DANIEL BARSKY

Différentielles et congruences

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 4 (1976-1977), exp. n° 12, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1976-1977__4__A11_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, D. BARSKY, P. ROBBA)
4e année, 1976/77, n° 12, 10 p.
7 février 1977

DIFFÉRENTIELLES ET CONGRUENCES

par Daniel BARSKY

RÉSUMÉ. - On montre que les coefficients d'une série de Taylor satisfont des congruences si l'on connaît des propriétés de la série réciproque.

Soit p un nombre premier, $\underset{\sim}{N}$, $\underset{\sim}{Z}$, $\underset{\sim}{Z}_p$, $\underset{\sim}{Q}_p$, $\underset{\sim}{C}_p$ ont leur signification habituelle [1].

La valeur absolue $|\ |$ sur $\underset{\sim}{C}_p$ est normalisée par $|p| = p^{-1}$. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\underset{\sim}{C}_p$. Supposons que la série génératrice de Hurwitz

$$Y = \sum_{n\geq 1} a_n \frac{X^n}{n!}$$

de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ satisfasse la propriété suivante

$$\frac{dY}{dX} = \sum_{n\geq 1} d_n\, Y^{n-1} \quad \text{avec} \quad d_1 = 1 \quad \text{et} \quad |d_n| \leqslant 1 \ ,$$

alors on peut montrer que les a_n ont des propriétés p-adiques remarquables, ou bien il existe $c \in \underset{\sim}{C}_p$ avec $|c| = 1$ tel que

$$\left| \frac{a_n}{c^n} - \frac{a_{n+(p-1)p^{h-1}}}{c^{n+(p-1)p^{h-1}}} \right| \leqslant p^{-h/2} \quad \text{pour} \quad n \geqslant h \ ,$$

ou bien a_n est divisible par $p^{n\alpha}$ ou, autrement dit, $|a_n| \leqslant p^{-n\alpha}$ avec $\alpha > 0$.

En fait, on montrera essentiellement que $Z(X) = \sum_{n\geq 1} a_n X^n$ est un élément analytique sur des quasi-connexes de $\underset{\sim}{C}_p$ contenant strictement $B(0\ ,\ 1^-)$ [1] ; le théorème de Mittag-Leffler p-adique donnera alors le résultat [1].

Rappelons que l'on note, si ρ est un nombre réel positif, et a un élément de $\underset{\sim}{C}_p$,

$$B(a\ ,\ \rho^-) = \{X \in \underset{\sim}{C}_p\ ;\ \ |X - a| < \rho\}$$

et

$$B(a\ ,\ \rho^+) = \{X \in \underset{\sim}{C}_p\ ;\ \ |X - a| \leqslant \rho\} \ .$$

Ce genre de situation se rencontre pour les fonctions L p-adiques. Par exemple, si B_n est le n-ième nombre de Bernoulli, on a

$$\frac{1}{X} + \sum_{n\geq 1} \frac{B_n}{n} \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{e^X}{e^X - 1} = V(X) \ ,$$

alors

$$\frac{d(1/V)}{dX} = 1 - (\frac{1}{V}) \ .$$

De même si $p(z)$ est la solution de l'équation différentielle $(p')^2 = p^3 - ap - b$ ayant un pôle double à l'origine, alors $t(z) = 1/\sqrt{p(z)}$ vérifie

$$dt/dz = \sqrt{1 - at^4 - bt^6} \ .$$

Il est facile alors de remonter des propriétés de $1/V$ et de $1/\sqrt{\wp}$ à celle de V et de $\wp$ pour obtenir des congruences entre les B_n/n et entre les h_n où l'on a posé

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n\geq 0} \frac{h_{n+2}}{n+2} \frac{z^n}{n!} .$$

Le principe de la démonstration est d'écrire formellement

$$Y(X) = \sum_{n\geq 1} b_n (e^{cX} - 1)^n$$

et de choisir $c \in \underset{\sim}{C}_p$ de telle sorte que la croissance des $|b_n|$ soit aussi lente que possible.

On utilise alors la transformation de Laplace formelle [2], et on montre que

$$Z(X) = \sum_{n\geq 1} a_n X^n = \sum_{n\geq 1} b_n \frac{n!\, c^n X^n}{(1-cX)\ldots(1-ncX)} ,$$

expression sur laquelle il est facile de voir si $Z(X)$ est un élément analytique p-adique. Ce genre de situation s'applique par exemple aux fonctions hyperelliptiques ou plus généralement si l'on a

$$(Y')^k = 1 + YP(Y)$$

où $P(Y)$ est un polynôme à coefficient dans $\underset{\sim}{Z}$ (on doit alors supposer que p ne divise pas k).

Ces résultats étaient connus de CARLITZ par une méthode différente ([3], [4] et [5]). Soit

$$Y = \sum_{n\geq 1} a_n \frac{X^n}{n!} \in \underset{\sim}{C}_p[[X]]$$

vérifiant les hypothèses suivantes :

(H_0) $\qquad \frac{dY}{dX} = \sum_{n\geq 1} d_n Y^{n-1}$ avec $d_1 = 1$ et $|d_n| \leq 1 \qquad (d_n \in \underset{\sim}{C}_p)$.

Les hypothèses (H_0) sont équivalentes aux hypothèses (H_1) :

(H_1) $\qquad Y = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n!} X^n \in \underset{\sim}{C}_p[[X]]$; $\frac{dX}{dY} = \sum_{n\geq 1} e_n Y^{n-1} \in \underset{\sim}{C}_p[[X]]$

avec $e_1 = 1$ et $|e_n| \leq 1$.

Les hypothèses (H_1) sont elles-mêmes équivalentes aux hypothèses (H) :

(H) $\qquad Y = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n!} X^n \in \underset{\sim}{C}_p[[X]]$; $X = \sum_{n\geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n \in \underset{\sim}{C}_p[[X]]$

avec $e_1 = 1$ et $|e_n| \leq 1$.

Le problème que nous nous posons est le suivant : Sous les hypothèses (H) que peut-on dire sur la fonction

$$Z(X) = \sum_{n\geq 1} a_n X^n ,$$

du point de vue de l'analyticité au sens de Krasner ?

Nous allons écrire

$$Y = \sum_{n\geq 1} b_n (e^{cX} - 1)^n ,$$

ce qui est toujours possible formellement, car $(e^{cX} - 1)^n = X^n$ + termes de degré plus élevé, et nous allons montrer que l'hypothèse (H) permet de choisir $c \in \underset{\sim}{C}_p$, c dépendant de e_p, de telle sorte que la croissance de b_n soit assez lente. Pour réaliser ce programme, nous allons utiliser le théorème suivant.

THÉORÈME (LAGRANGE-BÜRMAN [6]). - Soit

$$T = \sum_{n\geq 1} c_n Y^n \quad \text{et} \quad Y = \sum_{n\geq 1} b_n T^n$$

deux séries formelles à coefficients dans un corps.

Supposons que Y et T soient réciproques l'une de l'autre, c'est-à-dire que

$$T(Y(T)) = T \quad \text{et} \quad Y(T(Y)) = Y ,$$

supposons en outre que $c_1 \neq 0$. Alors le coefficient de T^n dans la série Y est égal au coefficient de Y^{n-1} dans le développement en série de Taylor de $(Y/T)^{n+1} \frac{dT}{dY}$.

Démonstration. - Il existe des démonstrations purement formelles. Mais nous allons en donner une, basée sur l'intégrale de Cauchy. Soit $\mathcal{C}$ un petit cercle autour de l'origine, alors

$$b_n = \oint_{\mathcal{C}} \frac{Y}{T^{n+1}}\, dT = \oint_{\mathcal{C}'} \frac{Y}{T^{n+1}} \left(\frac{dT}{dY}\right) dY$$

($\mathcal{C}'$ est l'image de $\mathcal{C}$ par l'application $T \longrightarrow Y$). Si

$$\frac{Y}{T^{n+1}} \frac{dT}{dY} = \frac{1}{Y^n} \sum_{i\geq 0} \alpha_i Y^i ,$$

alors $b_n = \alpha_{n-1}$, c'est-à-dire : c'est le coefficient de Y^{n-1} dans $\left(\frac{Y}{T}\right)^{n+1} \left(\frac{dT}{dY}\right)$.

Q. E. D.

Application.

$$T = e^{cX} - 1 , \quad Y = \sum_{n\geq 1} b_n T^n , \quad X = \sum_{n\geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n .$$

Donc

$$T = \left(\exp\left(c \sum_{n\geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n\right)\right) - 1 \quad \text{et} \quad Y = \sum_{n\geq 1} b_n T^n$$

sont deux séries réciproques l'une de l'autre, et $b_1 = \frac{1}{c}$.

Si $c \neq 0$, le coefficient b_n est égal au coefficient de Y^{n-1} dans le développement en série de Taylor en Y de

$$\left(\frac{Y}{\left(\exp\left(c \sum_{n\geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n\right)\right) - 1}\right)^{n+1} \left(\exp c \sum_{n\geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n\right)\left(c \sum_{n\geq 1} e_n Y^{n-1}\right)$$

$$= \left(c \sum_{n\geq 1} e_n Y^{n-1}\right)\left(Y\left(\frac{Y}{\left(\exp\left(c \sum_{n\geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n\right)\right)-1}\right)^n + \left(\frac{Y}{\left(\exp\left(c \sum_{n\geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n\right)\right)-1}\right)^{n+1}\right)$$

$$= \sum_{m\geq 0} b_m^{(n)} Y^m .$$

Nous voulons obtenir une estimation de $|b_n|$, il nous suffit donc d'obtenir une estimation de $|b_m^{(n)}|$. Pour obtenir une estimation de $|b_m^{(n)}|$, nous allons tout d'abord obtenir une estimation de $|\beta_n|$, où l'on a posé

$$\exp(c \sum_{n\geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n) = 1 + \sum_{n\geq 1} \beta_n Y^n .$$

Pour cela, nous allons écrire formellement (utilisant ainsi une astuce due à B. DWORK),

$$\exp(c \sum_{n\geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n) = \exp(\sum_{i\geq 1} \log(1 - \alpha_i Y^i)) ,$$

ce qui est toujours possible.

LEMME 1. - Si

$$\exp(c \sum_{n\geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n) = \exp(\sum_{n\geq 1} \log(1 - \alpha_i Y^i)) = \prod_{i\geq 1} (1 - \alpha_i Y^i) ,$$

alors

$$ce_n = \sum_{i|n} i\alpha_i^{n/i} .$$

Démonstration. - On dérive logarithmiquement les 2 membres de

$$\exp(c \sum_{n\geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n) = \prod_{i\geq 1} (1 - \alpha_i Y^i) ,$$

et il vient

$$c \sum_{n\geq 1} e_n Y^{n-1} = \sum_{i\geq 1} \frac{i\alpha_i Y^{i-1}}{1 - \alpha_i Y^i} .$$

Q. E. D.

COROLLAIRE 1. - Si

$$\exp(c \sum_{n\geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n) = 1 + \sum_{n\geq 1} \beta_n Y^n ,$$

alors

$$\beta_n = \sum_{i_1+\dots+i_k=n, i_1>i_2>\dots>i_k>0} (-1)^k \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k} .$$

C'est clair.

Nous allons maintenant choisir c de telle sorte que la croissance des $|\alpha_i|$ soit aussi faible que possible.

THÉORÈME 1. - Soit

$$\exp(c \sum_{n\geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n) = \prod_{i\geq 1} (1 - \alpha_i Y^i) = 1 + \sum_{n\geq 1} \beta_n Y^n ,$$

avec $e_1 = 1$ et $|e_n| \leq 1$. Alors, si

$$c^{p-1} = e_p \quad \text{si} \quad e_p \neq 0$$

et

$$c = p^{-1/p} \quad \text{si} \quad e_p = 0 ,$$

on a

(i) $\alpha_1 = \beta_1 = c$,

(ii) pour $n \geq 2$ et pour $p \neq 2$,

$$|\alpha_n| \leq |c| \, p^{\frac{n}{2p-2} - \frac{1}{p-1}} ;$$

$$|\beta_n| \leq |c| \, p^{\frac{n}{2p-2} - \frac{1}{p-1}} ;$$

(iii) <u>pour</u> $n \geqslant 2$ <u>et pour</u> $p = 2$,

$$|\alpha_n| \leqslant |c| \; 2^{3(n-1)/4} \; ;$$
$$|\beta_n| \leqslant |c| \; 2^{3(n-1)/4} \; .$$

<u>Démonstration</u>. - On a

$$\alpha_n = \frac{ce_p}{n} - \sum_{i|n, i<n} \frac{i}{n} \alpha_i^{n/i} \; .$$

Donc $\alpha_1 = c$. Compte tenu du fait que $|e_n| \leqslant 1$, on a, avec le choix $c^{p-1} = e_p$ (resp. $c = p^{-1/p}$ si $e_p = 0$), $|\alpha_2| \leqslant 1$, ... , $|\alpha_{p-1}| \leqslant 1$.

$$\alpha_p = \frac{1}{p} (ce_p - c^p) \; ,$$

donc,

$$\text{si } |e_p| \geqslant p^{-1+(1/p)} \text{ , on a } \alpha_p = 0 \text{ avec } c^{p-1} = e_p \; ,$$

et

$$\text{si } |e_p| \leqslant p^{-1+(1/p)} \text{ , on a } |\alpha_p| \leqslant 1 \text{ avec le choix } c = p^{-1/p} \; .$$

Il est clair alors que $|\alpha_{p+1}| \leqslant 1$, ... , $|\alpha_{2p-1}| \leqslant 1$ et $|\alpha_{2p}| \leqslant p$ si $p \neq 2$, et $|\alpha_4| \leqslant 2^2$ si $p = 2$. De l'inégalité ultramétrique, on tire

$$|\alpha_n| \leqslant \sup\left(\frac{|c|\,|e_n|}{|n|} \, , \, \sup_{i<n} \left(\left|\frac{i}{n}\right| |\alpha_i|^{n/i}\right)\right)$$
$$\leqslant \sup\left(\sup_{1\leqslant i\leqslant n} \left|\frac{ce_n}{n}\right| \, , \, \sup_{2p\leqslant i<n} \left|\frac{i}{n} \alpha_i^{n/i}\right|\right)$$

car $|\alpha_i| \leqslant 1$ si $1 \leqslant i < 2p$.

Il suffit donc de montrer que, pour $p \neq 2$,

$$\text{(a)} \quad \frac{n}{2p-2} - \frac{1}{p-1} \geqslant \left[\frac{\log n}{\log p}\right] \quad \text{pour } n \geqslant 2p \; ,$$

$$\text{(b)} \quad \frac{n}{2p-2} - \frac{1}{p-1} \geqslant \frac{n}{i}\left(\frac{i}{2p-2} - \frac{1}{p-1}\right) + \left[\frac{\log(n/i)}{\log p}\right] \; ,$$

pour n et $i \geqslant 2p$, car $|c| \leqslant 1$.

<u>Démontrons</u> (a). - On étudie la fonction

$$f(x) = \frac{x}{2p-2} - \frac{1}{p-1} - \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \geqslant \frac{x}{2p-2} - \frac{1}{p-1} - \frac{\log x}{\log p} = g(x) \; .$$

Pour $2p \leqslant x \leqslant p^2 - 1$, on a directement $f(x) \geqslant 0$.

Pour $x \geqslant p^2$, on montre que $g(x) \geqslant 0$, car $g(x)$ a un minimum pour $x = \frac{2p-2}{\log p} < p^2$ et $g(p^2) \geqslant 0$ si $p \geqslant 3$.

<u>Démontrons</u> (b). - On étudie la fonction

$$f(x) = \frac{x}{p-1} - \frac{1}{p-1} - \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \geqslant \frac{x}{p-1} - \frac{1}{p-1} - \frac{\log x}{\log p} = g(x) \; ,$$

où $x = n/i$, donc $x \geqslant 2$. Si $2 \leqslant x \leqslant p$, $f(x) \geqslant 0$. Si $x \geqslant p$, alors $g(x) \geqslant 0$ car $g(x)$ a un minimum pour $x = \frac{p-1}{\log p} < p$ et $g(p) = 0$.

Si $p = 2$, il suffit de montrer

(a) $\frac{3}{4} n - 1 \geqslant \left[\frac{\log n}{\log 2}\right]$ pour $n \geqslant 4$,

(b) $\frac{3}{4}n - 1 \geqslant (\frac{3}{4}i - 1)\frac{n}{i} + [\frac{\log(n/i)}{\log 2}]$, pour $n \geqslant 4$, car $|c| \leqslant 1$.

Démontrons (a). - On étudie la fonction

$$f(x) = \frac{3}{4}x - 1 - \frac{\log x}{\log 2} \qquad (x \geqslant 4) ,$$

elle a un minimum pour $x = 4/(3 \log 2) < 4$ et $f(4) = 0$.

Démontrons (b). - On étudie la fonction

$$f(x) = x - 1 - \frac{\log x}{\log 2} , \text{ où } x = n/i ,$$

donc $x \geqslant 2$. Elle a un minimum pour $x = 1/\log 2 < 2$ et $f(2) = 0$.

Nous avons donc démontré que $\alpha_1 = c$ et, pour $n \geqslant 2$,

$$|\alpha_n| \leqslant |c| \; p^{\frac{n}{2p-2} - \frac{1}{p-1}} \quad \text{si} \quad p \neq 2$$

$$(\; |\alpha_n| \leqslant |c| \; 2^{3(n-1)/4} \quad \text{si} \quad p = 2 \;).$$

On déduit de là immédiatement que $\beta_1 = c$ et, pour $n \geqslant 2$,

$$|\beta_n| \leqslant |c| \; p^{\frac{n}{2p-2} - \frac{1}{p-1}} \quad \text{si} \quad p \neq 2$$

$$(\; |\beta_n| \leqslant |c| \; 2^{3(n-1)/4} \quad \text{si} \quad p = 2 \;).$$

Q. E. D.

COROLLAIRE 2. - La série $1/(\sum_{n\geqslant 1} \beta_n Y^{n-1})$ a pour rayon de convergence $\rho_p = p^{-1/(2p-2)}$ si $p \neq 2$, $\rho_2 = 2^{-3/4}$ si $p = 2$ et

$$\sup_{Y \in B(0,\rho_p^-)} \left| \frac{1}{\sum_{n\geqslant 1} \beta_n Y^{n-1}} \right| \leqslant |c|^{-1} .$$

Démonstration. - On a $\beta_1 = c$ et

$$|\beta_n| \leqslant |c| \; p^{(n-2)/(2p-2)} \quad \text{si} \quad p \neq 2 ,$$

$$\text{resp.} \quad |\beta_n| \leqslant |c| \; 2^{3(n-1)/4} \quad \text{si} \quad p = 2 .$$

Q. E. D.

THEOREME 2. - Soit $Y = \sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{X^n}{n!}$ et $X = \sum_{n\geqslant 1} \frac{e_n}{n} Y^n$ avec $e_1 = 1$ et $|e_n| \leqslant 1$ (e_n et $a_n \in \underset{\sim}{C}_p$).

Si l'on choisit $c \neq 0$ tel que $c^{p-1} = e_p$ si $|e_p| > p^{-1+(1/p)}$ (respectivement $c = p^{-(1/p)}$ si $|e_p| \leqslant p^{-1+(1/p)}$), on a

$$Y = \sum_{n\geqslant 1} b_n \; (e^{cX} - 1)^n$$

$$\text{avec} \quad b_1 = \frac{1}{c} \quad \text{et} \quad |b_n| \leqslant |c|^{-n} \; p^{(n-1)/2(p-1)}$$

si $p \neq 2$ (respectivement $|b_n| \leqslant |c|^{-n} \; 2^{3(n-1)/4}$ si $p = 2$).

Démonstration. - C'est immédiat à partir du corollaire 2 et du théorème de Lagrange-Bürman, via les inégalités de Cauchy pour les séries de Taylor $\sum_{m\geqslant 0} b_m^{(n)} Y^m$.

Q. E. D.

Remarque. - On peut un peu raffiner les inégalités sur les b_n . Il est clair, en effet que $|\beta_n| \leqslant |c|$ pour $n \leqslant 2p-1$, $|\beta_{2p}| \leqslant |c|p$, donc même chose pour les b_n.

THÉORÈME 3. - Soit

$$X = \sum_{n\geqslant 1} \frac{e_n}{n} Y^n \quad \text{avec} \quad e_1 = 1 \quad \text{et} \quad |e_n| \leqslant 1 ,$$

et

$$Y = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n!} X^n$$

deux séries réciproques de $\underset{\sim}{C}_p[[X]]$.

(i) Si $|e_p| > p^{-1/2}$, $Z(X) = \sum_{n\geqslant 1} a_n X^n$ est un élément analytique p-adique [1], sur

$$\mathcal{C}(\rho_p) = B(0, \rho_p^{-1}) - \bigcup_{i=1}^{p-1} B(i^{-1} c^{-1}, \rho_p)$$

avec $\rho_p < |c|^{-1} p^{-(1/2)-(1/2(p-1))}$ si $p \neq 2$, respectivement $\rho_2 < |c|^{-1} 2^{-1/2}$. En outre, $\sup_{X\in\mathcal{C}(\rho_p)} |Z(X)| \leqslant 1$ si $\rho_p \leqslant |c|^{-1} p^{-1/2}$ pour $p \neq 2$, respectivement $\rho_2 \leqslant |c|^{-1} 2^{-1/4}$.

(ii) Si $|e_p| \leqslant p^{-1/2}$, $Z(X)$ est une fonction analytique (non bornée) sur $B(0, \rho_p^{-1})$, où $\rho_p < p^{-1/(2p-2)}$ pour $p \neq 2$, respectivement $\rho_2 < 2$.

En outre, $\sup_{X\in B(0,\rho_p)} |Z(X)| = 1$ si

$$\rho_p \leqslant p^{-(1-\frac{1}{5\log p})\frac{1}{2(p-1)}} \quad \text{pour} \quad p \neq 2 ,$$

respectivement si $\rho_2 \leqslant 2^{-(1-\frac{2}{5})\frac{1}{4}}$.

Démonstration. - Rappelons qu'un élément analytique p-adique sur un sous-ensemble $\mathcal{C}$ de $\underset{\sim}{C}_p$ est une limite uniforme sur $\mathcal{C}$ de fractions rationnelles de $\underset{\sim}{C}_p(X)$ sans pôles dans $\mathcal{C}$ [1]. Choisissons $c \neq 0$ tel que $c^{p-1} = e_p$ si $|e_p| > p^{-1+(1/p)}$ (resp. $c = p^{-1/p}$ sinon). On a, par le théorème 2 :

$$Y = \sum_{n\geqslant 1} b_n (e^{cX} - 1)^n \quad \text{avec} \quad b_1 = \frac{1}{c}$$

et

$$|b_n| \leqslant |c|^{-n} p^{(n-1)/(2p-2)} \quad \text{si} \quad p \neq 2$$

(resp. $|b_n| \leqslant |c|^{-n} 2^{3(n-1)/4}$ si $p = 2$). Soit $\mathcal{L}$ l'application de $\underset{\sim}{C}_p[[X]]$ dans lui-même, définie par

$$\tilde{f}(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n \frac{X^n}{n!} \longmapsto \mathcal{L}(\tilde{f}(X)) = f(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n .$$

Il est clair que

$$\mathcal{L}((e^{cX} - 1)^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{1}{1-kcX}$$

$$= \frac{n!\, c^n X^n}{(1-cX)\dots(1-ncX)} = \begin{bmatrix} & n & \\ 0 , & c , & X \end{bmatrix} .$$

Donc

$$Z(X) = \sum_{n\geqslant 1} b_n \frac{n!\, c^n X^n}{(1-cX)\dots(1-ncX)} .$$

Nous allons montrer que sur $\mathcal{C}(\rho_p)$ la suite $n \longrightarrow b_n \begin{bmatrix} & n & \\ 0 & , c & , X\end{bmatrix}$ converge uniformément vers zéro, si $|e_p| > p^{-1/2}$. En effet, posons

$$\rho_p = |c|^{-1}\, p^{-(1/2)-(1/2(p-1))+\varepsilon} \text{ avec } \varepsilon > 0 \ , \quad p \neq 2 \ ,$$

alors

$$\sup_{X\in \underset{\sim}{C}_p} \left|\frac{b_n\, n!\, c^n\, X^n}{(1-cX)\dots(1-ncX)}\right| \leqslant p^{-\varepsilon n - \frac{1}{2p-2} + [\frac{\log n}{\log p}] + 1} \ ,$$

ce qui montre que $Z(X)$ est un élément analytique sur $\mathcal{C}(\rho_p)$ si

$$\rho_p < p^{-(1/2)-(1/2(p-1))}\, |c|^{-1}$$

(même démonstration pour ρ_2).

Si $p \neq 2$ et si $\varepsilon \geqslant \frac{1}{2(p-1)}$, alors des calculs antérieurs (théorème 1) montrent que

$$\sup_{X\in \mathcal{C}(\rho_p)} \left|\frac{b_n\, n!\, c^n\, X^n}{(1-cX)\dots(1-ncX)}\right| \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad n \geqslant 4p-4 \ .$$

La remarque qui suit le théorème 2 permet de conclure pour $1 \leqslant n < 4p - 4$, car alors $|\beta_n| \leqslant |c|^{-1}\, p$.

La démonstration est analogue pour $p = 2$. On a donc démontré (i).

Si $|e_p| \leqslant p^{-1/2}$ alors, si $|X| < |c|^{-1} \leqslant p^{1/(2p-2)}$, $p \neq 2$,

$$\sup_{X\in B(0,\rho_p)} \left|\frac{b_n\, n!\, c^n\, X^n}{(1-cX)\dots(1-ncX)}\right| \leqslant p^{1-\varepsilon n + \frac{\log n}{\log p}} \ , \quad \varepsilon > 0 \ ,$$

et donc la limite pour $n \longrightarrow \infty$ est zéro.

On a donc montré que, si $|e_p| \leqslant p^{-1/2}$ et $p \neq 2$, $Z(X)$ est une fonction analytique sur $B(0 \ , \rho_p^{-1})$ avec $\rho_p < p^{-1/(2p-2)}$. La démonstration est analogue pour $p = 2$.

Posons

$$\rho_p^{-1} = \frac{\alpha}{2(p-1)} \ , \text{ resp. } \ \rho_2^{-1} = \frac{\alpha}{4} \ .$$

On cherche $\alpha \leqslant 1$ tel que

$$\sup_{n\geqslant 1} \sup_{X\in B(0,\rho_p^{-1})} \left| b_n \begin{bmatrix} & n & \\ 0 & , c & , X\end{bmatrix}\right| \leqslant 1 \ .$$

On cherche donc $\alpha \leqslant 1$ tel que, pour $p \neq 2$,

$$\sup_{n\geqslant 1} p^{\frac{n-1}{2(p-1)} - \frac{n}{p-1} + [\frac{\log n}{\log p}] + \frac{\alpha n}{2(p-1)} + 1} \leqslant 1$$

ou de manière équivalente,

$$f(n) = n\, \frac{\alpha - 1}{2(p-1)} - \frac{1}{2(p-1)} + [\frac{\log n}{\log p}] + 1 \leqslant 0 \ .$$

On voit que le maximum de $f(n)$ est atteint pour $n = \frac{2(p-1)}{(1-\alpha)\log p}$. On choisit alors α pour que ce maximum soit négatif. On trouve

$$\alpha \leqslant 1 - \frac{p}{e p^{1/(2(p-1))}\ 2(p-1)\log p} \ , \text{ où } \ e = 2 \ , 7 \dots$$

Si $p = 2$, on trouve de manière analogue $\alpha \leqslant 1 - (2/(e2^{11/4} \log 2))$. On prendra donc de manière approchée

$$\alpha = 1 - \frac{1}{5 \log p} \quad \text{si} \quad p \neq 2 \quad \text{et} \quad \alpha = 1 - \frac{2}{5} \quad \text{si} \quad p = 2 .$$

Q. E. D.

COROLLAIRE 3. - Si $|e_p| \geqslant p^{-1/2}$, alors, pour $n \geqslant h$ et $p \neq 2$,

$$\left| \frac{a_n}{c^n} - \frac{a_{n+(p-1)p^{h-1}}}{c^{n+(p-1)p^{h-1}}} \right| \leqslant p^{-h/2}$$

(resp. $\leqslant 2^{-h/4}$).

Pour $n \geqslant m$ et $p \neq 2$,

$$\left| \sum_{r=0}^{m} (-1)^{m-r} \binom{m}{r} \frac{a_{n+r(p-1)}}{c^{n+r(p-1)}} \right| \leqslant p^{-m/2}$$

(resp. $\leqslant 2^{-m/4}$).

Démonstration. - C'est immédiat à partir de la décomposition de Mittag-Leffler [1] ou [8], de $Z(X)$ sur $\mathcal{C}(\rho_p)$ avec

$$\rho_p = |c|^{-1} p^{-1/2} \quad \text{si} \quad p \neq 2$$

et

$$\rho_2 = |c|^{-1} 2^{-1/4} \quad \text{si} \quad p = 2 .$$

Q. E. D.

Remarque 1. - On peut aussi le démontrer en tronquant la série qui définit $Z(X)$ sur $\mathcal{C}(\rho_p)$ à un rang suffisament grand en fonction de h et m .

Remarque 2. - Ces résultats sont à rapprocher de ceux de Carlitz ([3], [4], [5]).

COROLLAIRE 4. - Si $|e_p| \geqslant p^{-1/2}$, posons

$$a_n^* = \lim_{h\to\infty} \frac{a_{n+(p-1)p^h}}{c^{n+(p-1)p^h}}$$

(limite au sens p-adique). Alors a_n^* est, pour $n \equiv i$ modulo$(p - 1)$, la restriction d'une fonction localement analytique de $\underset{\sim}{Z}_p$ dans $\underset{\sim}{C}_p$ de rayon d'analyticité local supérieur ou égal à $p^{(p-3)/2(p-1)}$ si $p \neq 2$ (resp. $2^{-1/4}$).

Démonstration. - C'est encore immédiat à partir de la décomposition de Mittag-Leffler de $Z(X)$. En effet,

$$Z^*(X) = \sum_{n\geqslant 1} a_n^* X^n$$

a la même décomposition de Mittag-Leffler que $Z(X)$ relativement aux trous $B(i^{-1} c^{-1} , \rho_p)$, et n'a pas de partie singulière relative au trou à l'infini. Donc $Z^*(X)$ est un élément analytique p-adique sur $\underset{\sim}{C}_p - \bigcup_{i=0}^{p-1} B(i^{-1} c^{-1} , \rho_p)$ nul à l'infini. Le résultat est alors immédiat.

Q. E. D.

COROLLAIRE 5. - Si $|e_p| < p^{-1/2}$, alors pour $p \neq 2$,

$$\left| a_n \, p^{-\frac{n}{2p-2}\left(1 - \frac{1}{5 \log p}\right)} \right| \leqslant 1 \ ,$$

respectivement

$$\left| a_n \, 2^{-\frac{1}{4}(1-\frac{2}{5})n} \right| \leqslant 1 \ .$$

Démonstration. - C'est immédiat à partir du théorème 3 et des inégalités de Cauchy.

Q. E. D.

Remarque. - Si l'on connaît des résultats plus fins sur les e_n , on peut améliorer l'estimation des $|b_n|$ et donc, par là même, les congruences sur les a_n .

Par exemple si l'on sait que

$$e_{np^{\nu+1}} \equiv e_{np^{\nu}} \, e_p \mod p^{\nu+1} \ ,$$

alors on peut facilement montrer que $|b_n| \leqslant 1$. Mais déjà si l'on sait que $e_{np} \equiv e_n \, e_p \mod p$, on a de. meilleurs résultats sur les $|b_n|$.

Par exemple, si $e_n \in \underset{\sim}{Z}$, $|e_p| \leqslant p^{-1}$, alors on peut montrer que $p^{[np/(p^2-1)]}$ divise a_n et que $a_n/p^{[np/(p^2-1)]}$ vérifie des congruences analogues à celle du corollaire 3 (Cf. KATZ [7]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Nombres p-adiques. - Paris, Presses Universitaires de France, 1975 (Collection SUP, "Le Mathématicien", 14).

[2] BARSKY (D.). - Transformation de Cauchy p-adique et algèbre d'Iwasawa, Math. Annalen (à paraître).

[3] CARLITZ (L.). - Congruences for the coefficients of the Jacobi elliptic function, Duke math J., t. 16, 1949, p. 297-302.

[4] CARLITZ (L.). - Congruences for the coefficients of hyperelliptic and related functions, Duke math. J., t. 19, 1952, p. 329-337.

[5] CARLITZ (L.). - Congruences for generalized Bell and Stirling numbers, Duke math. J., t. 22, 1955, p. 193-205.

[6] EICHLER (M.). - Introduction to the theory of algebraic numbers and functions. - New York, Academic Press, 1966 (Pure and applied Mathematics, Academic Press, 23).

[7] KATZ (N.). - Graduate course, Princeton University, 1977/78.

[8] ROBBA (P.). - Fonctions analytiques sur les corps valués complets ultramétriques, Astérisque n° 10, 1973, p. 109-218.

(Texte reçu le 20 octobre 1977)

Daniel BARSKY
Mathématiques, Tour 45-55,
Université Paris-7
2 place Jussieu
75221 PARIS CEDEX 05