Groupe de travail d'analyse ultramétrique

DANIEL BARSKY

Polynômes eulériens modulo p^h

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 4 (1976-1977), exp. nº 11, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1976-1977__4__A10_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, D. BARSKY, P. ROBBA)
4e année, 1976/77, n° 11, 13 p.
31 janvier 1977

POLYNÔMES EULÉRIENS modulo p^h

par Daniel BARSKY

RÉSUMÉ. - On montre que, pour tout nombre premier p, la fonction génératrice des polynômes eulériens, $A_n(t)$, est une fonction analytique p-adique au sens de Krasner sur certains sous-ensembles de $\underset{\sim}{C}_p$. On déduit de ce résultat des congruences entre les polynômes eulériens. En particulier, on montre que, pour tout entier $h \geqslant 0$, la suite de fractions rationnelles

$$A_n^*(t) = \frac{t}{(t-1)^{n+1}} A_n(t) - p^n \frac{t^p}{(t^p-1)^{n+1}} A_n(t^p)$$

est périodique modulo p^h de période $(p-1)p^{h-1}$.

Introduction et notations.

Les polynômes eulériens, $A_n(t)$, ont pour fonction génératrice de Hurwitz [10]

$$\sum_{n\geqslant 0} A_n(t) \frac{u^n}{n!} = \frac{1-t}{-t+e^{u(t-1)}} .$$

Ce sont des polynômes qui s'introduisent naturellement dans des problèmes d'énumération concernant le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur l'ensemble totalement ordonné $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ [10]. Il est dès lors assez naturel de s'intéresser aux propriétés des polynômes eulériens, et en particulier au comportement de la suite $n \longrightarrow A_n(t)$ modulo les puissances d'un nombre premier.

Nous suivons les notations d'Y. AMICE [1]. Soit p un nombre premier, $\underset{\sim}{N}$, $\underset{\sim}{Z}$, $\underset{\sim}{Q}$, $\underset{\sim}{R}_+$ ont leur signification habituelle ; $\underset{\sim}{Z}_p$, $\underset{\sim}{Q}_p$ désignent respectivement l'anneau des entiers p-adiques et le corps des nombres p-adiques munis de la valeur absolue p-adique normalisée par $|p| = p^{-1}$; $\underset{\sim}{C}_p$ est le complété de la clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$, sa valeur absolue est encore normalisée par $|p| = p^{-1}$ [1]. On sait depuis les travaux d'AMICE et FRESNEL qu'il y a un lien entre la prolongeabilité analytique au sens de Krasner d'une série de Taylor

$$F(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n \in \underset{\sim}{C}_p[[X]] ,$$

sur un quasi-connexe de $\underset{\sim}{C}_p$ contenant le disque de convergence de la série et des congruences entre les a_n.

Le théorème de Mittag-Leffler p-adique ([1], [12]), par les inégalités de type Cauchy qu'il fournit, permet d'établir un lien étroit entre les propriétés de prolongeabilité analytique sur un quasi-connexe de $\underset{\sim}{C}_p$ de $F(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n \in \underset{\sim}{C}_p[[X]]$ et des congruences entre les a_n (cf. [12] ainsi que [3], [5], [6], [7] et [8]).

Rappelons que l'on dit qu'une fonction F, définie sur un sous-ensemble $B \subset \underset{\sim}{C}_p$ à valeurs dans $\underset{\sim}{C}_p$, est un élément analytique sur B si F est une limite uniforme sur B d'une suite de fractions rationnelles de $\underset{\sim}{C}_p(X)$ sans pôles dans B.

La norme de la convergence uniforme sur B est notée $\| \|_B$, donc

$$\|F\|_B = \sup_{X\in B} |F(X)| .$$

On note $H(B)$, respectivement $H_0(B)$, l'espace de Banach des éléments analytiques sur B , respectivement des éléments analytiques sur B nuls à l'infini, muni de la norme de la convergence uniforme sur B . On note, si $a \in \underset{\sim}{C}_p$ et si $\rho \in \underset{\sim}{R}_+$, $B(a , \rho^+) = \{X \in \underset{\sim}{C}_p ; |X - a| \leqslant \rho\}$, resp. $B(a , \rho^-) = \{X \in \underset{\sim}{C}_p ; |X - a| < \rho\}$, la boule fermée, respectivement ouverte, de centre a et de rayon ρ . Si $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ est une suite croissante de quasi connexes de $\underset{\sim}{C}_p$ ([1], [11]), on dira que F est une fonction analytique sur $\mathcal{C} \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{C}_i$, si F est un élément analytique sur chacun des $\mathcal{C}_i$. Nous désignons par ρ , r et ε des réels > 0 . Nous posons $q = p$ si $p > 2$, et $q = 4$ si $p = 2$. Si $a \in \underset{\sim}{R}_+$, $[a]$ est la partie entière de a , c'est-à-dire que $[a] \in \underset{\sim}{N}$ et $a - 1 < [a] \leqslant a$. Il sera commode d'étudier les fractions rationnelles

$$A_n^*(t) = \frac{t}{(t-1)^{n+1}} A_n(t) - p^n \frac{t^p}{(t^p-1)^{n+1}} A_n(t^p)$$

et leur fonction génératrice

$$G_t(v) = \sum_{n\geqslant 0} A_n^*(t) v^n .$$

Cette modification des $A_n(t)$ permet d'avoir des congruences qui s'expriment simplement en termes de fonctions continues, analytiques, etc., p-adiques.

Nous posons, si $\varepsilon > 0$ et si $B \subset \underset{\sim}{C}_p$,

$$\mathcal{V}_\varepsilon(B) = \{X \in \underset{\sim}{C}_p ; |X - b| \geqslant \varepsilon \text{ pour tout } b \in B\} .$$

Il est clair que si B est compact, $\mathcal{V}_\varepsilon(B)$ est un quasi-connexe ([11] ou [1]). Nous posons $\underset{\sim}{Z}_p^* = \{x \in \underset{\sim}{Z}_p ; |x| = 1\}$. Notons Γ_p le groupe des racines p-ièmes de l'unité. Si $t \in \underset{\sim}{C}_p - B(1 , 1^-)$, l'application $v \longrightarrow G_t(v)$ appartient à $H_0(\mathcal{V}_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}_p^*))$, et $\|G_t\|_{\mathcal{V}_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}_p^*)} \leqslant 1/\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où nous déduisons que $k \longrightarrow A^*_{i+k(p-1)}(t)$ est la restriction d'une fonction de l'algèbre d'Iwasawa sur $\underset{\sim}{Q}_p(t)$ (théorème 1, proposition 1 et corollaire 1). Si $1 \geqslant \rho > p^{-1/(p-1)}$ et si $t \in \underset{\sim}{C}_p - B(1 , \rho^+)$, nous montrons que $v \longrightarrow G_t(v)$ est une fonction analytique sur $\mathcal{V}_r(\underset{\sim}{Z}_p^*)$, où r dépend de ρ de manière explicite ; en outre, nous donnons la croissance de $v \longrightarrow G_t(v)$ sur le bord de $\mathcal{V}_r(\underset{\sim}{Z}_p^*)$. Ce résultat implique que $k \longrightarrow A^*_{i+k(p-1)}(t)$ est la restriction d'une fonction localement analytique sur $\underset{\sim}{Z}_p$ dont nous donnons une estimation du rayon d'analyticité locale (théorème 1, proposition 2 et corollaire 2). Enfin si $t \in \underset{\sim}{C}_p - \bigcup_{\xi\in\Gamma_p} B(\xi , \rho^+)$, où $0 < \rho < p^{-1/(p-1)}$, alors $v \longrightarrow G_t(v)$ est une fonction analytique bornée sur $B(0 , r^-)$, où r dépend explicitement de ρ , et nous donnons une estimation de $\|G_t\|_{B(0,r^-)}$; de là nous déduisons une estimation de la norme p-adique de $A_n^*(t)$ pour

$$t \in \underset{\sim}{C}_p - \bigcup_{\xi\in\Gamma_p} B(\xi , \rho^+) .$$

Les deux premiers résultats permettent d'obtenir, via des théorèmes de J.-P. SERRE et Y. AMICE, des congruences sur les quantités $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} A^*_{i+k(p-1)}(t)$, des estimations p-adiques de $A^*_n(t) - A^*_{n+(p-1)p^h}(t)$, ainsi que des estimations en norme de Gauss de la même quantité (i. e. des congruences entre fractions rationnelles formelles).

2. Fonctions génératrices des polynômes eulériens.

Par définition [10], la fonction génératrice de Hurwitz des polynômes eulériens $A_n(t)$ est

$$\sum_{n\geq 0} A_n(t) \frac{u^n}{n!} = \frac{1-t}{-t+e^{u(t-1)}} = \tilde{F}_t(u) .$$

Donc

$$\tilde{F}_t(u) = \left(1 - \frac{e^{u(t-1)}}{t-1}\right)^{-1} = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{e^{u(t-1)}-1}{t-1}\right)^n ,$$

la dernière série convergeant formellement en u . Posons $v = u(t-1)$, il vient

$$\tilde{H}_t(v) = \sum_{n\geq 0} \frac{A_n(t)}{(t-1)^n} \frac{v^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{e^v - 1}{t-1}\right)^n ,$$

la dernière série convergeant formellement en v (i. e. v-adiquement). Nous allons étudier la série génératrice ordinaire de $A_n(t)/(t-1)^n$, pour cela nous allons utiliser la transformation de Laplace formelle $\mathcal{L}$ sur $\underset{\sim}{C}_p(t)[[v]]$, c'est-à-dire sur l'espace des séries formelles en v à coefficients fractions rationnelles en t sur $\underset{\sim}{C}_p$. Si

$$\tilde{f}_t(v) = \sum_{n\geq 0} a_n(t) \frac{v^n}{n!} \in \underset{\sim}{C}_p(t)[[v]] ,$$

nous posons par définition

$$\mathcal{L}(\tilde{f}_t(v)) = f_t(v) = \sum_{n\geq 0} a_n(t)\, v^n .$$

On remarque que $\mathcal{L}$ est une application $\underset{\sim}{C}_p(t)$-linéaire de $\underset{\sim}{C}_p(t)[[v]]$ dans lui-même qui est v-adiquement continue. On a

$$\mathcal{L}(e^{av}(e^{bv}-1)^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (1-(a+bk)v)^{-1} = \frac{(n!)v^n\, b^n}{(1-av)(1-(a+b)v)\dots(1-(a+nb)v)} .$$

On pose $\mathcal{L}(e^{av}(e^{bv}-1)^n) = \begin{bmatrix} & n & \\ a\ , & b\ , & v \end{bmatrix}$.

LEMME 1. - Si

$$H_t(v) = \mathcal{L}(\tilde{H}_t(v)) = \sum_{n\geq 0} \frac{A_n(t)}{(t-1)^n} v^n ,$$

alors

$$H_t(v) = \sum_{n\geq 0} (t-1)^{-n} \begin{bmatrix} & n & \\ 0\ , & 1\ , & v \end{bmatrix} .$$

Démonstration. - C'est évident, car $\tilde{H}_t(v) = \sum_{n\geq 0} (t-1)^{-n} (e^v - 1)^n$, donc

$$H_t(v) = \mathcal{L}(\tilde{H}_t(v)) = \sum_{n\geq 0} (t-1)^{-n} \mathcal{L}((e^v-1)^n) .$$

Q. E. D.

LEMME 2. - Pour tout entier $h \geq 1$, $H_t(v)$ est modulo $p^h \underset{\sim}{C}_p(t)[[v]]$ une série formelle reconnaissable en les deux variables commutatives v et t.

Pour les définitions et les propriétés des séries formelles reconnaissables, voir [9].

Démonstration. - Soit N un entier tel que p^h divise $N!$, alors

$$H_t(v) = \sum_{n=0}^{N} (t-1)^{-n} \begin{bmatrix} & n & \\ 0 & 1 & v \end{bmatrix} \mod (p^h \underset{\sim}{C}_p(t)[[v]]) .$$

Le second membre est de la forme

$$\frac{P(v, t)}{(t-1)^N (1-v)(1-2v)\dots(1-nv)} \quad \text{où} \quad P(v, t) \in \underset{\sim}{C}_p[t, v] ,$$

c'est donc une fraction rationnelle reconnaissable en les variables commutatives v et t [9].

Q. E. D.

3. Polynômes eulériens modulo p^h.

Nous allons interpréter p-adiquement la formule

$$H_t(v) = \sum_{n\geq 0} \frac{A_n(t)}{(t-1)^n} v^n = \sum_{n\geq 0} (t-1)^{-n} \begin{bmatrix} & n & \\ 0 & 1 & v \end{bmatrix} .$$

Dorénavant t et v sont des éléments de certains sous-ensembles de $\underset{\sim}{C}_p$.

LEMME 3. - Pour tout $t \in \underset{\sim}{C}_p - B(1, 1^-)$ et tout $v \in B(0, 1^-)$, on a $|H_t(v)| \leq 1$.

Démonstration. - On sait (Cf. [3]) que

$$\sup_{v\in B(0,1^-)} |H_t(v)| = \sup_{n\geq 0} \left|\frac{n!}{(t-1)^n}\right| .$$

Q. E. D.

On tire du lemme 3 que, pour $t \in \underset{\sim}{C}_p - B(1, 1^-)$, $H_t(v) \in H(B(0, 1^-))$, et que l'on a uniformément, pour $t \in \underset{\sim}{C}_p - B(1, 1^-)$, $\sup_{v\in B(0,1^-)} |H_t(v)| \leq 1$.

Pour obtenir des congruences modulo p^h entre les $(t-1)^{-n} A_n(t)$, on choisit N tel que $|N!| \leq p^{-h}$, alors

$$\sup_{t\in \underset{\sim}{C}_p - B(1,1^-)} \left\| H_t(v) - \sum_{n=0}^{N-1} (t-1)^{-n} \begin{bmatrix} & v & \\ 0 & 1 & v \end{bmatrix} \right\|_{B(0,1^-)} \leq p^{-h} .$$

Posons $H_{h,t}(v) = \sum_{n=0}^{N-1} (t-1)^{-n} \begin{bmatrix} & n & \\ 0 & 1 & v \end{bmatrix}$. En revenant à la définition $\begin{bmatrix} & n & \\ 0 & 1 & v \end{bmatrix}$, il vient

$$H_{h,t}(v) = \sum_{n=0}^{N-1} B_n(t) (1-nv)^{-1} ,$$

où $B_n(t) \in \underset{\sim}{C}_p(t)$ et $\sup_{t\in \underset{\sim}{C}_p - B(1,1^-)} |B_n(t)| \leq 1$. D'après le petit théorème de Fermat,

$$n^{(p-1)p^{h-1}} \equiv 1 \mod (p^h) \quad \text{si } n \text{ est premier à } p ,$$

et

$$|n^k| \leqslant p^{-k} \quad \text{si } p \text{ divise } n .$$

De là, il vient immédiatement, en développant $H_{h,t}(v)$ en série de puissances de v,

$$\sup_{t \in \mathbb{C}_p - B(1,1^-)} \left| \frac{A_n(t)}{(t-1)^n} - (t-1)^{-n-(p-1)p^{h-1}} A_{n+(p-1)p^{h-1}}(t) \right| \leqslant p^{-h}$$

pour $n \geqslant h$. En particulier, d'après les inégalités de Cauchy [1], on a, pour $n \geqslant h$,

$$(t-1)^{-n} A_n(t) - (t-1)^{-n-(p-1)p^{h-1}} A_{n+(p-1)p^{h-1}}(t) = p^h (t-1)^{-n-(p-1)p^{h-1}} P_{n,h}(t)$$

où $P_{n,h}(t) \in \mathbb{Z}_p[t]$.

Si $t \in \mathbb{C}_p - B(1, 1^-)$, les congruences précédentes ne sont obtenues que pour $n \geqslant h$, ce qui est peu agréable. Pour nous débarasser de cette condition, nous allons modifier quelque peu $H_t(v)$. En fait, nous allons calculer la partie singulière $H_{\infty,t}(v)$ de $H_t(v)$ relative au trou à l'infini $\mathbb{C}_p - B(0, 1^+)$ du quasi-connexe $B(0, 1^-)$ (Cf. [1], [11], [12]). C'est-à-dire que $H_{\infty,t}(v)$ est, d'après le théorème de Mittag-Leffler p-adique, l'unique élément analytique sur $B(0, 1^+)$ tel que $H_t(v) - H_{\infty,t}(v)$ soit un élément analytique sur $\{X \in \mathbb{C}_p ; |X| \neq 1\}$, nul à l'infini. Nous trouverons aussi une relation fonctionnelle simple entre $H_{\infty,t}(v)$ et $H_t(v)$:

$$H_{\infty,t}(v) = \frac{t-1}{t} \frac{t^p}{t^p - 1} H_{t^p}(pv) .$$

Nous obtenons, pour $t \in \mathbb{C}_p - B(1, 1^-)$ et pour $\varepsilon > 0$, un élément analytique sur $\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbb{Z}_p^*)$:

$$G_t(v) = \frac{t}{t-1} H_t(v) - \frac{t^p}{t^p - 1} H_{t^p}(pv) .$$

Ceci nous fournira des congruences entre les

$$A_n^*(t) = \frac{t}{(t-1)^{n+1}} A_n(t) - p^n \frac{t^p}{(t^p-1)^{n+1}} A_n(t^p) ,$$

qui s'expriment simplement à l'aide des notions de fonctions continues, respectivement lipschitziennes, respectivement localement analytiques, respectivement de l'algèbre d'Iwasawa p-adiques. Nous allons réaliser maintenant ce programme.

LEMME 4. - <u>Si</u> $A_n^*(t) = \frac{1}{t-1} A_n(t) - \frac{t^p}{t^p-1} A_n(t^p)$, <u>alors</u>

$$G_t(v) = \sum_{n \geqslant 0} A_n^*(t)\, v^n = \frac{t}{t-1} H_t(v) - \frac{t^p}{t^p-1} H_{t^p}(pv) = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{n \geqslant 0} \frac{t^{p-i}}{(t^p-1)^{n+1}} \begin{bmatrix} n \\ i,p,v \end{bmatrix}$$

<u>Démonstration</u>. - On a

$$\bar{H}_t(v) = \frac{1-t}{-t+e^v} = \frac{t-1}{t} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{e^{iv}}{t^i} \left(1 - \frac{e^{pv}}{t^p}\right)^{-1}$$

$$= \frac{t-1}{t} \frac{t^p}{t^p - 1} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{e^{iv}}{t^i} \left(1 - \frac{e^{pv} - 1}{t^p - 1}\right)^{-1}$$

$$= \frac{t-1}{t} \frac{t^p}{t^p - 1} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{e^{iv}}{t^i} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{e^{pv} - 1}{t^p - 1}\right)^n .$$

On constate que, pour $i = 0$, on a

$$\frac{t-1}{t} \frac{t^p}{t^p - 1} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{e^{pv} - 1}{t^p - 1}\right)^n = \frac{t-1}{t} \frac{t^p}{t^p - 1} \tilde{H}_{t^p}(pv) .$$

Donc

$$\frac{t}{t-1} \tilde{H}_t(v) - \frac{t^p}{t^p - 1} \tilde{H}_{t^p}(pv) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{t}{(t-1)^{n+1}} A_n(t) - \frac{t^p}{(t^p - 1)^{n+1}} A_n(t^p)\right) \frac{v^n}{n!}$$

$$= \sum_{n \geq 0} A_n^*(t) \frac{v^n}{n!}$$

$$= \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{n \geq 0} e^{iv} \frac{t^{p-i}}{t^p - 1} \left(\frac{e^{pv} - 1}{t^p - 1}\right)^n .$$

En appliquant l'opérateur $\mathcal{L}$ dans les égalités précédentes, il vient

$$\sum_{n \geq 0} A_n^*(t)\, v^n = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{n \geq 0} \frac{t^{p-i}}{(t^p - 1)^{n+1}} \begin{bmatrix} & n & \\ i, & p, & v \end{bmatrix} = \frac{t}{t-1} H_t(v) - \frac{t^p}{t^p - 1} H_{t^p}(pv) .$$

Q. E. D.

En fait, ce lemme exprime que la partie singulière $H_{\infty,t}(v)$ de $H_t(v)$, dans la décomposition du théorème de Mittag-Leffler p-adique relative au trou à l'infini du quasi-connexe $B(0\ ,\ 1^-)$, est

$$H_{\infty,t}(v) = \frac{t-1}{t} \frac{t^p}{t^p - 1} H_{t^p}(pv) .$$

Nous allons étudier $G_t(v)$ suivant les valeurs du paramètre t dans $\underset{\sim}{C}_p$.

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> $G_t(v) = \sum_{n \geq 0} A_n^*(t)\, v^n$.

(i) <u>Si</u> $t \in \underset{\sim}{C}_p - B(1\ ,\ 1^-)$, <u>alors pour tout</u> $\varepsilon > 0$,

$$G_t \in H_0(\,\mathcal{V}_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}_p^*))\quad \underline{\text{et}}\quad \|G_t\|_{\mathcal{V}_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}_p^*)} \leq 1/\varepsilon .$$

(ii) <u>Si</u> $1 \geq \rho = p^{-\alpha/(p-1)} > p^{-1/(p-1)}$, <u>soit</u> $h = [-(\log(\alpha)/\log(p))]$ <u>et</u> $h'' \in \underset{\sim}{R}_+$, <u>défini par</u> $h < h'' = h - (\alpha p^{h+1} - p)/(p-1) \leq h + 1$. <u>Alors</u>, <u>si</u> $h < h' < h'' \leq h + 1$ <u>et si</u> $t \in \underset{\sim}{C}_p - B(1\ ,\ \rho^+)$,

$$G_t \in H_0(\mathcal{V}_{p^{-h'}}(\underset{\sim}{Z}_p^*))\quad \underline{\text{et}}\quad \|G_t\|_{\mathcal{V}_{p^{-h'}}(\underset{\sim}{Z}_p^*)} \leq \frac{(ep)^{h+2}}{h'' - h'} .$$

(iii) <u>Soit</u> Γ_p <u>le groupe des racines</u> <u>p-ièmes de l'unité</u>. <u>Soit</u>

$$p^{-1/(p-1)} > \rho = p^{-\alpha/(p-1)} > 0 .$$

<u>Si</u> $t \in \underset{\sim}{C}_p - \bigcup_{\xi \in \Gamma_p} B(\xi\ ,\ \rho^+)$, <u>alors</u> G_t <u>est une fonction analytique bornée sur</u> $B(0\ ,\ r^-)$, <u>pour</u> $r = \rho p^{1/(p-1)}$, <u>et</u>

$$\|G_t\|_{B(0,r^-)} \leq \frac{ep}{\alpha - 1}\, p^{\alpha/(p-1)} .$$

Démonstration. - Le théorème découlera des formules suivantes. Si $p > 2$,

(1) $$G_t(v) = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{n\geqslant 0} \frac{t^{p-i}}{(t^p - 1)^{n+1}} \begin{bmatrix} & n & \\ i\ , & p\ , & v \end{bmatrix} ,$$

(2) $$G_t(v) = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{n\geqslant 0} \frac{t^{p-i}}{(t^p - 1)^{n+1}} \frac{n!\ p^n\ v^n}{(1-iv)(1-(i+p)v)\dots(1-(i+np)v)} ,$$

(3) $$G_t(v) = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{n\geqslant 0} \frac{t^{p-i}}{(t^p - 1)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}(1 - (i + pk)v)^{-1} ,$$

et si $p = 2$, on utilisera aussi la formule

(4) $$G_t(v) = \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{t^3}{(t^4 - 1)^{n+1}} \begin{bmatrix} & n & \\ 1\ , & q\ , & v \end{bmatrix} + \frac{t}{(t^4 - 1)^{n+1}} \begin{bmatrix} & n & \\ 3\ , & q\ , & v \end{bmatrix}\right) .$$

Le lemme suivant est fondamental pour les évaluations de norme.

LEMME 5. - Soit $\varepsilon \in \underset{\sim}{R}_+$, soit $h \in \underset{\sim}{N}$ tel que $p^{-h} > \varepsilon \geqslant p^{-(h+1)}$, et soit $h' = -\log(\varepsilon)/\log(p)$. Posons

$$r(\varepsilon\ ,\ n) = \sum_{i\geqslant 0} \left[\frac{n}{p^{h+i}}\right] - (h' - h)\left[\frac{n + 1}{p^h}\right] \quad \text{et} \quad r(n) = \sum_{i\geqslant 0} \left[\frac{n}{p^{i+1}}\right] .$$

Alors

$$\left\|\begin{bmatrix} & n & \\ i\ , & p\ , & v \end{bmatrix}\right\|_{\mathfrak{V}_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}_p^*)} \leqslant p^h\ p^{-r(\varepsilon,n)} .$$

Démonstration. - Posons

$$s(\varepsilon\ ,\ n) = \sum_{i=1}^{h-1} \left[\frac{n + 1}{p^i}\right] + (h' - h)\left[\frac{n + 1}{p^h}\right] .$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant p - 1$ et pour $v \in \mathfrak{V}_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}_p^*)$, $|v| \leqslant 1$, on a

$$|(1-iv)(1-(i+p)v)\dots(1-(i+np)v)| \geqslant |(1-iv)\dots(1-(i+p(p^h-1))v)|^{1+[(n+1)/p^h]} ,$$
$$\geqslant p^{-n-1-s(\varepsilon,n)} .$$

Or $|n!| = p^{-r(n)}$ et $0 \leqslant [(n + 1)/p^i] - [n/p^i] \leqslant 1$, donc

$$- r(n) + s(\varepsilon\ ,\ n) \leqslant h - 1 + (h' - h)\left[\frac{n + 1}{p^h}\right] - \sum_{i\geqslant 0} \left[\frac{n}{p^{h+i}}\right] .$$

Si $|v| > 1$, alors $|(1 - iv)\dots(1 -(i + np)v)| = |v^{n+1}|$. D'où le résultat

$$\left\|\begin{bmatrix} & n & \\ i\ , & p\ , & v \end{bmatrix}\right\|_{\mathfrak{V}_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}_p^*)} \leqslant p^{h-r(\varepsilon,n)} .$$

Q. E. D.

Nous sommes en mesure de démontrer le théorème.

(i) Si $t \in \underset{\sim}{C}_p - B(1\ ,\ 1^-)$, alors pour $1 \leqslant i \leqslant p - 1$, $|t^{p-i}/(t^p - 1)^{n+1}|=1$ donc, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|\frac{t^{p-i}}{(t^p - 1)^{n+1}} \begin{bmatrix} & n & \\ i\ , & p\ , & v \end{bmatrix}\right\|_{\mathfrak{V}_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}_p^*)} = 0 .$$

Par conséquent, si $t \in \underset{\sim}{C}_p - B(1\ ,\ 1^-)$ et si $\varepsilon \in \underset{\sim}{R}_+$, $G_t \in H_0(\mathfrak{V}_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}_p^*))$. L'inégalité $\|G_t\|_{\mathfrak{V}_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}_p^*)} \leqslant 1/\varepsilon$ est triviale sur la formule 3 (Pour une autre démonstration, Cf. [8]).

(ii) Si $t \in \underset{\sim}{C}_p - B(1\ ,\ \rho^+)$ avec $1 \geqslant \rho = p^{-\alpha/(p-1)} > p^{-1/(p-1)}$, on a

$$\left\| \frac{t^{p-i}}{(t^p - 1)^{n+1}} \begin{bmatrix} & n & \\ i\ , & p\ , & v \end{bmatrix} \right\|_{\gamma_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}_p^*)} \leqslant (\rho)^{-p(n+1)}\ p^{h-r(\varepsilon,n)} \quad \text{pour} \quad \varepsilon > 0\ .$$

Si $t \in \underset{\sim}{C}_p - B(1\ ,\ \rho^+)$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{t^{p-i}}{(t^p - 1)^{n+1}} \begin{bmatrix} & n & \\ i\ , & p\ , & v \end{bmatrix}$ converge si, et seulement si,

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{(\rho)^{-p(n+1)}\ p^{h-r(\varepsilon,n)}} < 1 \quad (\text{Cf. } [3]),$$

c'est-à-dire si

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \begin{bmatrix} & n & \\ i\ , & p\ , & v \end{bmatrix} \frac{t^{p-i}}{(t^p - 1)^{n+1}} \right\|_{\gamma_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}_p^*)} = 0\ ,$$

c'est-à-dire, avec les notations du lemme 5, si

$$p^{(p\alpha/(p-1))-(1/p^h)(p/(p-1))+(h'-h)/p^h} < 1$$

ou encore si

$$\frac{\alpha p^{h+1} - p}{(p - 1)p^h} + \frac{(h' - h)(p - 1)}{p^h(p - 1)} < 0\ .$$

Pour réaliser cette dernière condition, il suffit que $\alpha p^{h+1} - p < 0$, donc que $h = -\log(\alpha)/\log(p)$ et que $h' < (p - \alpha p^{h+1})/(p - 1) + h = h''$. Par conséquent, $G_t \in H_0(\gamma_{p^{-h'}}(\underset{\sim}{Z}_p^*))$ avec $h' < h''$, et h'' comme ci-dessus. Nous allons évaluer maintenant

$$\|G_t\|_{\gamma_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}_p^*)}\ ,\ \text{où}\quad p^{-h} > \varepsilon > p^{-h''}\ ,\quad t \in \underset{\sim}{C}_p - B(1\ ,\ \rho^+)$$

et

$$1 > \rho = p^{-\alpha/(p-1)} > p^{-1/(p-1)}\ ,$$

h et h'' comme ci-dessus. On a, sous ces hypothèses, d'après l'inégalité ultramétrique,

$$\|G_t\|_{\gamma_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}_p^*)} \leqslant \sup_{n\geqslant 0}\ (\rho)^{-n-1}\ p^{h-r(\varepsilon,n)}\ .$$

Compte tenu de l'expression de $r(\varepsilon\ ,\ n)$ et ρ , on est ramené à trouver un majorant de

$$\sup_{n\geqslant 0}\Big((n+1)\ \frac{p\alpha}{p-1} + h - \sum_{i\geqslant 0} \left[\frac{n}{p^{h+i}}\right] + (h'-h)\left[\frac{n+1}{p^h}\right]\Big)$$

$$\leqslant \sup_{n\geqslant 0}\Big((n+1)\ \frac{p\alpha}{p-1} + h - \frac{np^{-h+1}}{p-1} + \frac{\log(n)}{\log(p)} + (h'-h)\ \frac{n+1}{p^h}\Big)$$

$$\leqslant \sup_{n\geqslant 0}\Big(np^{-h}(h'-h'') + \frac{\log(n)}{\log(p)} + h + \frac{p\alpha}{p-1} + (h'-h)p^{-h}\Big)\ ,$$

pour la dernière inégalité, on a utilisé la définition de h'' .

Un petit calcul de variation de fonction montre que le maximum de

$$x \longrightarrow xp^{-h}\ (h' - h'') + \frac{\log(x)}{\log(p)} + h + \frac{p\alpha}{p - 1} + p^{-h}\ (h' - h)\ ,\quad x \in \underset{\sim}{R}_+\ ,$$

est atteint pour $x = p^h/(h'' - h')\log(p)$, et vaut

$$-\frac{1}{\log(p)} - \log(h'' - h') + h(\log(p) + 1) - \log\log(p) + \frac{p\alpha}{p - 1} + p^{-h}\ (h' - h)\ .$$

Donc

$$\|G_t\|_{\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbb{Z}_p^*)} \leqslant \frac{(ep)^{h+2}}{h'' - h'} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = p^{-h'} .$$

La partie (ii) du théorème est démontrée.

(iii) Si $t \in \mathbb{C}_p - \cup_{\xi \in \Gamma_p} B(\xi , \rho^+)$ avec $p^{-1/(p-1)} \geqslant \rho = p^{-\alpha/(p-1)} > 0$. On sait [3] que, pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n \begin{bmatrix} n \\ i , p , v \end{bmatrix}$ converge dans le disque de centre 0 et de rayon $\inf(1 , 1/\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n| \, p^{-n} \, |n!|})$. Compte tenu de l'hypothèse faite sur t, on a ici

$$|a_n| = \left|\frac{t^{p-i}}{(t^p - 1)^{n+1}}\right| \leqslant \left(\frac{p}{\rho}\right)^{n+1} ,$$

donc $v \longrightarrow G_t(v)$ converge pour $v \in B(0 , r^-)$ avec $r = \rho p^{1/(p-1)} = p^{(1-\alpha)/(p-1)}$

Donc $G_t(v)$ est une fonction analytique sur $B(0 , r^-)$. En outre, d'après l'inégalité ultramétrique,

$$\|G_t\|_{B(0,r^-)} \leqslant \sup_{t\in \mathbb{C}_p - \cup_{\xi\in\Gamma_p} B(\xi,\rho^+)} \sup_{n\geqslant 0} \left|\frac{t^{p-i}}{(t^p - 1)^{n+1}} \, p^n \, n! \right| r^n$$

$$\leqslant \sup_{n\geqslant 0} p^{\,n+1+\frac{(n+1)\alpha}{p-1} - n - \frac{n}{p-1} + \frac{\log(n)}{\log(p)}} \leqslant pe \, \frac{p^{\alpha/(p-1)}}{\alpha - 1} .$$

La troisième partie du théorème est démontrée.

Q. E. D.

Nous allons utiliser ce théorème pour obtenir des congruences entre les $A_n^*(t)$, via le théorème de Mittag-Leffler p-adique et les inégalités de Cauchy ([1], [11] et [12]).

PROPOSITION 1. - <u>Si</u> $t \in \mathbb{C}_p - B(1 , 1^-)$, <u>alors</u> $n \longrightarrow A_n^*(t)$ <u>est, pour</u> $n \equiv i \mod(p-1)$, $p > 2$ (<u>resp.</u> $n \equiv i \mod(2)$), <u>la restriction d'une fonction de l'algèbre d'Iwasawa sur</u> $\bigoplus_{i=1}^{p-1} t^{p-i}/t^p - 1 \ \mathbb{Z}_p[1/t^p - 1]$.

(Pour la définition de l'algèbre d'Iwasawa, Cf. [13].)

<u>Démonstration</u>. - D'après le théorème 1, si $t \in \mathbb{C}_p - B(1 , 1^-)$, $G_t \in H_0(\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbb{Z}_p^*))$ pour $1 > \varepsilon > 0$. D'après le théorème de Mittag-Leffler p-adique,

$$H_0(\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbb{Z}_p^*)) = \bigoplus_{i=1}^{p-1} H_0(\mathcal{V}_\varepsilon(i + p\mathbb{Z}_p)) , \quad p > 2$$

(resp. $H_0(\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbb{Z}_2)) = H_0(\mathcal{V}_\varepsilon(1 + 4\mathbb{Z}_2)) \oplus H_0(\mathcal{V}_\varepsilon(3 + 4\mathbb{Z}_2))$), algébriquement et topologiquement. On en déduit que l'on peut écrire, de manière unique,

$$G_t(v) = \sum_{i=1}^{p-1} G_{t,i}(v) , \text{ où } G_{t,i} \in H_0(\mathcal{V}_\varepsilon(i + p\mathbb{Z}_p))$$

et

$$\sup_{1\leqslant i\leqslant p-1} \|G_{t,i}\|_{\mathcal{V}_\varepsilon(i+p\mathbb{Z}_p)} = \|G_t\|_{\mathcal{V}_\varepsilon(\mathbb{Z}_p^*)} \leqslant 1/\varepsilon .$$

La conclusion de la proposition est immédiate d'après [8] ou [3].

Q. E. D

On déduit de là, en utilisant une caractérisation de l'algèbre d'Iwasawa due à J.-P. SERRE [13], le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. - Pour $0 \leqslant i \leqslant p-1$ et pour $t \in \underset{\sim}{C}_p - B(1\,,\,1^-)$, on a en posant $\delta_{i,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} A^*_{i+k(p-1)}(t)$ et $\sum_{j=1}^{n} c_{j,n} Y^j = Y(Y-1)\dots(Y-n+1)$, $n \geqslant 1$,

1° $|\delta_{i,n}| \leqslant p^{-n}$,

2° $|\sum_{j=1}^{n} c_{j,n}\, \delta_{i,j}\, p^{-j}| \leqslant |n!|$.

Nous allons maintenant utiliser la deuxième partie du théorème.

PROPOSITION 2. - Si $t \in \underset{\sim}{C}_p - B(1\,,\,\rho^+)$ avec $1 \geqslant \rho = p^{-\alpha/(p-1)} > p^{-1/(p-1)}$, alors $n \longrightarrow A^*_{i+n(p-1)}(t)$ est la restriction d'une fonction localement analytique sur $\underset{\sim}{Z}_p$ (i. e. c'est une fonction continue sur $\underset{\sim}{Z}_p$ qui est germe d'une fonction analytique en chaque point de $\underset{\sim}{Z}_p$).

Démonstration. - D'après le théorème de Mittag-Leffler p-adique, on a, pour $\varepsilon = p^{-h'} > p^{-h''}$ et $\varepsilon > p^{-1}$ (h'' comme au théorème 1 (ii)),

$$H_0(\gamma_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}^*_p)) = \bigoplus_{i=1}^{p-1} H_0(\gamma_\varepsilon(\xi_i + p\underset{\sim}{Z}_p))$$

algébriquement et topologiquement (ξ_i est une racine $(p-1)$-ième de l'unité). On a donc, de manière unique,

$$G_t(v) = \sum_{i=1}^{p-1} G_{t,i}(v) \quad \text{où} \quad G_{t,i} \in H_0(\gamma_\varepsilon(\xi_i + p\underset{\sim}{Z}^*_p))$$

et

$$\sup_{1\leqslant i\leqslant p-1} \|G_{t,i}\|_{\gamma_\varepsilon(\xi_i+p\underset{\sim}{Z}_p)} = \|G_t\|_{\gamma_\varepsilon(\underset{\sim}{Z}^*_p)} .$$

On a donc

$$G_{t,i}(v) = \sum_{n\geqslant 1} \lambda_n(t\,,\,i) \frac{v^{n-1}}{(1-\xi_i^{-1} v)^n} , \text{ avec } |\lambda_n(t\,,\,i)| p^{h'n} \leqslant \frac{(pe)^{h+2}}{h''-h'} .$$

Par conséquent, $A^*_k(t) = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{n\geqslant 1} \lambda_n(t\,,\,i)\, \xi_i^{-k} \binom{k}{n}$. Donc, d'après le corollaire 3 du théorème 3 de [2], la suite $k \longrightarrow A^*_{j+k(p-1)}(t)$ est la restriction d'une fonction localement analytique sur $\underset{\sim}{Z}_p$.

Q. E. D.

Le même théorème de [2] nous permettrait de calculer le rayon d'analyticité locale de $k \longrightarrow A^*_{j+k(p-1)}(t)$, mais les formules sont lourdes.

COROLLAIRE 2. - Si $t \in \underset{\sim}{C}_p - B(1\,,\,\rho^+)$,

$$1 \geqslant \rho = p^{-\alpha/(p-1)} > p^{-1/(p-1)} ,$$

et si $0 < h' < 1$ et $h' < h''$ (h'' comme au théorème 1 (ii)), on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} A^*_{j+k(p-1)}(t)\right| \leqslant p^{-h'n} \frac{(pe)^{h+2}}{h''-h'} .$$

Démonstration. - Un calcul élémentaire sur les coefficients binomiaux montre que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{j+k(p-1)}{m} = 0$$

si $m < n$ et que

$$\left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{j + k(p-1)}{m}\right| \leqslant 1 .$$

Donc

$$\left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} A^*_{j+k(p-1)}(t)\right| \leqslant \sup_{1\leqslant i\leqslant p-1} |\lambda_n(t , i)| .$$

Q. E. D.

On aurait pu utiliser le théorème 3 de [2] pour démontrer ce corollaire.

En fait, pour la proposition 2 et son corollaire, on n'a utilisé qu'une partie des résultats contenus dans le théorème 1 (ii), mais les énoncés deviennent lourds si on essaye de les utiliser tous.

PROPOSITION 3. - Si $t \in \mathbb{C}_p - \bigcup_{\xi\in\Gamma_p} B(\xi , \rho^+)$, où $0 < \rho = p^{-\alpha/(p-1)} < p^{-1/(p-1)}$, si $r = p^{1/(p-1)} \rho$, on a

$$|A^*_n(t)| r^n \leqslant ep \frac{p^{\alpha/(p-1)}}{\alpha - 1} .$$

Démonstration. - On applique les inégalités de Cauchy à $G_t(v)$ sur $B(0 , r^-)$.

Q. E. D.

PROPOSITION 4. - Si $t \in \mathbb{C}_p - B(1 , (p^{-1/(p-1)})^+)$, il existe $M(t) \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$|A^*_n(t) - A^*_{n+(p-1)p^{h-1}}(t)| \leqslant M(t)\, p^{-h} .$$

Démonstration. - L'application $k \longrightarrow A^*_{j+k(p-1)}(t)$ est la restriction à $\mathbb{N}$ d'une fonction localement analytique sur $\mathbb{Z}_p$ si t vérifie la condition de la proposition. Elle est donc lipschitzienne d'après [4].

Q. E. D.

La constante $M(t)$ est calculable d'après [4]. En particulier, si $t \in \mathbb{C}_p - B(1,1^-)$, on a $M(t) = 1$ d'après la proposition 1 et la définition de l'algèbre d'Iwasawa. La proposition 4 donne alors une propriété de congruences entre fractions rationnelles formelles. On note, si $P(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i t^i$, $\|P\|_1 = \sup_i |a_i|$ et si $R(t) = \frac{P(t)}{Q(t)} \in \mathbb{C}_p(t)$, on pose $\|R\|_1 = \|P\|_1/\|Q\|_1$, c'est la norme de Gauss sur $\mathbb{C}_p(t)$. D'après les inégalités de Cauchy, et si $Q(t)$ n'a pas de racines dans $B(0 , 1^-)$, on a

$$\|R\|_1 = \sup_{t\in B(0,1^-)} \left|\frac{P(t)}{Q(t)}\right| .$$

La proposition 4 a alors pour corollaire le résultat suivant.

COROLLAIRE 3. - Dans $\mathbb{C}_p(t)$, muni de la norme de Gauss, on a les inégalités suivantes :

$$\|A^*_n(t) - A^*_{n+(p-1)p^{h-1}}(t)\|_1 \leqslant p^{-h}$$

et

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} A^*_{i+k(p-1)}(t)\right\|_1 \leqslant p^{-n} .$$

Démonstration. - Les polynômes $t - 1$ et $t^p - 1$ n'ont pas de racines dans

$B(0\ ,\ 1^-)$, et en outre, $B(0\ ,\ 1^-) \subset \underset{\sim}{C}_p - B(1\ ,\ 1^-)$.

Q. E. D.

On peut obtenir d'autres congruences dans $\underset{\sim}{C}_p(t)$ muni de la norme de Gauss en utilisant d'autres boules que $B(0\ ,\ 1^-)$ contenue dans $\underset{\sim}{C}_p - B(1\ ,\ 1^-)$.

Conclusion. - A l'aide de considération d'analyse p-adique, on a pu étudier la suite $n \longrightarrow A_n^*(t)$ modulo p^h suivant les valeurs de $t \in \underset{\sim}{C}_p$. Mais en fait, le théorème 1 est plus riche que la réunion des propositions 1, 2, 3, 4 et corollaires, et c'est à partir de lui que l'on peut obtenir les meilleures informations sur la suite $n \longrightarrow A_n^*(t)$ modulo p^h (pour compléter le théorème, il faudrait étudier le comportement de $G_t(v)$ pour $|t - 1| = p^{-1/(p-1)}$).

On peut aussi présenter les calculs et les résultats donnés dans cet exposé en terme de transformation de Cauchy p-adique des distributions, en généralisant les résultats sur la transformation de Cauchy des mesures donnés dans [8].

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Nombres p-adiques. - Paris, Presses Universitaires de France, 1975 (Collection SUP, "Le Mathématicien", 14).

[2] AMICE (Y.). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1964).

[3] BARSKY (D.). - Algèbre d'Iwasawa, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 4e année, 1976/77, n° 2, 10 p.

[4] BARSKY (D.). - Fonctions k-lipschitziennes sur un anneau local et polynômes à valeurs entières, Bull. Soc. math. France, t. 101, 1973, p. 397-411.

[5] BARSKY (D.). - Analyse p-adique et nombres de Bell, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 282, 1976, Série A, p. 1257-1259.

[6] BARSKY (D.). - Analyse p-adique et nombres de Bernoulli, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 283, 1976, Série A, p. 1069-1072.

[7] BARSKY (D.). - Analyse p-adique et nombres de Bernoulli-Hurwitz, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 284, 1977, Série A, p. 137-140.

[8] BARSKY (D.). - Transformation de Cauchy et Algèbre d'Iwasawa (à paraître).

[9] FLIESS (M.). - Matrices de Hankel, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 53, 1974, p. 198-222.

[10] FOATA (D.) et SCHUTZENBERGER (M.). - Théorie géométrique des polynômes eulériens. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 138).

[11] KRASNER (M.). - Rapport sur le prolongement analytique dans les corps valués complets par la méthode des éléments analytiques quasi connexes, "Table ronde d'Analyse non archimédienne [1972. Paris]", Bull. Soc. math. France, Mémoires n° 39-40, 1974, p. 131-254.

[12] ROBBA (P.). - Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets, Astérisque n° 10, 1973, p. 109-218.

[13] SERRE (J.-P.). - Fonctions zéta p-adiques, "Modular functions of one variable [1972. Antwerp]", p. 192-268. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 350).

(Texte reçu le 27 juillet 1977)

Daniel BARSKY
Mathématiques
Université Paris-7, Tour 45-55
2 place Jussieu
75221 PARIS CEDEX 05