamma^\alpha((1+x)^n)(s) = \begin{cases} \omega^\alpha(n) \langle n \rangle^s & \text{si } p \nmid n, \\ 0 & \text{si } p \mid n. \end{cases}$$

LEMME 2. - Soit $A \in \mathbb{Q}_M$ et

$$\tilde{A}(x) = A(x) - \frac{1}{p} \sum_{\zeta} A(\zeta(x+1) - 1),$$

où la sommation est prise sur les racines p -ièmes de 1. Alors, pour tout m entier positif tel que $m \equiv \alpha \pmod{p-1}$,

$$\Gamma^\alpha(A)(m) = \frac{d^m}{dt^m} (\tilde{A}(e^t - 1))_{t=0}.$$

LEMME 3. - Si $A \in \mathbb{P}_M$, $\Gamma^\alpha(A)$ est une fonction d'Iwasawa.

Les preuves de ces lemmes se trouvent dans [8], [10] et [11].

2. Groupes formels.

Soit L un corps quelconque. On appelle groupe formel, défini sur L , tout élément de $L[[X, Y]]$, tel que

- (i) $F(X, 0) = 0$; $F(0, Y) = 0$,
- (ii) $F(X, F(Y, Z)) = F(F(X, Y), Z)$.

Si F et G sont deux groupes formels définis sur L , on appelle homomorphisme de groupes formels, tout élément de $L[[X]]$ tel que

$$f(F(X, Y)) = G(f(X), f(Y)).$$

On note G_a le groupe formel additif $G_a(X, Y) = X + Y$, G_m le groupe formel multiplicatif $G_m(X, Y) = X + Y + XY$.

On utilisera le lemme suivant :

LEMME 4 [6]. - Soit L un corps de caractéristique 0, et F un groupe formel défini sur L . Alors il existe un homomorphisme unique $\mathcal{L}_F : F \rightarrow G_a$, défini sur L , tel que $\mathcal{L}_F^*(0) = 1$. Supposons que S soit un anneau intègre de corps de fraction L , et que F soit défini sur S , alors $\mathcal{L}_F^*(X) \in S[[X]]$.

Si $F = G_m$,

$$\mathcal{L}_{G_m}^*(X) = \log(1+X) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{X^n}{n}; \quad e_{G_m}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n!}.$$

On peut construire un groupe formel \hat{E} , défini sur l'anneau des entiers de K , associé au module de Weierstrass (1) [17].

Posons $t = -2x/y$, $\omega = -1/y$; alors $x = t/2\omega$, $y = -1/\omega$. (1) devient

$$\omega = \frac{1}{2} t^3 - \frac{1}{2} g_2 t \omega^2 - g_3 \omega^3,$$

et on obtient l'expression formelle

$$w = \frac{1}{2} t^3 (1 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots),$$

où les $A_i \in \mathcal{O}_K$. Donc on en déduit

$$x = t^{-2} a(t) \quad \text{et} \quad y = -2t^{-3} b(t),$$

où a et b sont des séries en t à coefficients dans \mathcal{O}_K et premier coefficient 1. Si l'on écrit la loi de groupe de E , $P_3 = P_1 + P_2$, en utilisant ce paramétrage, on obtient $t_3 = \hat{E}(t_1, t_2)$, où \hat{E} est un groupe formel défini sur \mathcal{O}_K .

Puisque $t = -2p(z)/p'(z)$, on peut écrire

$$t = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k, \quad \text{où} \quad \forall k \geq 2, \quad a_k \in K,$$

et ceci est un isomorphisme du groupe G_a dans \hat{E} défini sur K .

D'autre part, soit T le complété de l'extension maximale non ramifiée au-dessus de Kp , et \mathcal{O}_T son anneau des entiers. LUBIN [12] a montré que puisque p se décompose dans K , il existe un isomorphisme g , défini sur \mathcal{O}_T de E dans G_m . On a donc

$$G_a \xrightarrow{r^{-1}} \hat{E} \xrightarrow{g} G_m.$$

Donc il existe $\gamma \in \mathcal{O}_T^*$, unique, tel que

$$u = \exp(\gamma z) - 1 \quad \text{et} \quad t = g(\exp(\gamma z) - 1).$$

3. Théorie du corps de classe.

Soit \mathfrak{A} un idéal entier de K . On dit que $\tau \in E$ est un point de \mathfrak{A} -division sur E si

$$\mathfrak{A} = \{\alpha \in \mathcal{O}_K; \alpha\tau = 0\}.$$

On notera $E_{\mathfrak{A}}$ l'ensemble des points de \mathfrak{A} -division de E , et $K(E_{\mathfrak{A}})$ le corps engendré sur K par les coordonnées des points de \mathfrak{A} -division.

LEMME 5 [5].

(i) Pour tout idéal \mathfrak{f}_1 de K , tel que $\mathfrak{f} | \mathfrak{f}_1$, $K(E_{\mathfrak{f}_1})$ est le corps de classes de rayon \mathfrak{f}_1 ;

(ii) $F(E_p)$ a pour conducteur $3p$; $F(E_p) \cap K(Eg) = F$; le compositum de $F(E_p)$ et $K(Eg)$ est $K(Egp)$.

4. Fonctions elliptiques.

Soit L un réseau quelconque de \mathbb{C} , et soit

$$\sigma(z, L) = z \prod_{\omega \in L, \omega \neq 0} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2\right).$$

Soit

$$\theta(z, L) = \Delta(L) \exp(-6s_2(L) z^2) \sigma(z, L)^{12},$$

où $\Delta(L)$ est le discriminant de L , et

$$s_2(L) = \lim_{s \rightarrow 0, s > 0} \sum_{\omega \in L, \omega \neq 0} \omega^{-2} |\omega|^{-2s}.$$

Rappelons que $L = \Omega^0$. Soit \mathfrak{A} un idéal entier de K . On définit

$$\Theta(z, \mathfrak{A}) = \frac{\theta(z, L)^{N\mathfrak{A}}}{\theta(z, \mathfrak{A}^{-1}L)},$$

où $N\mathfrak{A}$ désigne la norme absolue de \mathfrak{A} et $\mathfrak{A}^{-1}L$ le réseau $\Omega\mathfrak{A}^{-1}$. G. ROBERT [14] a montré que $\Theta(z, \mathfrak{A})$ est une fonction elliptique pour le réseau L , dont l'expression en fonction de $p(z)$ est

$$\Theta(z, \mathfrak{A}) = \frac{\Delta(L)}{\Delta(\mathfrak{A}^{-1}L)} \prod_{\ell} \frac{\Delta(L)}{(p(z) - p(\ell))^6},$$

où le produit à droite est pris sur un ensemble de représentants des classes $\mathfrak{A}^{-1}L$ mod L .

Fixons un ensemble B d'idéaux de K , entiers premiers à \mathfrak{g} , tels que

$$\{(b, K(E\mathfrak{g})/K), b \in B\} = G(K(E\mathfrak{g})/F).$$

Soit $\rho \in \underline{C}$, tel que $(p(\rho), p'(\rho))$ soit un générateur des points de \mathfrak{g} -division de E . Soit \mathfrak{A} un idéal entier de K , premier à $\mathfrak{g}\mathfrak{p}$. Posons

$$\Lambda(z, \rho, \mathfrak{A}) = \prod_{b \in B} \Theta(z + \psi(b)\rho, \mathfrak{A}).$$

LEMME 6. - $\Lambda(z, \rho, \mathfrak{A})$ est une fonction rationnelle de $p(z)$ et $p'(z)$ à coefficients dans F .

Soit $\sigma \in G(F/K)$; on notera $\Lambda_\sigma(z, \rho, \mathfrak{A})$ la fonction rationnelle en $p(z)$ et $p'(z)$, obtenue en faisant agir σ sur les coefficients de $\Lambda(z, \rho, \mathfrak{A})$.

LEMME 7. - $\forall \sigma \in G(F/K)$,

$$z \frac{d}{dz} \log \Lambda_\sigma(z, \rho, \mathfrak{A}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\rho, \mathfrak{A}, \sigma) z^k,$$

où $c_k(\rho, \mathfrak{A}, \sigma) = 12(-1)^{k-1} \rho^{-k} (N\mathfrak{A} \zeta_F(\sigma, k, k) - \psi^k(\mathfrak{A}) \zeta_F(\sigma\sigma_{\mathfrak{A}}, k, k))$ pour $k = 1, 2, \dots$

On trouvera la preuve de ces lemmes dans [1].

COROLLAIRE. - $\forall k \geq 1$, $\forall \sigma \in G(F/K)$,

$$\Omega^{-k} \zeta_F(\sigma, k, k) \in F.$$

II. Fonctions p -adiques

Soit K_p le complété de K en p , et \mathcal{O}_p son anneau d'entiers. Soit $\pi = \psi(p)$.

Notons \mathfrak{P} le premier de F au dessus de p tel que $\tau(\mathfrak{P}) \subset \mathfrak{P}$, $F_{\mathfrak{P}}$ le complété de F en \mathfrak{P} , et $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ son anneau de valuation.

LEMME 8. - Par rapport au paramètre $t = -2 p(z)/p'(z)$ sur \hat{E} , $\Lambda_{\sigma}(z, \rho, \mathfrak{U})$ a un développement

$$\Lambda_{\sigma}(z, \rho, \mathfrak{U}) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(\rho, \mathfrak{U}, \sigma) t^k,$$

où $h_k(\rho, \mathfrak{U}, \sigma)$, $k \geq 0$ appartient à $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, et $h_0(\rho, \mathfrak{U}, \sigma)$ est une unité de $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$.

Preuve. - Voir [1].

On peut maintenant montrer le lemme suivant.

LEMME 9. - Par rapport au paramètre $u = \exp(\gamma z) - 1$ sur G_m , $\frac{d}{dz} \log \Lambda_{\sigma}(z, \rho, \mathfrak{U})$ a un développement

$$\frac{d}{dz} \log \Lambda_{\sigma}(z, \rho, \mathfrak{U}) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\rho, \mathfrak{U}, \sigma) u^k,$$

où $b_k(\rho, \mathfrak{U}, \sigma)$ appartient à $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}}$, $\forall k \geq 0$.

D'après le lemme 8, nous savons que

$$\Lambda_{\sigma}(z, \rho, \mathfrak{U}) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(\rho, \mathfrak{U}, \sigma) t^k,$$

où, pour tout k entier positif ou nul, $h_k(\rho, \mathfrak{U}, \sigma)$ appartient à $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, et $h_0(\rho, \mathfrak{U}, \sigma)$ est une unité de $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$. Alors

$$\frac{d}{dt} \log \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k(\rho, \mathfrak{U}, \sigma)}{h_0(\rho, \mathfrak{U}, \sigma)} t^k \right)$$

est une série en t à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$. De plus, $\frac{dz}{dt}$ est aussi une série en t à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$. En effet, l'application

$$\begin{array}{ccc} \hat{E} & \longrightarrow & G_a \\ t & \longmapsto & z \end{array}$$

est le logarithme. Donc, d'après le lemme 4, $\frac{dz}{dt}$ est une série en t , à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ et premier coefficient 1. Donc :

$$\frac{d}{dz} \log \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k(\rho, \mathfrak{U}, \sigma)}{h_0(\rho, \mathfrak{U}, \sigma)} t^k \right)$$

admet un développement en série par rapport au paramètre t à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$.

Si nous remplaçons t par son développement en série par rapport à u à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}}$, $\frac{d}{dz} \log \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (h_k(\rho, \mathfrak{U}, \sigma)/h_0(\rho, \mathfrak{U}, \sigma)) t^k \right)$ admet alors un développement en séries par rapport à u à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}}$. Notons $C_{(\rho, \mathfrak{U}, \sigma)}(u)$ cet élément de $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}}[[u]]$. Alors, d'après le lemme 3, $\Gamma^{\alpha}(C_{(\rho, \mathfrak{U}, \sigma)})$ est une fonction d'Iwasawa définie sur $\underline{\mathbb{Z}}_p$ à valeurs dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{T}}$. Posons

$$m \in \underline{\mathbb{Z}}, \quad \lambda_m = 12(-1)^m \gamma^{-m}.$$

LEMME 10. - $\forall m \in \underline{\mathbb{N}}^*$, $m \equiv \alpha \pmod{p-1}$,

$$\Gamma^{\alpha}(C_{(\rho, \mathfrak{U}, \sigma)})(m) = \lambda_m \rho^{-(m+1)} m!$$

$$\left[N\mathfrak{U}(\zeta_{\mathbb{F}}(\sigma, m+1) - \frac{\psi^{m+1}(p)}{Np} \zeta_{\mathbb{F}}(\sigma\sigma_p, m+1)) - \psi^{m+1}(\mathfrak{U}) (\zeta_{\mathbb{F}}(\sigma\sigma_{\mathfrak{U}}, m+1) - \frac{\psi^{m+1}(p)}{Np} \zeta_{\mathbb{F}}(\sigma\sigma_{\mathfrak{U}}\sigma_p, m+1)) \right],$$

où $\zeta_{\mathbb{F}}(\sigma, k) = \zeta_{\mathbb{F}}(\sigma, k, k)$.

Preuve. - D'après le lemme 2,

$$\Gamma^{\alpha}(C_{(\rho, \mathfrak{A}, \sigma)})(m) = \frac{d^m}{dz^m} (\tilde{C}_{(\rho, \mathfrak{A}, \sigma)}(e^z - 1))_{z=0},$$

où $\tilde{C}_{(\rho, \mathfrak{A}, \sigma)}(x) = C_{(\rho, \mathfrak{A}, \sigma)}(x) - \frac{1}{p} \sum_{\zeta} C_{(\rho, \mathfrak{A}, \sigma)}(\zeta(u+1) - 1)$,

et la somme est prise sur toutes les racines p -ièmes de 1. Le point $\zeta(u+1) - 1$ de G_m , produit de u par $\zeta - 1$, qui est d'ordre p , correspond sur G_a au point $\gamma^{-1}z + q$, où $u = \exp(\gamma z) - 1$ et q est tel que $(p(q), p'(q))$ est un point de p -division de E . On a défini

$$\Lambda(z, \rho, \mathfrak{A}) = \prod_{b \in B} \Theta(z + \psi(b) \rho, \mathfrak{A})$$

et, si $\sigma \in G(\mathbb{F}/K)$,

$$\Lambda_{\sigma}(z, \rho, \mathfrak{A}) = \prod_{b \in B} \Theta(z + \psi(bc) \rho, \mathfrak{A}),$$

où c est un idéal de K , premier à \mathfrak{g} , tel que $\sigma_c = \sigma$. On a donc égalité des séries formelles

$$C_{(\rho, \mathfrak{A}, \sigma)}(e^z - 1) = \sum_{b \in B} \sum_{\lambda} \frac{p'(\gamma^{-1}z + \psi(bc) \rho)}{p(\gamma^{-1}z + \psi(bc) \rho) - p(\lambda)}$$

et

$$\sum_{\zeta} C_{(\rho, \mathfrak{A}, \sigma)}(\zeta e^z - 1) = \sum_{b \in B} \sum_{\lambda} \sum_q \frac{p'(\gamma^{-1}z + \psi(bc) \rho + q)}{p(\gamma^{-1}z + \psi(bc) \rho + q) - p(\lambda)},$$

la deuxième somme étant prise sur un ensemble de représentants des classes non nulles de $\mathfrak{A}^{-1}L \bmod L$, et la troisième sur tous les points q tels que

$$\{(p(q), p'(q))\} = E_p.$$

On peut alors montrer que

$$\sum_{\zeta} C_{(\rho, \mathfrak{A}, \sigma)}(\zeta e^z - 1) = \pi C_{(\rho, \mathfrak{A}, \sigma \sigma_p)}(e^{\pi z} - 1),$$

d'où l'on déduit aisément le lemme 10.

Soit maintenant χ un caractère de $G(\mathbb{F}/K)$ à valeurs complexes. En remplaçant \mathbb{F} par le corps des invariants du noyau de χ , on peut supposer que le noyau de χ est trivial. On considère

$$L(\overline{\psi^k} \overline{\chi}, s) = \sum_{\sigma \in G(\mathbb{F}/K)} \overline{\chi}(\sigma) \zeta_{\mathbb{F}}(\sigma, k, s).$$

On ne s'intéresse qu'aux valeurs de k , $k \equiv 0 \pmod{p-1}$. Puisque p est décomposé dans K , $p-1 \equiv 0 \pmod{\omega_K}$, où ω_K désigne le nombre de racines de l'unité dans K . Donc ψ^k a pour conducteur 1. Alors $\psi^k \chi$ est un Grössencharactère primitif mod \mathfrak{h} , si χ est un caractère primitif mod \mathfrak{h} . Pour tout $\alpha \in K$, on notera $S(\alpha)$ la trace de α . Soit \mathfrak{b} la différentielle de K . On choisit, une fois pour toutes, δ_0 tel que $\mathfrak{h}^{-1} \mathfrak{b}^{-1} = (\delta_0)$ de telle sorte que $\delta_0 \sqrt{d}$ ait pour dénominateur h_0 , où $(h_0) = \mathfrak{h}$. Soit

$$T(\overline{\chi}) = \sum_{\lambda \bmod \mathfrak{h}} \overline{\chi}(\lambda) \exp(2\pi i S(\lambda \delta_0)),$$

où λ parcourt un système complet de représentants des classes résiduelles mod \mathfrak{p} .
Soit

$$L_1(\psi^k \chi, s) = \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{g}} \left(1 - \frac{\psi^k(\mathfrak{p}) \chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)^{-1}.$$

Alors, d'après HECKE [7] (n° 14, § 6),

$$L_1(\psi^k \chi, 1) = \frac{\delta_0^{-k} (k-1)!}{(2\pi)^{k-1} \sqrt{d} T(\bar{\chi})} L_1(\bar{\psi}^k \bar{\chi}, k).$$

Mais

$$L(\psi^k \chi, 1) = \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{g}} \left(1 - \frac{\psi^k(\mathfrak{p}) \chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)^{-1},$$

donc

$$L(\psi^k \chi, s) = \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} \left(1 - \frac{\psi^k(\mathfrak{p}) \chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right) L_1(\psi^k \chi, s)$$

et

$$L(\psi^k \chi, 1) = \frac{\delta_0^{-k} (k-1)!}{(2\pi)^{k-1} \sqrt{d} T(\bar{\chi})} \times \frac{\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} \left(1 - \frac{\psi^k(\mathfrak{p}) \chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)}{\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} \left(1 - \frac{\bar{\psi}^k(\mathfrak{p}) \bar{\chi}(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^k}\right)} L(\bar{\psi}^k \bar{\chi}, k).$$

Considérons $\tau \circ \chi$, le caractère de $G(F/K)$ à valeurs dans \mathbb{C}_p , associé à τ et à χ , et la fonction

$$L_p(\psi, \chi, \rho, -s) = \frac{1}{\sqrt{d} T(\bar{\chi})} \times \frac{\sum_{\sigma \in G(F/K)} \tau \circ \chi^{-1}(\sigma) \Gamma^{-1}(C(\rho, \mathfrak{A}, \sigma))(s)}{(N\mathfrak{A} - \langle \psi(\mathfrak{A}) \rangle^{s+1} \chi(\mathfrak{A}))}.$$

C'est une fonction d'Iwasawa, définie sur \mathbb{Z}_p , à valeurs dans \mathbb{O}_T , qui ne dépend pas de \mathfrak{A} . On a le résultat suivant.

THÉOREME 1. - Il existe une fonction d'Iwasawa sur \mathbb{Z}_p , telle que, pour tout entier négatif, $n \equiv 1 \pmod{p-1}$,

$$L_p(\psi, \chi, \rho, n)$$

$$= \lambda_n(\rho \Omega^{-1} \delta_0^{-1})^{n-1} \frac{(1 - \frac{\psi^{-n+1}(\mathfrak{p}) \chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}})}{N\mathfrak{p}} \frac{\prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{f}} \left(1 - \frac{\bar{\psi}^{-n+1}(\mathfrak{q}) \bar{\chi}^{-1}(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}^{-n+1}}\right)}{\prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{f}} \left(1 - \frac{\psi^{-n+1}(\mathfrak{q}) \chi(\mathfrak{q})}{N(\mathfrak{q})}\right)} (\Omega^{n-1} (2\pi)^{-n} L(\psi^{-n+1} \chi^{-1})).$$

Nous avons défini des fonctions p -adiques pour un caractère χ , et un premier p qui ne divise pas le conducteur de χ . On s'intéresse maintenant aux caractères du groupe de Galois de $F(Ep)$ sur K . Soit θ le caractère canonique qui donne l'action de $G(F(Ep)/K)$ sur Ep . Le caractère p -adique $\tau \circ \theta$ sera noté θ aussi. Il peut être défini de la façon suivante : si $\sigma \in G(F(Ep)/K)$, soit \mathfrak{A} un idéal de K , premier à \mathfrak{gp} , tel que $\sigma = (\mathfrak{A}, F(Ep)/K)$, alors $\theta(\sigma) = \omega(\psi(\mathfrak{A}))$. Soit θ_0 la restriction de θ à $G(F(Ep)/F)$. D'après la théorie de LUBIN-TATE [13], on sait que $G(K(Ep)/K)$ est isomorphe à $(\mathbb{O}_K/p)^*$. On pose

$$T(\theta_0^\alpha, \zeta) = \sum_{\sigma \in G(F(Ep)/F)} \theta_0^\alpha(\sigma) \zeta^\sigma,$$

où ζ est une racine p -ième de 1. ζ^σ est défini de la manière suivante : $\zeta - 1$ est un point d'ordre p de G_m qui correspond dans G_a à q tel que $(p(q), p'(q))$ soit un point de p -division de E . $\zeta^\sigma - 1$ correspond à $(p(q), p'(q))^\sigma$. Soit M un sous-corps complet de \mathbb{C}_p , et $A \in \mathbb{Q}_M$. On pose

$$A_\alpha(u) = \frac{1}{T(\theta_0^{-\alpha}, \zeta)} \sum_{\sigma \in G(\mathbb{F}(E_p)/\mathbb{F})} \theta_0^{-\alpha(\sigma)} A(\zeta^\sigma(u+1) - 1).$$

LEMME 11. - $\forall s \in \mathbb{Z}_p$, $\Gamma^{\alpha-\beta}(A)(s) = \Gamma^{-\beta}(A_\alpha)(s)$.

Ceci permet d'étudier $\Gamma^{\alpha-1}(C_{(\rho, \mathfrak{A}, \sigma)})(m)$ pour $m \equiv -1 \pmod{p-1}$. Soit

$$L_p(\psi, \chi\theta^\alpha, \rho, -s) = \frac{1}{\sqrt{d} T(\bar{\chi})} \times \frac{\sum_{\sigma \in G(\mathbb{F}/K)} \chi^{-1}(\sigma) \Gamma^{\alpha-1}(C_{(\rho, \mathfrak{A}, \sigma)})(s)}{(N\mathfrak{A} - \langle \psi(\mathfrak{A}) \rangle)^{s+1} \chi\theta^\alpha(\mathfrak{A})}.$$

C'est une fonction d'Iwasawa qui ne dépend pas de \mathfrak{A} . On a le théorème suivant.

THÉORÈME 2. - Il existe une fonction d'Iwasawa sur \mathbb{Z}_p , telle que, pour tout entier négatif, $n \equiv 1 \pmod{p-1}$,

$$L_p(\psi, \chi\theta^\alpha, \rho, n)$$

$$= \lambda_{-n}((p+q)\Omega^{-1}\delta_0^{-1}) \times \frac{\prod_{q|\mathfrak{f}} (1 - \frac{\psi^{-n+1}(q)\chi^{-1}\theta^{-\alpha}(q)}{Nq^{-n+1}})}{\prod_{q|\mathfrak{f}} (1 - \frac{\psi^{-n+1}(q)\chi\theta^\alpha(q)}{Nq})} (\Omega^{n-1} (2\pi)^{-n} L(\psi^{-n+1} \chi\theta^\alpha, 1)).$$

III. Formule de Léopoldt. Fonctions L p-adiques.

On va étudier les fonctions p-adiques que l'on vient de définir pour $s = 1$. Les unités elliptiques de ROBERT [14] jouent ici un rôle important. Considérons une paire (α, π) , où $\alpha = \{\mathfrak{A}_j; j \in J\}$ et $\pi = \{n_j; j \in J\}$; J est un ensemble fini d'indices, quelconque, les \mathfrak{A}_j sont des idéaux entiers, premiers à \mathfrak{g}_q , et les n_j des entiers rationnels satisfaisant $\sum_{j \in J} n_j (N\mathfrak{A}_j - 1) = 0$. Etant donnée (α, π) , on définit

$$\Theta(z, (\alpha, \pi)) = \prod_{j \in J} \Theta(z, \mathfrak{A}_j)^{n_j}.$$

Soit \mathfrak{D} un idéal de K , et $(p(\rho), p'(\rho))$ un point de \mathfrak{D} -division de E , alors G. ROBERT [14] a montré que $\Theta(\rho, (\alpha, \pi))$ est une unité de $K(E_{\mathfrak{D}})$.

1. Formule de Léopoldt.

On peut montrer le résultat suivant.

THÉORÈME 3.

$$L_p(\psi, \chi, \rho, 1) = \frac{\gamma}{\sqrt{d} T(\bar{\chi})} (1 - \frac{\chi(p)}{Np}) \frac{\sum_{\sigma \in G(\mathbb{F}/K)} \chi^{-1}(\sigma) \log_p(\prod_{b \in B} \Theta(\psi(b)\rho, (\alpha, \pi)))^\sigma}{\sum_{j \in J} n_j (N\mathfrak{A}_j - \chi(\mathfrak{A}_j))}.$$

Si α est une classe de congruence non nulle $\pmod{p-1}$,

$$L_p(\psi, \chi \theta^\alpha, \rho, 1) = \frac{\gamma \sum_{\sigma \in G(\mathbb{F}(\mathbb{E}_p)/K)} \chi^{-1} \theta^{-\alpha}(\sigma) \log_p \left(\prod_{b \in \mathcal{B}} \Theta_{(q+\psi(b)\rho, (\alpha, \pi))}^\sigma \right)}{\sqrt{d} T(\bar{\chi}) T(\theta_0^{-\alpha}, \zeta) \sum_{j \in J} n_j (N\mathfrak{A}_j - \chi \theta^\alpha(\mathfrak{A}_j))}.$$

Tout d'abord, (α, π) est choisi de telle sorte que les dénominateurs soient des unités p -adiques. D'autre part, on a

$$\Lambda_\sigma(z, \rho, (\alpha, \pi)) = \prod_{j \in J} \Lambda_\sigma(z, \rho, \mathfrak{A}_j)^{n_j},$$

qui admet le développement en séries

$$\Lambda_\sigma(z, \rho, (\alpha, \pi)) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(\rho, (\alpha, \pi), \sigma) t^k,$$

où les $h_k(\rho, (\alpha, \pi), \sigma)$, $k \geq 0$, appartiennent à $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, et $h_0(\rho, (\alpha, \pi), \sigma)$ est une unité de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$. On considère alors $\log(\frac{1+(h_k(\rho, (\alpha, \pi), \sigma)/h_0(\rho, (\alpha, \pi), \sigma))t^k}{1})$ qui admet un développement en séries dans $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$. En remplaçant t par son développement en u , on obtient une série en u à coefficients dans T , que l'on note $\mathcal{S}(\rho, (\alpha, \pi), \sigma)(u)$. Il est alors facile de voir que

$$L_p(\psi, \chi, \rho, 1-s) = \frac{\gamma}{\sqrt{d} T(\bar{\chi})} \frac{\sum_{\sigma \in G(\mathbb{F}/K)} \chi^{-1}(\sigma) \Gamma^0(\mathcal{S}(\rho, (\alpha, \pi), \chi))(s)}{\sum_{j \in J} n_j (N\mathfrak{A}_j - \langle \psi(\mathfrak{A}_j) \rangle^s \chi(\mathfrak{A}_j))}$$

et

$$L_p(\psi, \chi \theta^\alpha, \rho, 1-s) = \frac{\gamma}{\sqrt{d} T(\bar{\chi})} \frac{\sum_{\sigma \in G(\mathbb{F}/K)} \chi^{-1}(\sigma) \Gamma^\alpha(\mathcal{S}(\rho, (\alpha, \pi), \chi))(s)}{\sum_{j \in J} n_j (N\mathfrak{A}_j - \langle \psi(\mathfrak{A}_j) \rangle^s \chi \theta^\alpha(\mathfrak{A}_j))}.$$

On emploie ensuite la même méthode que pour le lemme 10.

2. L-fonctions.

SIEGEL [16] a montré le lemme suivant.

LEMME 12. - Soit χ un caractère primitif des classes de rayon modulo un idéal entier $\mathfrak{h} \neq 1$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. La fonction $L(s, \chi)$ peut être prolongée analytiquement en une fonction entière de s , et sa valeur pour $s = 1$ est donnée par

$$L(1, \chi) = - \frac{2\pi}{\omega_h \sqrt{d} T(\bar{\chi})} \sum_{c \in \text{cl}(\mathfrak{h})} \bar{\chi}(c) \log |\varphi_{\mathfrak{h}}(c)|^2,$$

où c parcourt les classes de rayon mod \mathfrak{h} , et $\varphi_{\mathfrak{h}}(c)$ désignent certaines unités du corps de classe de rayon \mathfrak{h} .

On en déduit, en utilisant [14], le résultat suivant.

LEMME 13. - Pour tout $\chi \neq 1$ de $\text{cl}(\mathfrak{g})$, notons χ' le caractère primitif associé à χ . Alors

$$L(1, \chi) = - \frac{2\pi}{\omega \sqrt{d} T(\bar{\chi})} \frac{\prod_{p|\mathfrak{g}} (1 - \chi'(p) Np^{-1})}{\prod_{p|\mathfrak{g}} (1 - \bar{\chi}'(p))} \sum_{c \in \text{cl}(\mathfrak{g})} \bar{\chi}(c) \log |\varphi_{\mathfrak{g}}(c)|^2.$$

$L_p(\psi, \chi, \rho, 1)$ est l'analogie p -adique de

$$- 12(1 - \frac{\chi(p)}{Np}) \frac{\prod_{q|f} (1 - \chi^{-1}(q))}{\prod_{q|f} (1 - \chi(q) Nq^{-1})} \frac{L(\psi^0, \chi, 1)}{2\pi}.$$

Mais $L(\psi^0, \chi, 1) = L(1, \tilde{\chi})$, où $\tilde{\chi}$ est défini par

$$\begin{array}{ccc} G(K(Eg)/K) & \longrightarrow & G(F/K) \\ & \searrow \tilde{\chi} & \downarrow \chi \\ & & \underline{\mathbb{C}} \end{array}$$

Donc

$$\begin{aligned} - 12(1 - \frac{\chi(p)}{Np}) \frac{\prod_{q|f} (1 - \chi^{-1}(q))}{\prod_{q|f} (1 - \chi(q) N(q)^{-1})} L(\psi^0, \chi, 1) \\ = \frac{12(1 - \frac{\chi(p)}{Np})}{\sqrt{d} T(\tilde{\chi})} \sum_{\sigma \in G(K(Eg)/K)} \tilde{\chi}^{-1}(\sigma) \log |\varphi_g(\sigma)|^2. \end{aligned}$$

D'autre part

$$L_p(\psi, \chi, \rho, 1) = \frac{\gamma(1 - \frac{\chi(p)}{Np})}{\sqrt{d} T(\tilde{\chi})} \times \frac{\sum_{\sigma \in G(K(Eg)/K)} \tilde{\chi}^{-1}(\sigma) \log_p \Theta(\rho, (\alpha, \pi))^\sigma}{\sum_{j \in J} n_j (N\mathfrak{M}_j - \chi(\mathfrak{M}_j))}.$$

On peut choisir ρ_0 tel que

$$\Theta(\rho_0, \mathfrak{M})^\sigma = \left(\frac{\varphi_g(\sigma \sigma_{\mathfrak{M}})}{\varphi_g(\sigma)^{N\mathfrak{M}}} \right)^{24}.$$

Alors on définit

$$L_p(\psi, \chi, \rho_0, s) = L_p(\psi, \chi, s).$$

IV. Formule p-adique des résidus.

Soient $\Delta, R, \omega_{F(Ep)}, h, g$, respectivement, le discriminant de $F(Ep)$ sur $\underline{\mathbb{Q}}$, le régulateur, le nombre de racines de l'unité, le nombre de classes de $F(Ep)$ et le degré de $F(Ep)$ sur K . On a

$$\frac{(2\pi)^g hR}{\omega_{F(Ep)} \sqrt{\Delta}} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{d}} \prod_{\chi' \neq 1} L(1, \chi'),$$

où χ parcourt l'ensemble des caractères de $G(F(Ep)/K)$, et χ' est le caractère primitif associé à χ . Nous allons donner un analogue p-adique à cette formule. Tout d'abord nous allons définir la quantité $R_p d^{\frac{1}{2}}/\Delta^{\frac{1}{2}}$ qui interviendra dans notre formule. Soit A_K et $A_{F(Ep)}$ la clôture intégrale de $\underline{\mathbb{Z}}$ dans K et $F(Ep)$; ω_1, ω_2 une base du $\underline{\mathbb{Z}}$ -module A_K ; $\omega'_1, \dots, \omega'_{2g}$ une base du $\underline{\mathbb{Z}}$ -module $A_{F(Ep)}$. Soient $\sigma_0, \dots, \sigma_{g-1}$ les éléments de $G(F(Ep)/K)$; $\sigma_0, \dots, \sigma_{g-1}, \sigma_g, \dots, \sigma_{2g-1}$ les éléments de $G(F(Ep)/\underline{\mathbb{Q}})$; $\bar{\sigma}_0$ et $\bar{\sigma}_g$ désigneront les éléments de $G(K/\underline{\mathbb{Q}})$. Soit \mathcal{E} le groupe des unités globales dans $F(Ep)$. Puisque $F(Ep)$ est totalement imaginaire, le $\underline{\mathbb{Z}}$ -rang de \mathcal{E} modulo la torsion est égal à $g-1$. Soit e_1, \dots, e_{g-1} un ensemble d'unités fondamentales dans \mathcal{E} .

On sait que

$$R_\infty = |\det(\log|\sigma_j(e_k)|)|, \quad 0 \leq j \leq g-1; \quad 1 \leq k \leq g$$

et

$$d = \det^2(\bar{\sigma}_\ell(\omega_i)), \quad \ell = 0, g; \quad i = 1, 2,$$

$$\Delta = \det^2(\sigma_{j'}(\omega'_m)), \quad 0 \leq j' \leq 2g-1; \quad 1 \leq m \leq 2g,$$

ne dépendent pas du choix de (ω_i) , (ω'_m) , (σ_j) , (e_k) .

Mais

$$A_\infty((\omega_i), (\omega'_m), (\sigma_j), (e_k)) = \frac{\det(\log|\sigma_j(e_k)|) \det(\bar{\sigma}_j(\omega_i))}{\det(\sigma_{j'}(\omega'_m))},$$

dépend du choix de

$$(\omega_i), (\omega'_m), (\sigma_j), (e_k),$$

$$|A_\infty((\omega_i), (\omega'_m), (\sigma_j), (e_k))| = \frac{R d^{\frac{1}{2}}}{\Delta^{\frac{1}{2}}},$$

est un invariant de $F(E_p)$ qui apparaît dans la formule complexe des résidus.

Etant donnés (ω_i) , (ω'_m) , (σ_j) , (e_k) , on considère le nombre p -adique

$$A_p((\omega_i), (\omega'_m), (\sigma_j), (e_k)) = \frac{\det(\log_p \sigma_j(e_k)) \det(\bar{\sigma}_j(\omega_i))}{\det(\sigma_{j'}(\omega'_m))}.$$

Parmi les bases (ω_i) , (ω'_m) , (e_k) et les permutations des groupes de Galois, on choisit ceux tels que

$$A_\infty((\omega_i), (\omega'_m), (\sigma_j), (e_k)) > 0.$$

Pour un tel choix, $A_p((\omega_i), (\omega'_m), (\sigma_j), (e_k))$ ne dépend que de $F(E_p)$: on le note $R_p d^{\frac{1}{2}}/\Delta^{\frac{1}{2}}$.

La formule p -adique des résidus s'écrit sous la forme suivante.

THÉORÈME 4. - $\prod_{\chi \neq 1} L_p(\psi, \chi, 1) = \gamma^{g-1} h \frac{\omega}{w_{F(E_p)}} \cdot R_p d^{\frac{1}{2}}/\Delta^{\frac{1}{2}} \prod_{q \in S} (1 - Nq^{-1})$, où S désigne l'ensemble des premiers de $F(E_p)$ au-dessus de p .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARTHAUD (N.). - On Birch and Swinnerton-Dyer conjecture for elliptic curve with complex multiplication, I (à paraître).
- [2] CASSOU-NOGUÈS (P.). - On p -adic L-functions for elliptic curves, I (à paraître).
- [3] CASSOU-NOGUÈS (P.). - On p -adic L-functions for elliptic curves, II (à paraître).
- [4] COATES (J.). - p -adic L-functions and Iwasawa's theory, "Algebraic number fields", p. 269-353. - London, Academic Press, 1977.
- [5] COATES (J.) and WILES (A.). - On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer, Invent. Math., t. 39, 1977, p. 223-251.
- [6] FRÖHLICH (A.). - Formal groups. - Berlin, Springer-Verlag, 1968 (Lecture Notes in Mathematics, 74).

- [7] HECKE (E.). - Mathematische Werke. - Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1959.
- [8] IWASAWA (K.). - Lectures on p -adic L-functions. - Princeton, Princeton University Press, 1972 (Annals of Mathematics Studies, 74).
- [9] IWASAWA (K.). - On p -adic L-functions, Annals of Math., t. 89, 1969, p. 198-205.
- [10] LEOPOLDT (H. W.). - Eine p -adische Theorie der Zetawerte, II., J. reine und angew. Math., t. 274-275, 1975, p. 224-239.
- [11] LICHTENBAUM (S.). - On p -adic L-functions associated to elliptic curves (à paraître).
- [12] LUBIN (J.). - One parameter formal Lie groups over p -adic integer rings, Annals of Math., t. 80, 1964, p. 464-484.
- [13] LUBIN (J.) and TATE (J.). - Formal complex multiplication in local fields, Annals of Math., t. 81, 1965, p. 380-387.
- [14] ROBERT (G.). - Unités elliptiques, Bull. Soc. math. France, Mémoire 36, 1973, 77 p.
- [15] SHIMURA (G.). - Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. - Princeton, Princeton University Press, 1971 (Publications of the mathematical Society of Japan, 11).
- [16] SIEGEL (C. L.). - Lectures on advanced analytic number theory. - Bombay, Tata Institute, 1961 (Tata Institute of fundamental Research, Lectures on Mathematics, 23).
- [17] TATE (J.). - Arithmetic of elliptic curves, Invent. Math., t. 23, 1974, p. 179-206.

(Texte reçu le 29 juillet 1977)

Pierrette CASSOU-NOGUÈS
 9 rue Ségalier
 33000 BORDEAUX
