

# GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

ALAIN ESCASSUT

## **Sur la semi-norme spectrale supérieure en algèbre de Banach ultramétrique**

*Groupe de travail d'analyse ultramétrique*, tome 4 (1976-1977), exp. n° 13, p. 1-5

[http://www.numdam.org/item?id=GAU\\_1976-1977\\_\\_4\\_\\_A12\\_0](http://www.numdam.org/item?id=GAU_1976-1977__4__A12_0)

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LA SEMI-NORME SPECTRALE SUPÉRIEURE  
EN ALGÈBRE DE BANACH ULTRAMÉTRIQUE

par Alain ESCASSUT

1. Rappels et définitions.

On désignera par  $K$  un corps ultramétrique complet algébriquement clos.

Soit  $(A, \|\cdot\|)$  une  $K$ -algèbre de Banach ultramétrique, commutative, unitaire, et soit  $x \in A$ ; on notera  $s(x)$  l'ensemble des  $\lambda \in K$  tels que  $x - \lambda$  ne soit pas inversible, et

$$\|x\|_{si} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

D'autre part, on notera  $\max(A)$  l'ensemble des idéaux maximaux de  $A$ , et  $\mathfrak{X}(A)$  l'ensemble des homomorphismes de  $K$ -algèbre surjectifs de  $A$  sur des extensions de  $K$ . Enfin, on notera  $\text{Mult}(A, \|\cdot\|)$  l'ensemble des semi-normes multiplicatives continues de  $A$ , et  $\text{Mult}_m(A, \|\cdot\|)$  l'ensemble des  $\varphi \in \text{Mult}(A, \|\cdot\|)$ , dont le noyau (c'est-à-dire l'idéal premier fermé  $\text{Ker } \varphi$  des  $u \in A$  tels que  $\varphi(u) = 0$ ) est un idéal maximal de  $A$ .

Pour tout  $x$  fixé dans  $A$ , on peut définir un procédé de calcul fonctionnel holomorphe de la façon suivante [3].

Soit  $R(s(x))$  l'algèbre des fractions rationnelles sans pôle dans  $s(x)$ , et soit  $\mathfrak{F}$  l'homomorphisme canonique de  $R(s(x))$  dans  $A$ , défini par

$$\mathfrak{F}\left(\frac{P}{Q}\right) = P(x) (Q(x))^{-1}$$

( $Q(x)$  étant nécessairement inversible dans  $A$  du fait que  $P/Q \in R(s(x))$ ).

On démontre que  $\|(x - a)^{-1}\| = \|(x - b)^{-1}\|$  si  $|a - b| < 1/\|(x - a)^{-1}\|$ , et on en déduit l'existence d'une norme  $\|\cdot\|_\rho$  sur  $R(s(x))$ , telle que  $\mathfrak{F}$  soit continue pour les normes  $\|\cdot\|_\rho$  (de  $R(s(x))$ ) et  $\|\cdot\|$  (de  $A$ ). En particulier, si  $D$  est un infraconnexe de diamètre  $\|x\|$ , dont tous les trous sont de la forme  $d^-(a, 1/\|(x - a)^{-1}\|)$ , alors l'homomorphisme naturel  $\Lambda_0$  de  $R(D)$  dans  $A$ , tel que  $\Lambda_0(X) = x$ , est continu quand on munit  $R(D)$  de la norme  $\|\cdot\|_D$  de la convergence uniforme, et il se prolonge donc en un homomorphisme  $\Lambda$  de l'algèbre  $H(D)$  des éléments analytiques au sens de Krasner sur  $D$ , tel que  $\Lambda(X) = x$ .

2. Problème de la multibjectivité.

Rappelons que tout idéal maximal d'une  $K$ -algèbre de Banach  $A$  est le noyau d'au moins une semi-norme multiplicative continue de  $A$  [5]. On dit que  $A$  est multibjective si la surjection  $\varphi \longrightarrow \text{Ker } \varphi$  de  $\text{Mult}_m(A, \|\cdot\|)$  sur  $\max(A)$  est une bijection.

Rappelons que le corps  $K$  est dit fortement valué si l'un au moins des deux ensembles  $|K|$  et  $k$  n'est pas dénombrable, où  $|K| = \{|\lambda| ; \lambda \in K\}$ , et où  $k$  désigne le corps résiduel de  $K$ .

THÉORÈME 1. - Si  $K$  est fortement valué, toute extension de  $K$ , possédant une structure de  $K$ -algèbre de Banach ultramétrique, admet une seule valeur absolue continue pour sa norme. Si  $K$  n'est pas fortement valué, il existe des extensions de  $K$  possédant une structure de  $K$ -algèbre de Banach qui admettent une infinité de valeurs absolues continues pour leur norme.

COROLLAIRE. - Si  $K$  est fortement valué, toute  $K$ -algèbre de Banach ultramétrique, commutative, unitaire, est multibijective. Si  $K$  n'est pas fortement valué, il existe des  $K$ -algèbres de Banach ultramétriques commutatives, unitaires non multibjectives.

Preuve du corollaire. - Si  $K$  n'est pas fortement valué, l'assertion du corollaire est évidente d'après le théorème 1.

Supposons donc  $K$  fortement valué, et supposons que  $A$  soit une  $K$ -algèbre de Banach ultramétrique, non multibijective. Il existe donc un idéal maximal  $\mathfrak{M}$  et deux semi-normes multiplicatives continues  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , telles que  $\text{Ker}\varphi_1 = \text{Ker}\varphi_2 = \mathfrak{M}$ , et  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ , c'est-à-dire qu'il existe  $x \in A$  tel que  $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$ .

Soit  $\Gamma = A/\mathfrak{M}$ ; alors  $\Gamma$  est une extension de  $K$ , et possède une structure d'algèbre de Banach, quotient de celle de  $A$ . On notera  $\theta$  la surjection canonique de  $A$  sur  $\Gamma$ .

Alors il est clair que  $\varphi_i$  se factorise sous la forme  $v_i \circ \theta$  ( $i = 1, 2$ ), où  $v_i$  est une valeur absolue de  $\Gamma$ , continue pour la norme de  $\Gamma$ . Alors, par hypothèse,

$$v_1(\theta(x)) \neq v_2(\theta(x)),$$

donc  $v_1 \neq v_2$ , ce qui est absurde d'après le théorème 1, et par suite le corollaire est établi.

Preuve du théorème 1. - Si  $K$  n'est pas fortement valué, on sait [2] qu'il existe des extensions  $\Gamma$  admettant une infinité de valeurs absolues continues pour une même norme d'algèbre de Banach ultramétrique.

Supposons donc  $K$  fortement valué et supposons que  $\Gamma$  soit une extension de  $K$  et une  $K$ -algèbre de Banach ultramétrique pour une norme  $\|\cdot\|$ , et que  $\Gamma$  possède deux valeurs absolues distinctes  $v_1$  et  $v_2$  continues pour cette norme. Soit  $x \in \Gamma$  tel que  $v_1(x) \neq v_2(x)$ . On notera  $r_1 = v_1(x)$  et  $r_2 = v_2(x)$  en supposant  $r_1 < r_2$ .

Comme  $K$  est fortement valué, il est immédiat d'exhiber une famille de disques non circonferenciés

$$T_n = d^-(a_n, \frac{1}{\|(x - a_n)^{-1}\|})$$

de diamètre  $\geq \delta > 0$ ,  $\forall n$ , tels que

$$r < |a_n| \leq |a_{n+1}| < R \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = R \in ]r_1, r_2[ ,$$

et tels que l'infraconnexe  $D$  de diamètre  $R$ , qui admet pour seuls trous les éléments de la suite  $T_n$ , admette un  $T$ -filtre croissant  $\mathfrak{F}$  de centre  $0$ , de diamètre  $\|x\|_{\text{si}}$ . Alors il existe, d'après ce qui précède, un homomorphisme continu  $\Lambda$  de  $H(D)$  dans  $\Gamma$  tel que  $\Lambda(X) = x$ .

On voit que  $\psi_1 = v_1 \circ \Lambda$  et  $\psi_2 = v_2 \circ \Lambda$  sont deux semi-normes multiplicatives continues de  $H(D)$  telles que

$$\psi_1(X) = v_1(x) \text{ et } \psi_2(X) = v_2(x) .$$

Or, puisque  $D$  admet le  $T$ -filtre  $\mathfrak{F}$ ,  $H(D)$  contient un élément  $f$  tel que  $|f(\alpha)| = 1$  quand  $|\alpha| \leq r_1$ , et  $f(\alpha) = 0$  quand  $|\alpha| \geq R$ . Par suite,  $\psi_1(f) = 1$  et  $\psi_2(f) = 0$ . Soit  $y = \Lambda(f)$ ; on a donc  $v_1(y) = 1$  et  $v_2(y) = 0$ , ce qui est absurde.

### 3. La semi-norme $\|\cdot\|_{\text{si}}$ .

On sait que  $\|x\|_{\text{si}} = \sup_{\varphi \in \text{Mult}(A, \|\cdot\|)} \varphi(x)$  [s]. On obtient maintenant l'amélioration suivante.

THÉORÈME 2. - Si  $K$  est fortement valué, pour toute  $K$ -algèbre de Banach ultramétrique, commutative, unitaire, on a

$$\|x\|_{\text{si}} = \sup_{\varphi \in \text{Mult}_{\mathfrak{m}}(A, \|\cdot\|)} \varphi(x) .$$

Si  $K$  n'est pas fortement valué, il existe des  $K$ -algèbres de Banach ultramétriques, commutatives, unitaires  $A$  telles que, pour certains  $x \in A$ , on ait

$$\|x\|_{\text{si}} > \sup_{\varphi \in \text{Mult}_{\mathfrak{m}}(A, \|\cdot\|)} \varphi(x) = 0 .$$

Remarque. - Supposons  $K$  fortement valué; alors, pour tout idéal maximal  $\mathfrak{M}$  de  $A$ , l'extension  $A/\mathfrak{M}$  de  $K$  admet une seule valeur absolue  $|\cdot|$  continue pour sa norme de  $K$ -algèbre de Banach, et si l'on note  $\chi$  l'homomorphisme canonique de  $A$  sur  $A/\mathfrak{M}$ , on voit que l'unique semi-norme multiplicative continue  $\varphi$ , telle que  $\text{Ker } \varphi = \mathfrak{M}$ , est l'application  $x \rightarrow |\chi(x)|$ . Par suite, le théorème 2 permet de retrouver une relation célèbre en analyse complexe :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{1/n} = \sup_{\chi \in \text{max}(A)} |\chi(x)| .$$

Toutefois, ici, les homomorphismes  $\chi$  ne vérifient pas forcément  $\chi(A) = K$ .

Preuve du théorème 2. - Supposons d'abord que  $K$  est fortement valué, et montrons l'égalité

$$\sup_{\varphi \in \text{Mult}(A, \|\cdot\|)} \varphi(x) = \sup_{\varphi \in \text{Mult}_{\mathfrak{m}}(A, \|\cdot\|)} \varphi(x) .$$

Pour cela, supposons le résultat faux, c'est-à-dire qu'il existe  $x \in A$  et  $\varphi_0 \in \text{Mult}(A, \|\cdot\|)$  tel que

$$\varphi_0(x) > \sup_{\varphi \in \text{Mult}_{\mathfrak{m}}(A, \|\cdot\|)} \varphi(x) .$$

Soit  $R = \varphi_0(x)$ , et soit  $r = \sup_{\varphi \in \text{Mult}_{\mathfrak{m}}(A, \|\cdot\|)} \varphi(x)$ . Comme  $K$  est fortement valué, il existe trivialement un fermé borné  $D$  admettant un  $T$ -filtre croissant de centre  $0$ , de diamètre  $R' \in ]r, R[$  tel que, pour tout trou  $T$  de  $D$ , on ait

$$\text{diam } T = \frac{1}{\|(x - a)^{-1}\|} \text{ pour } a \in T .$$

Alors comme précédemment, il existe  $f \in H(D)$  tel que  $|f(\alpha)| = 1$  si  $|\alpha| \leq r$ , et  $f(\alpha) = 0$  si  $|\alpha| \geq R$ , d'où  $\psi(f) = 1$  quel que soit  $\psi \in \text{Mult}(H(D), \|\cdot\|_D)$  tel que  $\psi(X) \leq r$ , et  $\psi(f) = 0$  quel que soit  $\psi \in \text{Mult}(H(D), \|\cdot\|_D)$  tel que  $\psi(X) \geq R$ .

En particulier, si  $\varphi'_0 = \varphi_0 \circ \Lambda$ , on a  $\varphi'_0(f) = 0$ , c'est-à-dire qu'en notant  $y = \Lambda(f)$ , on a  $\varphi_0(y) = 0$ . Maintenant, soit  $\mathfrak{p} = \text{Ker } \varphi_0$ , soit  $\mathfrak{M}$  un idéal maximal de  $A$  qui contient  $\mathfrak{p}$  et soit  $\varphi \in \text{Mult}_{\mathfrak{m}}(A, \|\cdot\|)$  tel que  $\text{Ker } \varphi = \mathfrak{M}$ . Enfin soit  $\varphi' = \varphi \circ A$ . Alors, dans  $H(D)$ , on a  $\text{Ker } \varphi'_0 \subset \text{Ker } \varphi'$ ; mais, par hypothèse,  $\varphi(x) \leq r$ , ce qui est absurde puisque  $\varphi'_0(f) = 0$ . Ainsi l'égalité

$$\|x\|_{\text{si}} = \sup_{\varphi \in \text{Mult}_{\mathfrak{m}}(A, \|\cdot\|)} \varphi(x)$$

est établie.

Montrons maintenant la dernière affirmation en supposant  $K$  non fortement valué. Rappelons que, dans la preuve du théorème II. 2 de [3], on a construit un infraconnexe fermé borné  $D$  de diamètre  $R$  contenant  $0$  tel que, pour tout  $r \in |K|$ , chaque classe  $d^-(a, r)$  du cercle  $C(0, r)$  admet un  $T$ -filtre croissant de diamètre  $r$ , et tel que  $D$  n'admette aucun autre  $T$ -filtre que ceux-ci, dont on notera la famille  $\mathfrak{F}$ . Il est immédiat d'en déduire la construction d'un infraconnexe fermé borné  $\Delta$  de diamètre  $R$ , inclus dans  $d^-(0, R)$ , admettant pour seuls  $T$ -filtres ceux induits par ceux de la famille  $\mathfrak{F}$  ainsi qu'un  $T$ -filtre croissant  $\mathcal{U}$  de diamètre  $R$ . On voit donc que le seul idéal maximal de codimension infinie de  $H(\Delta)$  est l'ensemble  $\mathfrak{m}$  des  $f \in H(\Delta)$  tels que  $\lim_{\mathcal{U}} f(x) = 0$ . D'autre part, on note  $\mathfrak{p}$  l'idéal premier fermé des  $f \in H(\Delta)$  tel que  $\lim_{\mathcal{C}} f(x) = 0$ ,  $\forall \mathcal{C} \in \mathfrak{F}$ . Soit  $A = H(\Delta)/\mathfrak{p}$ , et soit  $\Phi$  la surjection canonique de  $H(\Delta)$  sur  $A$ . Alors  $A$  admet un seul idéal maximal de codimension infinie qui est  $\hat{\mathfrak{m}} = \Phi(\mathfrak{m})$ , et  $A$  n'admet aucun idéal maximal de codimension 1 car, pour tout  $a \in \Delta$ , il existe un  $T$ -filtre  $\mathcal{C}_a \in \mathfrak{F}$  de centre  $a$ , et il existe  $f_a \in H(\Delta)$  strictement annulé par  $\mathcal{C}_a$  tel que  $f_a \in \mathfrak{p}$  et  $f_a(a) \neq 0$ . Considérons maintenant un élément  $g \in H(\Delta)$  strictement annulé par  $\mathcal{U}$ . Alors on a  $\lim_{\mathcal{C}} |g(\lambda)| \neq 0$ ,  $\forall \mathcal{C} \in \mathfrak{F}$ . Chaque  $T$ -filtre  $\mathcal{C} \in \mathfrak{F}$  définit une semi-norme  $\varphi_{\mathcal{C}} \in \text{Mult}(H(\Delta), \|\cdot\|)$  telle que  $\text{Ker } \varphi_{\mathcal{C}} = \mathfrak{p}$  et telle que  $\lim_{\mathcal{C}} |g(x)| = \varphi_{\mathcal{C}}(g)$ . Alors comme  $\varphi_{\mathcal{C}}(f) \leq \|f\|_{\Delta}$ ,  $\forall f \in H(\Delta)$ , il est clair que  $\varphi_{\mathcal{C}}$  se factorise sous la forme  $\varphi_{\mathcal{C}} \circ \Phi$ , où  $\varphi_{\mathcal{C}} \in \text{Mult}(A, \|\cdot\|)$  de sorte que, dans  $A$ , on a  $\varphi_{\mathcal{C}}(\Phi(g)) \neq 0$ , et par suite,  $\|\Phi(g)\|_{\text{si}} \neq 0$ . Or  $g \in \mathfrak{m}$ , donc  $\Phi(g) \in \hat{\mathfrak{m}}$ , ce qui prouve trivialement que

$$\sup_{\psi \in \text{Mult}_m(A, \|\cdot\|)} \psi(\phi(g)) = 0 .$$

COROLLAIRE du théorème 2. - Si K est fortement valué, dans toute K-algèbre de Banach ultramétrique, commutative, unitaire, l'idéal I des x tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} = 0$$

est égal au radical de Jacobson ; si K n'est pas fortement valué, il existe des K-algèbres de Banach ultramétriques, commutatives, unitaires, dont l'idéal I est strictement inclus dans le radical de Jacobson.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ESCASSUT (Alain). - T-filtres, ensembles analytiques et transformation de Fourier p-adique, Annales Institut Fourier, Grenoble, t. 25, 1975, fasc. 2, p. 45-80.
- [2] ESCASSUT (Alain). - Spectre maximal d'une algèbre de Krasner, Groupe de Travail d'Analyse ultramétrique, 1re année, 1973/74, n° 12, 14 p., et Colloquium Mathematicum, t. 37, 1977, fasc. 2.
- [3] ESCASSUT (Alain). - Calcul fonctionnel holomorphe dans les algèbres de Banach ultramétriques, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 2e année, 1974/75, n° 17, 7 p.
- [4] GARANDEL (Gérard). - Les semi-normes multiplicatives sur les algèbres d'éléments analytiques au sens de Krasner, Proc. konkl. Nederl. Akad. Wet., Séries A, t. 78, 1975, p. 327-341.
- [5] GUENNEBAUD (Bernard). - Algèbres localement connexes sur les corps valués, Bull. Sc. math., 2e série, t. 91, 1967, p. 75-96.

(Texte reçu le 24 février 1977)

Alain ESCASSUT  
 Mathématiques  
 Université de Bordeaux-I  
 351 cours de la Libération  
 33405 TALENCE