Groupe de travail d’analyse ultramétrique

Daniel Bertrand

Lemmes de Schwarz et lemmes d’approximations dans les domaines ultramétriques

Groupe de travail d’analyse ultramétrique, tome 3, nº 2 (1975-1976), exp. nº J8, p. J1-J12

<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1975-1976__3_2_A7_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
3e année, 1975/76, n° J8, 12 p.

Journées d'analyse ultramétrique
[1976. Marseille-Luminy]

LEMMES DE SCHWARZ ET LEMMES D'APPROXIMATIONS DANS LES DOMAINES ULTRAMÉTRIQUES

par Daniel BERTRAND

1. Motivations.

A l'instar de leurs analogues archimédiens, la plupart des démonstrations de transcendance p-adiques conduisent à considérer la valeur absolue d'un nombre algébrique non nul. Dans les deux cas, une formule du produit sur les corps de nombres permet d'en obtenir une minoration. La majoration de cette valeur absolue repose sur des considérations analytiques. Le nombre étudié est valeur d'une fonction analytique que l'on sait être nulle (resp. petite) en de nombreux points. On invoque alors un lemme de Schwarz (resp. un lemme d'approximation) pour obtenir la majoration désirée.

Rappelons ce qu'exprime ce type de lemmes, en précisant quelques notations.

Soit K un corps valué ultramétrique complet, de caractéristique 0, et de caractéristique résiduelle p. Nous notons $|\ |$ (resp. v) la valeur absolue (resp. la valuation) normalisée de K, et $|K^*|$ le groupe des valeurs du groupe multiplicatif K^*.

Soit $f = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ une série entière à coefficients dans K, telle qu'il existe un nombre réel $R > 0$ vérifiant $\lim_{n\to+\infty} |a_n| R^n = 0$. Alors, f définit une fonction analytique sur le disque circonférencié

$$D(0, R^+) = \{z \in K, \ |z| \leq R\} .$$

Pour tout nombre réel r tel que $0 \leq r \leq R$, posons $|f|_r = \sup_{n\geq 0} |a_n| r^n$. On a

$$(1) \qquad |f|_r \leq |f|_R .$$

Remarque. - Si K est algébriquement clos, ou, plus généralement, si son corps résiduel est infini et si $|K^*|$ est dense dans $\underset{\sim}{R}^+$, alors

$$|f|_r = \sup_{z\in D(0,r^+)} |f(z)| ,$$

et l'inégalité (1) exprime le principe du maximum.

Le but d'un "lemme de Schwarz" (resp. d'un "lemme d'approximation") est d'améliorer l'inégalité (1) sous l'hypothèse que f, ainsi qu'éventuellement ses premières dérivées, prennent des valeurs nulles (resp. petites) en certains points de $D(0, r^+)$. Ces lemmes sont exposés au § 2, 1° et au § 3 de cet article.

Nous abordons également ce type de problèmes pour des fonctions analytiques sur une couronne (§ 2,2°), et pour des fonctions analytiques de plusieurs variables (§ 4). Nous indiquons dans chaque situation comment les résultats obtenus peuvent être appliqués à la théorie des nombres transcendants.

Les démonstrations données ci-dessous reposent, dans la plupart des cas, sur la théorie du polygône de Newton. Ainsi que nous le mentionnons au cours de l'exposé, d'autres méthodes peuvent bien entendu être utilisées.

2. Lemmes de Schwarz.

1° Cas des disques : Nous reprenons les notations introduites au § 1.

PROPOSITION 1 ([5], prop. 3 ; [8], prop. 1). - *Soient* f *une fonction analytique sur le disque* $D(0\ ,\ R^+)$, r_1 *et* r_2 *deux nombres réels tels que*

$$0 \leqslant r_1\ ,\ r_2 \leqslant R\ ,$$

h *le nombre de zéros de* f (*comptés avec leur ordre de multiplicité*) *dans le disque* $D(0\ ,\ r_1^+)$. *Alors, si* $r_1 \leqslant r_2$, *on a*

$$|f|_{r_1} \leqslant (r_1/r_2)^h\ |f|_{r_2}\ .$$

La proposition 1 est l'énoncé du lemme de Schwarz classique. La démonstration, qui en est donnée dans [8], utilise la multiplicativité des normes $f \to |f|_r$ sur l'algèbre des fonctions analytiques sur $D(0\ ,\ R^+)$ (voir [1], § 3.5.1). On notera que cette propriété permettrait aussi de montrer la proposition 2 énoncée ci-dessous.

Démonstration. - Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ le développement de Taylor de f à l'origine. Pour tout nombre réel $\mu \geqslant M = -(\log R)/(\log p)$, notons

$$v(f\ ,\ \mu) = \inf_{n\geq 0}(v(a_n) + n\mu)\ ,$$

de sorte que si $r = p^{-\mu}$, on a $|f|_r = p^{-v(f,\mu)}$. Pour $i = 1\ ,\ 2$, définissons le nombre μ_i par $r_i = p^{-\mu_i}$, et considérons la fonction de Newton de f

$$P(f\ ,\ \xi) = \sup_{\mu\geq M}(v(f\ ,\ \mu) - \mu\xi)\ ,$$

dont le graphe est le polygone de Newton de f . Si $n(f\ ,\ \mu_1)$ (resp. $N(f\ ,\ \mu_1)$) désigne le plus petit (resp. le plus grand) entier tel que

$$v(f\ ,\ \mu_1) = v(a_j) + j\mu_1\ ,$$

on a, pour tout $\xi \in [n(f\ ,\ \mu_1)\ ,\ N(f\ ,\ \mu_1)]$, et tout $\mu \geqslant M$,

$$P(f\ ,\ \xi) = v(f\ ,\ \mu_1) - \mu_1\xi \geqslant v(f\ ,\ \mu) - \mu\xi\ ,$$

l'inégalité exprimant la convexité du polygone de Newton (voir [4], [1]). Ainsi, $v(f\ ,\ \mu_1) \geqslant (\mu_1 - \mu)\xi + v(f\ ,\ \mu)$, soit

(2) $\quad \forall\ \xi \in [n(f\ ,\ \mu_1)\ ,\ N(f\ ,\ \mu_1)]\ ,\ \forall\ r \leqslant R : \ |f|_{r_1} \leqslant (r_1/r)^{\xi}\ |f|_r\ .$

Choisissons $\xi = N(f\,,\mu_1)$. Le nombre h de zéros de f dans le disque $D(0,r_1^+)$ étant inférieur ou égal à $N(f\,,\mu_1)$, on a, pour $r = r_2 \geqslant r_1$,

$$|f|_{r_1} \leqslant (r_1/r_2)^h\, |f|_{r_2} \,.$$

<u>Applications</u>. – La proposition 1 est couramment utilisée dans les démonstrations de transcendance (étude des logarithmes de nombres algébriques, fonctions elliptiques de Weil-Lutz, etc.).

<u>Remarque</u>. – L'inégalité (2) vaut pour toute valeur de $r \leqslant R$. Si $r \leqslant r_1$, on obtient en particulier

$$|f|_{r_1} \leqslant (r_1/r)^{n(f,\mu_1)}\, |f|_r \,.$$

Mais $n(f\,,\mu_1)$ désigne le nombre de zéros de f (comptés avec leurs multiplicités) de module $< r_1$, dans une clôture algébrique de K . Si $D(0\,,r^-)$ désigne le disque non circonférencié $\{z \in K\,,\ |z| < r\}$, on a donc démontré la proposition suivante.

PROPOSITION 2. – <u>On suppose</u> K <u>algébriquement clos, et on reprend les notations de la proposition</u> 1. <u>Soit</u> ℓ <u>le nombre de zéros de</u> f <u>dans</u> $D(0\,,r_1^-)$ (<u>de sorte que</u> $\ell \leqslant h$). <u>Alors, si</u> $r_1 \geqslant r_2$, <u>on a</u>

$$|f|_{r_1} \leqslant (r_1/r_2)^{\ell}\, |f|_{r_2} \,.$$

2° <u>Cas des couronnes</u> : Les notations du § 1 se généralisent à l'étude des fonctions analytiques sur une couronne de K . Si $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n$ désigne une série formelle à coefficients dans K , on note, pour tout nombre réel $r > 0$,

$$|f|_r = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|\, r^n \,.$$

(Si K est algébriquement clos, et si r appartient à $|K^*|$, on a, lorsque ces expressions sont définies $|f|_r = \sup_{|z|=r} |f(z)|$).

Par ailleurs, pour tout nombre réel $x \geqslant 1$, nous désignons par C_x la couronne $\{z \in K\,,\ x^{-1} \leqslant |z| \leqslant x\}$.

PROPOSITION 3 ([2], lemme 2). – <u>Soient</u> $R \geqslant r > 1$ <u>deux nombres réels,</u> f <u>une fonction analytique sur</u> C_R <u>admettant</u> h <u>zéros</u> (<u>comptés avec leurs ordres de multiplicité</u>) <u>dans</u> C_R , <u>et posons</u> $\alpha = (\log r)/(\log R)$. <u>Alors, on a</u>

(i) $|f|_r^2 \leqslant |f|_R^{1+\alpha}\, |f|_{1/R}^{1-\alpha}\, (\frac{r}{R})^{(1-\alpha)h}$

(ii) $|f|_{1/r}^2 \leqslant |f|_R^{1-\alpha}\, |f|_{1/R}^{1+\alpha}\, (\frac{r}{R})^{(1-\alpha)h}$

(iii) <u>pour tout élément</u> ζ <u>de</u> C_R , $|f(\zeta)| \leqslant (\frac{r}{R})^{(1-\alpha)h/2} \sup(|f|_R\,,\ |f|_{1/R})$.

La démonstration de [2] utilise la propriété de multiplicativité des normes

$f \to |f|_x$ sur l'algèbre des fonctions analytiques sur C_R, pour $R^{-1} \leq x \leq R$. Ainsi que me l'a indiqué P. ROBBA, on peut également démontrer la proposition 3 au moyen de la théorie du polygone de valuation.

Démonstration. - Soit $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ la série de Laurent de f à l'origine. Pour tout nombre réel μ tel que $\mho < \mu \leq M = (\log R)/(\log p)$ (prendre garde au changement de signe !), notons

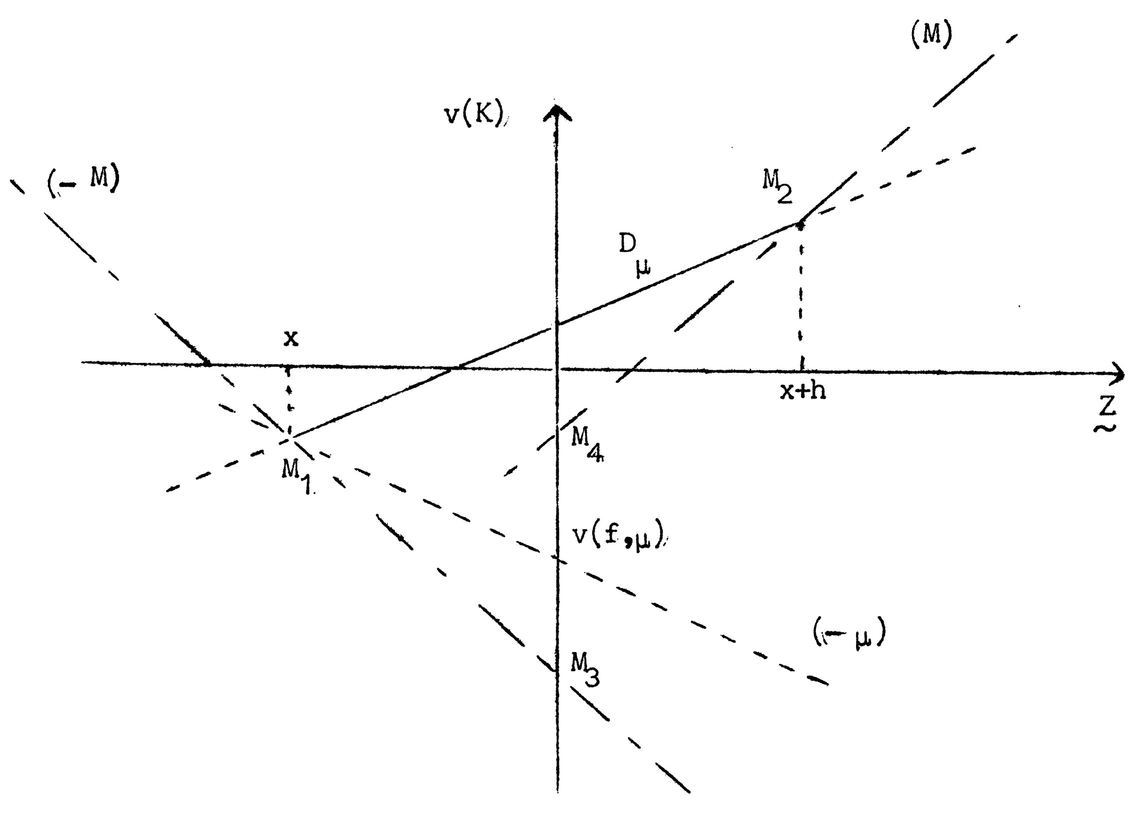
$$v(f , \mu) = \inf_{n \in \mathbb{Z}} \{v(a_n) + n\mu\} ,$$

de sorte que, si $r = p^{\mu}$, on a $|f|_r = p^{-v(f,-\mu)}$. Nous nous proposons tout d'abord de montrer l'inégalité (ii). Nous reprenons la définition

$$n(f , \mu) = \inf_{j \in \mathbb{Z}} \{j ; \ v(a_j) + j\mu = v(f , \mu)\} ,$$

et nous posons $x = n(f , \mu)$.

Soit $y_1 = v(f , \mu) - \mu x$ l'ordonnée du point M_1 d'abscisse x situé sur le polygone de Newton P_f de f. Si f était inversible dans l'algèbre des fonctions analytiques sur $\{z \in K , \ \mu \geq v(z) > -\mu\}$, le polygone P_f aurait un côté sur la droite D_μ de pente μ (qui correspond à r) passant par M_1 (sous l'hypothèse que h est > 0). Donc P_f est situé, dans l'intervalle $[x , x + h]$, sous la droite D_μ (voir [4], [1]). Soit $y_2 = v(f , \mu) + \mu(h - x)$ l'ordonnée du point M_2 d'abscisse $x + h$ sur la droite D_μ. La convexité du polygone de Newton entraîne alors que $v(f , M)$ est inférieur ou égal à l'ordonnée $y_3 = y_1 + Mx$ du point M_3 d'abscisse 0 situé sur la droite de pente $-M$ (correspondant à R^{-1}) passant par M_1. De même, $v(f , -M)$ est inférieur ou égal à l'ordonnée $y_4 = y_2 - M(x + h)$ du point M_4 (voir figure).



Ainsi, on a

$$v(f\ ,\ M) \leq v(f\ ,\ \mu) + (M-\mu)x$$

$$v(f\ ,\ -M) \leq v(f\ ,\ \mu) - (\mu+M)x - (M-\mu)h\ .$$

L'hypothèse $M \geq \mu$ permet d'éliminer x entre ces deux inégalités. On obtient

$$(\mu+M)\ v(f\ ,\ M) + (M-\mu)\ v(f\ ,\ -M) \leq 2Mv(f\ ,\ \mu) - (M-\mu)^2\ h\ ,$$

soit, d'après la définition de $\alpha = (\log r)/(\log R) = m/M$,

$$2v(f\ ,\ \mu) \geq (1+\alpha)\ v(f\ ,\ M) + (1-\alpha)\ v(f\ ,\ -M) + (M-\mu)(1-\alpha)h\ ,$$

$$|f|^2_{1/r} \leq |f|^{1+\alpha}_{1/R}\ |f|^{1-\alpha}_{R}\ (\tfrac{r}{R})^{(1-\alpha)h}\ .$$

C'est l'inégalité (ii) recherchée. L'inégalité (i) s'en déduit au moyen du changement de variable $z \to z^{-1}$. On tire alors l'inégalité (iii) du "principe du maximum" (voir [6], th. 1)

$$|f(\zeta)| \leq \sup(|f|_r\ ,\ |f|_{1/r})\ .$$

Applications. – La proposition 2 s'applique à l'étude de certaines propriétés arithmétiques des fonctions elliptiques de Tate.

3. Lemmes d'approximations.

Le fait qu'une fonction analytique soit petite sur un ensemble Γ de points de son domaine de convergence n'apporte guère d'information si les points de Γ sont très rapprochés. Il faut donc introduire une hypothèse supplémentaire de répartition, ou considérer de façon plus générale, la distance minimale des points de Γ .

Nous n'étudierons ici que les fonctions analytiques sur un disque.

1° Le cas général : Nous reprenons les notations du § 1.

HYPOTHÈSES (H_1) : la fonction f est analytique sur $D(0\ ,\ R^+)$; soient Γ un sous-ensemble de $D(0\ ,\ r^+) \subset D(0\ ,\ R^+)$ de cardinal $h \geq 2$ fini, et k un nombre entier > 0 ; pour tout entier n , on note $f^{(n)}$ la n-ième dérivée de f , et on pose :

$$\varepsilon = \sup\{|f^{(n)}(\gamma)|\ ;\ n = 0\ ,\ \ldots\ ,\ k-1\ ;\ \gamma \in \Gamma\}\ ,$$

$$\delta = \inf\{|\gamma-\gamma'|\ ;\ \gamma \neq \gamma' \in \Gamma\}\ ,$$

enfin, en raison des applications (et pour alléger certains calculs), nous supposerons que δ est inférieur au rayon de convergence de l'exponentielle, de sorte que, pour tout entier $n \geq 0$: $|\delta^n/(n!)| \leq 1$.

Dans ces conditions, J.-P. BÉZIVIN a obtenu le lemme d'approximation suivant, où l'on suppose en outre que $R = 1$, $r = p^{-1}$ et $|f|_1 \leq 1$:

$$|f|_{p^{-1}} \leq \sup\{p^{-hk}\ ,\ \varepsilon p^{-(hk+1)}/\delta^{hk}\}\ .$$

Il utilise pour cela certains polynômes d'interpolation. Une technique similaire est exposée dans [7] et [9]. Nous allons montrer le résultat suivant.

PROPOSITION 4. - <u>Sous les hypothèses</u> (H_1) , <u>on a</u>

$$|f|_r \leqslant \sup\{(\tfrac{r}{R})^{hk}\ |f|_R\ ,\ \varepsilon(\tfrac{r}{\delta})^{hk-1}\}\ .$$

<u>Démonstration.</u> — Soit $\tilde{K}$ le complété de la clôture algébrique de K . Pour tout nombre réel $\rho \geqslant 0$, notons $\tilde{D}(0\ ,\ \rho^+)$ (resp. $\tilde{D}(0\ ,\ \rho^-)$) le disque circonférencié (resp. non circonférencié) de $\tilde{K}$ de rayon ρ . Deux cas peuvent se produire.

<u>1er cas</u> : La fonction f a au moins hk zéros (comptés avec leurs ordres de multiplicité) dans le disque $\tilde{D}(0\ ,\ r^+)$. En vertu de la proposition 1, appliquée à $\tilde{K}$, on a $|f|_r \leqslant (r/R)^{hk}\ |f|_R$.

<u>2ème cas</u> : La fonction f a au plus $hk - 1$ zéros (comptés avec leurs ordres de multiplicité) dans le disque $\tilde{D}(0\ ,\ r^+)$. Puisque les disques $\{\tilde{D}(\gamma\ ,\ \delta^-)\ ;\ \gamma \in \Gamma\}$ sont disjoints, il existe alors un élément γ_0 de Γ tel que f a au plus $k - 1$ zéros dans $\tilde{D}(\gamma_0\ ,\ \delta^-)$. On peut, sans perte de généralité, supposer que $\gamma_0 = 0$ (car $|f(z - \gamma_0)|_r = |f(z)|_r$). Posons $\sigma = -(\log \delta)/(\log p)$, et reprenons les notations du § 1, 1°. En particulier, $n(f\ ,\ \sigma)$ est le nombfe de zéros de f dans le disque $\tilde{D}(0\ ,\ \delta^-)$, et l'on a donc : $n(f\ ,\ \sigma) \leq k - 1$. La définition de $n(f\ ,\ \sigma)$ entraîne alors

$$v(f\ ,\ \sigma) = \inf_{n \leq k-1} \{v(a_n) + n\sigma\}\ ,$$

soit

$$|f|_\delta = \sup_{n \leq k-1} |f^{(n)}(0)/(n!)|\ \delta^n\ ,$$

d'où, en vertu des hypothèses (H_1) :

(3) $$|f|_\delta \leqslant \varepsilon\ .$$

Mais la fonction f a au plus $hk - 1$ zéros dans $\tilde{D}(0\ ,\ r^+)$. On tire donc de la proposition 2 l'inégalité $|f|_r \leq (r/\delta)^{hk-1}\ |f|_\delta$, et la proposition 4 est démontrée.

L'idée de distinguer les deux cas de cette démonstration m'a été suggérée par P. ROBBA, qui a obtenu le résultat suivant :

PROPOSITION 5 (ROBBA). - <u>Sous les hypothèses</u> (H_1), <u>on a, en supposant</u> $R = 1$, <u>et en notant</u> $\beta = (\log \delta)/(\log r) \geqslant 1$:

$$|f|_r \leq \sup\{r^{hk}\ |f|_1\ ,\ \varepsilon^{1/\beta}\ |f|_1^{1-(1/\beta)}\}\ .$$

Pour démontrer la proposition 5, on peut reprendre la démonstration précédente jusqu'à l'inégalité (3) incluse. Le <u>lemme des trois cercles</u> de Hadamard p-adique (convexité du polygone de valuation) fournit alors l'inégalité :

$$\log(R/\delta)\ \log|f|_r \leqslant \log(r/\delta)\ \log|f|_R + \log(R/r)\ \log|f|_\delta \ .$$

D'où, si $\alpha = (\log r)/(\log R)$, et $\beta = (\log \delta)/(\log r)$:

$$|f|_r \leqslant |f|_R^{(1-\beta)/((1/\alpha)-\beta)}\ \varepsilon^{((1/\alpha)-1)/((1/\alpha)-\beta)} \ .$$

C'est l'inégalité qu'exprime la proposition 5 dans le cas où $(1/\alpha) = 0$.

Applications. – La proposition 4 peut être utilisée pour obtenir des résultats d'approximation diophantiennes par les méthodes de la théorie des nombres transcendants (minoration de combinaisons linéaires de logarithmes p-adiques de nombres algébriques, etc.). Du fait de la minoration donnée par la formule du produit (voir § 1), on doit en général imposer que le "terme d'approximation" soit inférieur ou égal au terme donné par le lemme de Schwarz. La proposition 5 donne alors une estimation similaire (on a $r^{hk}\ |f|_1 \leqslant \varepsilon^{1/\beta}\ |f|_1^{1-(1/\beta)}$ si, et seulement si, $r^{hk}\ |f|_1 \leqslant \varepsilon(r/\delta)^{hk}$) .

2° Ensembles très bien répartis : Les propositions 4 et 5 sont en un sens optimales, comme le montre l'exemple de la fonction

$$f(z) = z \ , \text{ avec } R = 1 \ , \quad r = p^{-1} \ , \quad k = 1 \ , \text{ et } \Gamma = \{0 \ , p^2\} \ .$$

De façon plus précise, plaçons-nous dans le cas où tous les éléments de Γ sont équidistants, et supposons que K soit algébriquement clos. Si f a $hk - 1$ zéros dans le disque $D(0\ , R^+)$, tous situés sur le disque $D(0\ , \delta^+)$ (par exemple si $f(z) = \varepsilon((k-1)!)^{-1}\ (x-\gamma_0)^{k-1}\ \prod_{\gamma\in\Gamma,\gamma\neq\gamma_0} (x-\gamma)^k$), on a

$$|f|_r = (r/R)^{hk-1}\ |f|_R = (r/\delta)^{hk-1}\ |f|_\delta \ .$$

Mais, pour tout élément γ de Γ , $|f(z)|_\delta = |f(z-\gamma)|_\delta$, et l'inégalité (3) ne peut être améliorée.

On peut néanmoins préciser les propositions 4 et 5 dans le cas d'ensembles Γ particuliers. Ainsi, si Γ est le sous-ensemble de $D(0\ , p^{-1})$ formé des h premiers éléments de la suite $\{pj\ ;\ j = 0\ , 1\ , \dots\}$, de sorte que

$$\sigma = -\ (\log \delta)/(\log p) < (\log(ph))/(\log p) \ ,$$

on a la proposition suivante.

PROPOSITION 6 ([7], lemme 4). – On reprend les hypothèses (H_1) , avec

$$\Gamma = \{pj\ ;\ j = 0\ , \dots\ , h-1\} \ ,$$

et on suppose en outre que $R = 1$, $|f|_1 \leqslant 1$. Alors, $|f(ph)| \leqslant \sup\{p^{-hk}\ , \varepsilon\delta^{-k}\}$.

Démonstration : Voir [7], [9].

On notera d'une part que l'ensemble Γ considéré à la proposition 6 est très bien réparti, en ce sens que si $h = p^\nu$, il est isomorphe à $(\mathbb{Z}_p/p^\nu\,\mathbb{Z}_p)$. D'autre part, et c'est là une distinction fondamentale, puisque $\mathbb{Q}_p$ est localement compact, c'est $|f(ph)|$, et non pas $|f|_{p-1}$ qui a été étudié ; de façon plus générale, la majoration de la proposition 6 vaut pour

$$\|f\|_{p^{-1},\underset{\sim}{Q}_p} = \sup_{z\in\underset{\sim}{Q}_p,\ |z|\leq p^{-1}} |f(z)|$$

(d'après [9], lemme 8p, et un argument de densité).

Question 1 : Peut-on améliorer l'exposant de r/δ dans la proposition 4, sous l'hypothèse que Γ est très bien réparti ? Supposons dans ce cas que K soit localement compact. Que peut-on alors dire de $|f(z)|$, lorsque z parcout l'idéal maximal de l'anneau des entiers de K (avec $R = 1$) ?

4. Le cas de plusieurs variables.

Soit $f = \sum a_{n_1,\dots,n_d} X_1^{n_1} \dots X_d^{n_d} = \sum a_n X^n$ une série formelle à d variables à coefficients dans K, telle qu'il existe un nombre réel $R > 0$ vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n|\, R^{|n|} = 0\ ,\ \text{où}\ \ |n| = \textstyle\sum_{i=1,\dots,d} n_i\ .$$

Alors, f définit une fonction analytique sur le polydisque

$$B(0\ ,\ R^+) = \{z \in K^d\ ,\ \|z\| \leq R\}\ ,$$

où $\|z\| = \sup_{i=1,\dots,d} |z_i|$ désigne la norme ultramétrique de K^d.

Pour tout nombre réel r tel que $0 \leq r \leq R$, posons $|f|_r = \sup|a_n|\, r^{|n|}$. L'application $f \to |f|_r$ définit ici encore une norme multiplicative sur l'algèbre $\mathfrak{A}(R)$ des fonctions analytiques sur $B(0\ ,\ R^+)$, et l'on a

$$|f|_r \leq |f|_R\ . \tag{4}$$

1° Lemmes de Schwarz : Soit $r < R$, et Γ un sous-ensemble de $B(0\ ,\ r^+)$. Si $d \geq 2$, le diviseur des zéros de f est en général infini. La considération du cardinal de Γ ne suffit donc pas à fournir un lemme de Schwarz, et l'on doit, comme au § 3, introduire des hypothèses ou des paramètres supplémentaires.

Supposons ainsi que Γ est un sous-ensemble de $(\underset{\sim}{Z}_p)^d$, et qu'il existe un nombre entier $\nu \geq 0$ tel que l'application $\Gamma \to (\underset{\sim}{Z}_p/p^\nu \underset{\sim}{Z}_p)^d$ soit bijective (cas très bien réparti ; on notera que Γ n'est pas nécessairement un produit). On obtient alors le résultat suivant (avec $R > r = 1$, $k = 1$) :

PROPOSITION 7 ([8], proposition 2). – Si f s'annule sur Γ, on a

$$|f|_1 \leq (1/R)^{p^\nu}\ |f|_R\ .$$

Démonstration : voir [8].

L'exposant p^ν de $(1/R)$, qui provient de l'hypothèse de bonne répartition, peut également être interprété comme le produit par p de l'inverse de la distance minimale des points de Γ. Dans le cas général, ceci conduit à poser la question suivante, qui précise une remarque de [8].

<u>Question 2</u> : Peut-on obtenir un lemme de Schwarz non trivial, du type

$$|f|_r = (r/R)^{\Sigma}\ |f|_R\ ;$$

tel que l'exposant Σ de (r/R) ne dépende que de

$$h = \operatorname{card}\Gamma\ ,\ \delta = \inf\{\|\gamma - \gamma'\|\}\ ,\ d \text{ et } r\ ?$$

Par ailleurs, la proposition 7 ne tient pas compte des multiplicités, et il serait intéressant de résoudre le problème suivant, également posé par S. LANG :

<u>Question 3</u> : On reprend les hypothèses de la proposition 7, et on suppose en outre que f s'annule sur Γ avec un ordre de multiplicité $\geqslant k$, où k désigne un nombre entier > 0. Peut-on améliorer l'exposant de $(1/R)$ en fonction de k ?

Dans le cas général, désignons par $\mathfrak{a}(x\ ,\Gamma\ ,k)$, pour $r \leq x \leq R$, l'ensemble des fonctions de $\mathfrak{a}(x)$ qui admettent les points de Γ pour zéros de multiplicité $\geqslant k$. Sans préjuger de la réponse aux questions 2 et 3, nous noterons

$$S(r\ ,R\ ,\Gamma\ ,k)$$

le plus petit nombre réel tel que

$$\forall\ \varphi \in \mathfrak{a}(R\ ,\Gamma\ ,k)\ :\ |\varphi|_r \leq S(r\ ,R\ ,\Gamma\ ,k)\ |\varphi|_R\ . \tag{5}$$

(L'ensemble $\mathfrak{a}(x\ ,\Gamma\ ,k)$, muni de la norme $|\ |_x$, est un espace de Banach. D'après l'inégalité (4), la restriction $\pi_{R,r}$ de $\{\mathfrak{a}(R\ ,\Gamma\ ,k)\ ;\ |\ |_R\}$ à $\mathfrak{a}(r\ ,\Gamma\ ,k)\ ;\ |\ |_r)$ est continue, et le nombre $S(r\ ,R\ ,\Gamma\ ,k)$ est en fait la <u>norme</u> de $\pi_{R,r}$).

<u>Applications</u>. - La proposition 7 permet d'étudier certaines propriétés des caractères multiplicatifs du groupe $(\underset{\sim}{Z}_p)^r$. La connaissance du nombre $S(r\ ,R\ ,\Gamma\ ,k)$ pourrait permettre d'obtenir des résultats de transcendance liés à l'exponentielle p-adique sur certaines variétés abéliennes.

<u>Remarque</u>. - Les analogues archimédiens des questions 2 et 3 sont maintenant résolus : le lemme de Schwarz à plusieurs variables complexes, dû à STOLL et BOMBIERI, permet de montrer, au moyen d'une évaluation de la masse moyenne du diviseur des zéros de f, qu'il existe une constante c, ne dépendant que de la dimension d, telle que, si $r < cR$, on a, avec les notations des questions 2 et 3,

$$|f|_r \leq \left(\frac{r}{cR}\right)^{chk(\delta/r)^{2d-2}}\ |f|_R$$

(voir [3], app. 2, lemme 1).

2° <u>Lemmes d'approximations</u> : Nous supposons désormais $S(r\ ,R\ ,\Gamma\ ,k)$ connu dans le cas général, et nous montrons comment, sans hypothèses supplémentaires sur Γ, on peut obtenir un lemme d'approximations à plusieurs variables au moyen des seuls paramètres introduits au § 3.1°.

HYPOTHÈSES (H_d) : <u>On considère un élément</u> f <u>de</u> $\mathfrak{a}(R)$, <u>un sous-ensemble</u> Γ <u>de</u>

$B(0\,,\,r^+) \subset B(0\,,\,R^+)$, de cardinal $h \geqslant 2$ fini, et un nombre entier $k > 0$; pour tout élément n de $\underset{\sim}{N}^d$, on note D^n la dérivation $\partial^{|n|}/\partial^{n_1} z_1 \ldots \partial^{n_d} z_d$, et on pose :

$$\varepsilon = \sup\{|D^n f(\gamma)| \;;\; |n| = 0\,,\,\ldots\,,\,k-1\;;\; \gamma \in \Gamma\}$$

$$\delta = \inf\{\|\gamma - \gamma'\| \;;\; \gamma \neq \gamma' \in \Gamma\} \;;$$

enfin, on suppose ici encore que $\delta \leqslant p^{-1/(p-1)}$.

PROPOSITION 8. - Sous les hypothèses (H_d) , on a, avec $R_1 = \sup(1\,,\,R)$,

$$|f|_r \leqslant \sup\{S(r\,,\,R\,,\,\Gamma\,,\,k)\,|f|_R\,,\,\varepsilon(R_1/\delta)^{(h+1)k-2}\} \,.$$

Démonstration. - Nous nous proposons de construire, en tout point γ de Γ , un polynôme F_γ à d variables, de degré total $\leqslant (h+1)k-2$, vérifiant

$$H(F_\gamma) \leqslant \varepsilon\delta^{-[(h+1)k-2]} \,,$$

où $H(F_\gamma) = |F_\gamma|_1$ désigne le maximum des valeurs absolues des coefficients de F_γ, et tel que, pour toute dérivation d'ordre $|n| < k$, on ait

$$D^n F_\gamma(\gamma) = D^n f(\gamma) \;;\; D^n F_\gamma(\gamma') = 0\,,\; \forall\, \gamma' \in \Gamma\,,\; \gamma' \neq \gamma \,.$$

Considérons alors le polynôme $F = \sum_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$. La fonction $f - F$ s'annule sur Γ avec un ordre de multiplicité $\geqslant k$. On tire donc de la définition (5)

$$|f - F|_r \leqslant S(r\,,\,R\,,\,\Gamma\,,\,k)\,|f - F|_R \,.$$

Mais $|F|_r \leqslant |F|_R$ et $S(r\,,\,R\,,\,\Gamma\,,\,k) \leqslant 1$ (en vertu de l'inégalité (4)). Ainsi

$$|f|_r \leqslant \sup\{S(r\,,\,R\,,\,\Gamma\,,\,k)\,|f|_R,\,|F|_R\} \,.$$

Comme $H(F) \leqslant \sup_\gamma H(F_\gamma)$, et $\deg F \leqslant \sup_\gamma \deg F_\gamma$, on a

$$|F|_R \leqslant \varepsilon\delta^{-[(h+1)k-2]}\, R_1^{(h+1)k-2}$$

et la proposition 8 se déduit des inégalités précédentes.

Il reste à construire les polynômes F_γ . Soit γ_0 un point de Γ . Comme au § 3, on peut supposer, sans perte de généralité, que γ_0 est placé à l'origine, de sorte que si $\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma\,,\; \gamma \neq \gamma_0\}$, on a

$$\delta \leqslant \inf\{\|\gamma\| \;;\; \gamma \in \Gamma_0\} \,,$$

et le développement de Taylor de f à l'origine s'écrit

$$f(z) = \sum a_n z^n \,,\ \text{avec}\ a_n = D^n f(\gamma_0)/(|n|!) \,.$$

Posons $Q(z) = \sum_{|n|<k} a_n z^n$. Les hypothèses (H_d) entraînent $H(Q) \leqslant \varepsilon\delta^{-(k-1)}$.

Pour tout élément γ de Γ_0 , soient γ_{m_γ} l'une des coordonnées de γ telle que $|\gamma_{m_\gamma}| = \|\gamma\|$, et $\mathcal{L}_\gamma$ la projection $K^d \to K$, $\mathcal{L}_\gamma(z) = z_{m_\gamma}$.

(Ainsi, $|\mathcal{E}_\gamma(\gamma)| \geqslant \delta$).

Considérons le polynôme

$$P(z) = \prod_{\gamma\in\Gamma_0} [(\mathcal{E}_\gamma(z-\gamma))/\mathcal{E}_\gamma(\gamma)]^k .$$

On a $H(P) = |P|_1 \leqslant \delta^{-(h-1)k}$.

Soit δ_1 un nombre réel, $0 < \delta_1 < \delta$. Puisque $|\mathcal{E}_\gamma(\gamma)| \geqslant \delta$ pour tout point γ de Γ_0 , la fonction P est inversible dans $\mathfrak{A}(\delta_1)$. Soit $P^{-1}(z) = \sum q_n z^n$ son inverse, et posons

$$R(z) = \sum_{|n|<k} q_n z^n .$$

Par définition, on a $|q_n| \leqslant |P^{-1}|_{\delta_1}/\delta_1^{|n|}$. Mais $|P^{-1}|_{\delta_1} = |P|_{\delta_1}^{-1}$, et

$$|P|_{\delta_1} = 1 \quad (\text{car } |z_{m_\gamma} - \gamma_{m_\gamma}| = |\gamma_{m_\gamma}| \text{ pour } \|z\| = \delta_1 < |\gamma_{m_\gamma}|) .$$

On en déduit

$$H(R) \leqslant 1/\delta_1^{k-1} ,$$

d'où, en faisant tendre δ_1 vers δ : $H(R) \leqslant \delta^{-(k-1)}$.

Considérons alors le polynôme $F_{\gamma_0} = QPR$. Le degré total de F_{γ_0} est inférieur ou égal à $(k-1) + (h-1)k + k - 1 = (h+1)k - 2$, et l'on a

$$H(F_{\gamma_0}) = H(Q)\ H(P)\ H(R) \leqslant \varepsilon\delta^{-[(h+1)k-2]} .$$

Enfin, pour $|n| < k$, on vérifie aisément que l'on a $D^n F_{\gamma_0}(\gamma) = 0$ pour tout point γ de Γ_0 , et, puisque $PR = 1 + \sum_{|m|\geqslant k} c_m z^m$,

$$D^n F_{\gamma_0}(\gamma_0) = D^n f(\gamma_0) .$$

Le polynôme F_{γ_0} satisfait donc aux conditions requises, et la proposition 8 est démontrée.

Applications. - La proposition 8, jointe au calcul $S(r , R , \Gamma , k)$, pourrait fournir des résultats d'approximation diophantiennes p-adiques sur certaines variétés abéliennes.

Question 4 : L'idée sur laquelle repose la démonstration précédente a été initialement exploitée dans le cas archimédien (voir [3], App. 2). La proposition 8 peut-elle être prouvée de façon "plus p-adique", et, en particulier, peut-on en améliorer le résultat dans le cas où Γ est très bien réparti ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Les nombres p-adiques. - Paris, Presses Universitaires de France, 1975 (Collection SUP, "Le mathématicien", 14).

[2] BERTRAND (D.). - Séries d'Eisenstein et transcendance, Bull. Soc. math. France, t. 104, 1976, p. 309-321.

[3] LANG (S.). - Diophantine approximation on abelian varieties with complex multiplication, Adv. in Math., t. 17, 1975, p. 281-336.

[4] LAZARD (M.). - Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet. - Bures-sur-Yvette, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 1962 (Publications mathématiques, 14, p. 47-75).

[5] MAHLER (K.). - Über transzendente P-adische Zahlen, Compositio Math., Groningen, t. 2, 1935, p. 259-275.

[6] MOTZKIN (E.). - Le point de vue complexiforme, "Table ronde d'analyse non archimédienne" [1972. Paris], Bull. Soc. math. France, Mémoire 39-40, p. 279-286.

[7] SCHINZEL (A.). - On two theorems of Gel'fond and some of their applications, Acta Arithm., Warszawa, t. 13, 1967, p. 177-236.

[8] SERRE (J.-P.). - Dépendance d'exponentielles p-adiques, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 7e année, 1965/66, n° 15, 14 p.

[9] VAN DER POORTEN (A.). - Computing the effectively computable bound in Baker's inequality : the p-adic case (à paraître).

(Texte reçu le 15 juillet 1976)

Daniel BERTRAND
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau
91128 PALAISEAU CEDEX