GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

BERTIN DIARRA

Modules de Banach sur l'algèbre des mesures p-adiques d'un groupe compact totalement discontinu

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 3, nº 2 (1975-1976), exp. nº J2, p. J1-J11

<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1975-1976__3_2_A2_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
3e année, 1975/76, n° J2, 11 p.

Journées d'analyse ultramétrique
[1976. Marseille-Luminy]

MODULES DE BANACH SUR L'ALGÈBRE DES MESURES p-ADIQUES D'UN GROUPE COMPACT TOTALEMENT DISCONTINU

par Bertin DIARRA

Introduction.

Dans tout ce qui suit, K désignera un corps valué ultramétrique complet non discret.

Soit G un groupe compact totalement discontinu (c. t. d.). Rappelons qu'une représentation linéaire continue de G sur K est la donnée d'une application U de G dans l'algèbre des opérateurs linéaires bornées $\mathcal{L}(E)$ d'un K-espace de Banach ultramétrique E telle que, $\forall\ s\ ,\ t \in G$, $U_{st} = U_s \circ U_t$ et, $\forall\ x \in E$, l'application $s \to U_s\, x$ de G dans E est continue. On dit aussi que E est un G-module.

L'étude des représentations linéaires continues d'un groupe c. t. d. a été faite par F. ARIBAUD [2] et W. H. SCHIKHOF [7] dans le cas où G possède une mesure de Haar à valeurs dans K. Ces auteurs obtiennent la plupart des résultats de la théorie des représentations unitaires complexes des groupes compacts. Entre autres, lorsque K est à valuation discrète toute représentation linéaire continue de G sur K est semi-simple. La situation n'est plus aussi agréable si G ne possède pas de mesure de Haar à valeurs dans K (par exemple $G = \mathbb{Z}_p$ et $K = \mathbb{Q}_p$). Dans ce cas, on perd la semi-simplicité (pour des exemples illustrant ce fait, voir [3]).

Soit A une K-algèbre de Banach ultramétrique ; un module de Banach sur A est un K-espace de Banach ultramétrique E muni d'une structure de A-module (à gauche) pour laquelle il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^k$, $\alpha \geqslant 1$, tel que

$$\|a \cdot x\| \leqslant \alpha\|a\|\|x\| \ ,\quad \forall\ a \in A\ ,\quad \forall\ x \in E\ .$$

Considérons l'espace de Banach $\mathcal{C}(G\ ,\ K)$ des fonctions continues de G dans K. L'algèbre des mesures de G à valeurs dans K est le dual $\mathcal{C}(G\ ,\ K)'$ de $\mathcal{C}(G\ ,\ K)$ (espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{C}(G\ ,\ K)$) muni du produit de convolution des mesures. Nous allons montrer que les représentations linéaires continues du groupe c. t. d. G sur K sont (à équivalence près) en correspondance bijective avec une sous-famille des modules de Banach sur $\mathcal{C}(G\ ,\ K)'$ (à isomorphisme près). On établira au 1° que les représentations linéaires continues de G sur K (à équivalence près) sont en correspondance bijective avec les comodules complets sur l'algèbre de Hopf complète $\mathcal{C}(G\ ,\ K)$ (à isomorphisme près).

Nous ferons quelques remarques sur les limites inductives et projectives d'espaces de Banach ultramétriques.

Soit $\mathscr{N}$ la famille des sous-groupes ouverts distingués du groupe c. t. d. G , alors

$$\mathcal{C}(G\ ,\ K)' = \varprojlim_{n}\ K[G/H]\ ,$$

où H parcourt $\mathscr{N}$; $K[G/H]$ étant l'algèbre du groupe fini G/H .

Tous les espaces de Banach considérés seront ultramétriques ; on omettra donc ce terme.

1. Algèbres de Hopf complètes et comodules complets.

Soit $E \hat{\otimes} F$ le produit tensoriel topologique de deux K-espaces de Banach E et F ; si E et F sont des algèbres de Banach, on considère sur $E \hat{\otimes} F$ la structure d'algèbre de Banach telle que

$$\forall\ x\ ,\ x' \in E\ ,\ \forall\ y\ ,\ y' \in E\ ,\ (x \otimes y)(x' \otimes y') = xx' \otimes yy'\ .$$

On identifiera $K \hat{\otimes} E$ et $E \hat{\otimes} K$ à E .

Soit $\mathscr{H}$ une K-algèbre de Banach ; la multiplication m de $\mathscr{H}$ prolongée en une application de $\mathscr{H} \hat{\otimes} \mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}$ sera encore notée m . On suppose ici que $\mathscr{H}$ est commutative unitaire et que l'ensemble $X(\mathscr{H}) = \mathrm{Hom\ alg}(\mathscr{H}\ ,\ K)$ des caractères de $\mathscr{H}$ est non vide ; tout élément de $X(\mathscr{H})$ est continu.

DÉFINITION. - <u>On dit qu'une algèbre de Banach commutative, unitaire,</u> $\mathscr{H}$ <u>sur</u> K <u>est une algèbre de Hopf complète si</u> :

(i) <u>il existe un homomorphisme continu d'algèbres de Banach</u> c <u>de</u> $\mathscr{H}$ <u>dans le produit tensoriel topologique</u> $\mathscr{H} \hat{\otimes} \mathscr{H}$ <u>tel que</u> $(c \hat{\otimes} 1_{\mathscr{H}}) \circ c = (1_{\mathscr{H}} \hat{\otimes} c) \circ c$;

(ii) $X(\mathscr{H})$ <u>est non vide, et il existe</u> $\sigma \in X(\mathscr{H})$ <u>tel que</u>

$$(1_{\mathscr{H}} \hat{\otimes} \sigma) \circ c = 1_{\mathscr{H}} \quad \underline{\text{et}} \quad (\sigma \hat{\otimes} 1_{\mathscr{H}}) \circ c = 1_{\mathscr{H}}\ ;$$

(iii) <u>il existe un endomorphisme continu</u> η <u>de l'algèbre de Banach</u> $\mathscr{H}$ <u>tel que</u> $m \circ (1_{\mathscr{H}} \hat{\otimes} \eta) \circ c = m \circ (\eta \hat{\otimes} 1_{\mathscr{H}}) \circ c = k \circ \sigma$, <u>où</u> k <u>est l'application canonique de</u> K <u>dans</u> $\mathscr{H}$.

<u>L'application</u> c (<u>resp.</u> σ , <u>resp.</u> η) <u>est appelée coproduit</u> (<u>resp. co-unité, resp. inversion ou antipode</u>) <u>de</u> $\mathscr{H}$.

<u>Remarque</u>. Si $\mathscr{H}$ est une algèbre de Hopf complète, l'ensemble des caractères $X(\mathscr{H})$, muni du produit $u * v = (u \hat{\otimes} v) \circ c$ et de la topologie de la convergence simple, est un groupe topologique totalement discontinu. L'unité de ce groupe est σ , et l'inverse de $u \in X(\mathscr{H})$ est $u \circ \eta$.

DÉFINITION. - <u>Soit</u> $\mathscr{H}$ <u>une algèbre de Hopf complète. On dit qu'un</u> K-<u>espace de Banach</u> E <u>est un</u> $\mathscr{H}$-<u>comodule</u> (<u>à gauche</u>) <u>complet s'il existe une application</u> K-<u>li</u>-

<u>néaire continue</u> Δ <u>de</u> E <u>dans</u> $\mathcal{H} \hat{\otimes} E$, <u>appelée coproduit</u>, <u>telle que</u>

(i) $(c \hat{\otimes} 1_E) \circ \Delta = (1_{\mathcal{H}} \hat{\otimes} \Delta) \circ \Delta$,

(ii) $(\sigma \hat{\otimes} 1_E) \circ \Delta = 1_E$.

Soit G un groupe c. t. d. Considérons sur l'ensemble $\mathcal{C}(G , K)$ des fonctions continues de G dans K la structure usuelle d'algèbre de Banach commutative unitaire. On fait de $\mathcal{C}(G , K)$ une algèbre de Hopf complète si l'on considère comme coproduit $c = \pi^{-1} \circ \rho$, où π est l'isomorphisme d'algèbres de Banach de

$$\mathcal{C}(G , K) \hat{\otimes} \mathcal{C}(G , K)$$

sur $\mathcal{C}(G \times G , K)$, défini par $\pi(f \otimes g)(s , t) = f(s) g(t)$, et ρ l'homomorphisme d'algèbres de Banach de $\mathcal{C}(G , K)$ dans $\mathcal{C}(G \times G , K)$ tel que $\rho(f)(s , t) = f(st)$ où $s , t \in G$; la co-unité étant le caractère σ défini par $\sigma(f) = f(e)$ où e est l'unité de G , et l'inversion l'endomorphisme η de $\mathcal{C}(G , K)$ défini par $\eta(f)(s) = f(s^{-1})$.

On sait que

$$X(\mathcal{C}(G , K)) = \{\varepsilon_s ; \mathcal{C}(G , K) \to K , \varepsilon_s(f) = f(s)\} .$$

Il est clair que $\varepsilon_s * \varepsilon_t = (\varepsilon_s \hat{\otimes} \varepsilon_t) \circ c = \varepsilon_{st}$. Ainsi on a le résultat suivant.

LEMME. - <u>Les groupes topologiques</u> G <u>et</u> $X(\mathcal{C}(G , K))$ <u>sont isomorphes</u>.

Soient γ et δ les représentations linéaires de G dans $\mathcal{C}(G , K)$ définies par les opérateurs de translations $\gamma_s f(t) = f(s^{-1} t)$ et $\delta_s f(t) = f(ts)$; si V est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(G , K)$ stable par γ (resp. δ ; resp. γ et δ), on a $c(V) \subseteq \mathcal{C}(G , K) \hat{\otimes} V$ (resp. $c(V) \subseteq V \hat{\otimes} \mathcal{C}(G , K)$; reps. $c(V) \subseteq V \hat{\otimes} V$).

Soit $H \in \mathcal{W}$; le sous-espace $\mathcal{C}(G , K)^H$ de $\mathcal{C}(G , K)$ formé des éléments invariants par $\gamma|_H$ est de dimension finie $n_H = [G : H]$ (l'indice du sous-groupe H). Si $f \in \mathcal{C}(G , K)^H$, on a aussi $\delta_s f = f$, $\forall s \in H$, et $\mathcal{C}(G , K)^H$ est une algèbre de Hopf complète. Le sous-espace $\mathcal{R}^*(G) = \cup_{H \in \mathcal{W}} \mathcal{C}(G , K)^H$ est dense dans $\mathcal{C}(G , K)$.

Soit E un K-espace de Banach ; on notera par π_E l'isomorphisme de

$$\mathcal{C}(G ; K) \hat{\otimes} E$$

sur $\mathcal{C}(G , E)$ défini par

$$\pi_E(f \otimes x)(s) = f(s)x \quad (f \in \mathcal{C}(G , K) , \ x \in E \text{ et } s \in G) .$$

Soit U une représentation linéaire continue de G dans E ; puisque G est compact $\alpha = \sup_{s \in G} \|U_s\| < +\infty$. On associe à la représentation U l'application K-linéaire continue d_U de E dans $\mathcal{C}(G , E)$ telle que

$$d_U(x)(s) = U_s x \quad (x \in E , \ s \in G) ;$$

on a $\|d_U\| \leqslant \alpha$.

THÉORÈME 1. - Soit G un groupe c. t. d.

(i) Soit Δ le co-produit d'une structure de $\mathcal{C}(G, K)$-module complet sur l'espace de Banach E ; posons, pour tout $s \in G$

$$U_s^{\Delta} = (\varepsilon_s \hat{\otimes} 1_E) \circ \Delta .$$

On définit ainsi une représentation linéaire continue U^{Δ} de G dans E.

(ii) Soit U une représentation linéaire continue de G dans E. Posons

$$\Delta_U = \pi_E^{-1} \circ d_U ;$$

alors Δ_U est le coproduit d'une structure sur E de $\mathcal{C}(G, K)$-comodule complet. De plus, $\Delta = \Delta_{U^{\Delta}}$ et $U = U^{\Delta_U}$.

(i) Il est clair que, $\forall\, s \in G$, $U_s^{\Delta} = (\varepsilon_s \hat{\otimes} 1_E) \circ \Delta \in \mathcal{L}(E)$. On a $\varepsilon_e = \sigma$, donc $U_e^{\Delta} = (\sigma \hat{\otimes} 1_E) \circ \Delta = 1_E$. D'autre part, on voit que

$$[(\varepsilon_s \hat{\otimes} 1_E) \circ \Delta] \hat{\otimes} \varepsilon_t = (\varepsilon_s \hat{\otimes} 1_E) \circ \Delta \circ (\varepsilon_t \hat{\otimes} 1_E) ,$$

puisque $(c \hat{\otimes} 1_E) \circ \Delta = (1 \hat{\otimes} \Delta) \circ \Delta$ (1 = identité de $\mathcal{C}(G, K)$), on a

$$U_{st}^{\Delta} = U_s^{\Delta} \circ U_t^{\Delta} , \quad \forall\, s , t \in G .$$

Soit $H \in \mathscr{H}$; si $\tau_H = (s_i)_{1 \leq i \leq n_H}$ est un système de représentants des classes modulo H, la famille $(\chi_{s_iH})_{1 \leq i \leq n_H}$ des fonctions caractéristiques des classes s_{iH}, $1 \leq i \leq n_H$, est une base de $\mathcal{C}(G, K)^H$. Puisque $\mathcal{R}^*(G)$ est dense dans $\mathcal{C}(G, K)$, $\mathcal{R}^*(G) \otimes E$ est dense dans $\mathcal{C}(G, K) \hat{\otimes} E$. Considérons $x \in E$; pour tout $\varepsilon \in \underset{\sim}{R}_+^k$, il existe $H_\varepsilon^x \in \mathscr{H}$ tel que $\|\Delta x - \sum_{i=1}^{nH_\varepsilon} \chi_{siH_\varepsilon} \otimes x_i\| < \varepsilon$ avec $x_i \in E$. Posons

$$T_s = \varepsilon_s \hat{\otimes} 1_E , \quad \forall\, s \in G ;$$

on a $\|T_s\| \leq 1$, donc

$$\|(T_s - T_e)(\Delta x - \sum_{i=1}^{nH_\varepsilon^x} \chi_{siH_\varepsilon^x} \otimes x_i)\| < \varepsilon ;$$

mais, $\forall\, s \in H_\varepsilon^x$, on a

$$(T_s - T_e)(\sum_{i=1}^{nH_\varepsilon^x} \chi_{siH_\varepsilon^x} \otimes x_i) = 0 ,$$

donc

$$\|U_s^{\Delta} x - U_e^{\Delta} x\| = \|(T_s - T_e)(\Delta x)\| < \varepsilon , \quad \forall\, s \in H_\varepsilon^x .$$

L'application $s \to U_s^{\Delta} x$ de G dans E est donc continue ($\mathscr{H}$ est un système fondamental de voisinages de e).

(ii) Remarquons tout d'abord que $\pi_E(\mathcal{C}(G, K)^H \hat{\otimes} E) = \mathcal{C}(G, E)^H$ (sous-espace des éléments f de $\mathcal{C}(G, E)$ tels que $f(s^{-1}t) = f(t)$, $\forall\, s \in H$, $\forall\, t \in G$), et que $\bigcup_{H \in \mathscr{H}} \mathcal{C}(G, E)^H$ est dense dans $\mathcal{C}(G, E)$. Soit $\mathcal{SR}(G/H)$ la famille des systèmes de représentants des classes modulo H ; si $f \in \mathcal{C}(G, E)$ et

$$I_H = (s_i)_{1 \leq i \leq n_H} \in \mathcal{SR}(G/H) ,$$

posons

$$f^{I_H} = \sum_{i=1}^{n_H} \chi_{s_i H} f(s_i) ,$$

alors $f^{I_H} \in \mathcal{C}(G, E)^H$. Puisque G est compact, f est uniformément continu et, si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $H_\varepsilon \in \mathcal{H}$ tel que

$$\| f - f^{I_{H_\varepsilon}} \| < \varepsilon , \quad \forall\, I_{H_\varepsilon} \in \mathcal{SR}(G/H_\varepsilon) .$$

Considérons $x \in E$ et $d_U^{I_H}(x) = \sum_{s=1}^{n_H} \chi_{s_i H} U_{s_i}(x)$; si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $H_\varepsilon^x \in \mathcal{H}$

tel que

$$\| d_U(x) - d_U^{I_{H_\varepsilon^x}}(x) \| < \varepsilon , \quad \forall\, I_{H_\varepsilon^x} \in \mathcal{SR}(G/H_\varepsilon^x) .$$

Posons

$$\Delta_U^{I_H}(x) = \pi_E^{-1} \circ d_U^{I_H}(x) = \sum_{i=1}^{n_H} \chi_{s_i H} \otimes U_{s_i}(x) ;$$

la famille $(\Delta_U^{I_H}(x))$, $H \in \mathcal{H}$, $I_H \in \mathcal{SR}(G/H)$ est une base de filtre de Cauchy telle que

$$(1) \qquad \Delta_U(x) = \lim_{H \in \mathcal{H}} \Delta_U^{I_H}(x) = \lim_{H \in \mathcal{H}} \sum_{i=1}^{n_H} \chi_{s_i H} \otimes U_{s_i}(x) .$$

On voit alors que

$$\lim_{H \in \mathcal{H}} (1 \hat{\otimes} \Delta_U^{I_H}) \circ \Delta_U^{I_H}(x) = \lim_{H \in \mathcal{H}} (c \hat{\otimes} 1_E) \circ \Delta_U^{I_H}(x) ;$$

donc $(1 \hat{\otimes} \Delta) \circ \Delta = (c \hat{\otimes} 1_E) \circ \Delta$.

De la même manièrre, on a

$$(\varepsilon_e \hat{\otimes} 1_E) \circ \Delta(x) = \lim_{H \in \mathcal{H}} \sum_{i=1}^{n_H} \chi_{s_i H}(e)\, U_{s_i}(x) = x$$

c'est-à-dire $(\sigma \hat{\otimes} 1_E) \circ \Delta = 1_E$.

La vérification de $\Delta = \Delta_{U^\Delta}$ se fait par des raisonnements analogues à ceux qui précèdent. Soient $x \in E$, $s \in G$; on voit que

$$U_s^{\Delta_U}(x) = (\varepsilon_s \hat{\otimes} 1_E) \circ \Delta^U(x) = (\varepsilon_s \hat{\otimes} 1_E) \circ \pi_E^{-1} \circ d_U(x) = U_s(x) ;$$

donc $U^{\Delta_U} = U$.

<u>Remarque</u>. – On définit de façon évidente la notion de morphisme de comodules complets. Le théorème établit bien une correspondance bijective (à équivalence et isomorphisme près) entre représentations linéaires continues de G et structures de $\mathcal{C}(G, K)$-comodules complets.

2. Remarques sur les limites inductives et projectives complètes d'espaces de Banach (ultramétriques).

DÉFINITION (cf. [4]).

(i) Soit (E_i , u_{ji}) un système inductif d'espaces de Banach tel que

$$\|u_{ji}\| \leq 1 , \forall i , j , i \leq j ;$$

la limite inductive complète de ce système, notée $\underset{\overrightarrow{n}}{\lim} E_i$ est le séparé complété de $\underset{\rightarrow}{\lim} {}^s E_i$ (la limite inductive algébrique) muni de la semi-norme

$$\|x\| = \inf_{x=\sum_i u_i(x_i)} \max \|x_i\|$$

où u_i est l'application canonique de E_i dans $\underset{\rightarrow}{\lim} {}^s E_i$.

(ii) Soit (F_i , v_{ij}) un système projectif d'espaces de Banach tel que

$$\|v_{ij}\| \leq 1 , \forall i , j , i \leq j ;$$

la limite projective complète de ce système est

$$\underset{\overleftarrow{n}}{\lim} F_i = \{y \in \bar{\prod} F_i ; \quad v_{ij}(y_j) = y_i\}$$

où $\bar{\prod} F_i = \{y = (y_i) ; \sup \|y_i\| < +\infty\}$.

Soit E un espace de Banach ; on pose

$$E_0 = \{x \in E ; \|x\| \leq 1\} \quad \text{et} \quad E_1 = \{x \in E ; \|x\| < 1\} .$$

Si (F_i , v_{ij}) est un système projectif d'espaces de Banach tel que

$$\|v_{ij}\| \leq 1 , \forall i , j , i \leq j ,$$

alors (F_{i0} , v_{ij}) [resp. (F_{i1} , v_{ij})] est un système projectif de modules sur l'anneau des entiers Λ de K. Il est clair que la limite projective algébrique $\underset{\leftarrow}{\lim} F_{i0}$ (resp. $\underset{\leftarrow}{\lim} F_{i1}$) est une partie de $\underset{\overleftarrow{n}}{\lim} F_i$.

LEMME. - Soit $F = \underset{\overleftarrow{n}}{\lim} F_i$; alors $F_0 = \underset{\leftarrow}{\lim} F_{i0}$ et $F_1 \subseteq \underset{\leftarrow}{\lim} F_{i1}$.

Le dual E' (espace des formes linéaires continues) d'un espace normé E muni de la norme

$$\|x'\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|\langle x' , x\rangle|}{\|x\|}$$

est un espace de Banach. Soit u un homomorphisme continu de l'espace normé E dans l'espace normé F ; la transposée ${}^t u$ de u est un homomorphisme continu de F' dans E' tel que $\|{}^t u\| \leq \|u\|$. Si (E_i , u_{ji}) est un système inductif d'espaces de Banach tel que $\|u_{ji}\| \leq 1$, $\forall i , j , i \leq j$, alors $(E_i' , {}^t u_{ji})$ est un système projectif d'espaces de Banach tel que $\|{}^t u_{ji}\| \leq 1$, $\forall i , j , i \leq j$. On supposera que l'ensemble des indices est filtrant à droite.

PROPOSITION 1. - Soit (E_i , u_{ji}) un système inductif d'espaces de Banach tel

<u>que</u> $\|u_{ji}\| \leq 1$, $\forall\ i, j$, $i \leq j$.

<u>Posons</u> $E = \varinjlim_n E_i$; <u>on a</u>

$$E' = (\varinjlim_n E_i)' = \varprojlim_n E'_i .$$

Soit I l'ensemble des indices du système inductif et $\oplus_{i\in I} E_i$ la somme directe algébrique des E_i ; $\varinjlim {}^s E_i = \oplus_{i\in I} E_{i/S}$ où S est le sous-espace de $\oplus_{i\in I} E_i$ engendré par $\{x_i - u_{ji}(x_i)\ ;\ i \in I\ ,\ i \leq j\ ,\ x_i \in E_i\}$. La semi-norme de $\varinjlim {}^s E_i$ est la semi-norme quotient par S de la norme de $\oplus_{i\in I} E_i$ définie par $\|X\| = \max\|x_i\|$, où $X = \sum x_i \in \oplus_{i\in I} E_i$. Il vient que

$$E' = (\varinjlim_n E_i)' = (\oplus_{i\in I} E_{i/S})' \simeq \{\varphi \in (\oplus_{i\in I} E_i)'\ ;\ \langle \varphi , S\rangle = 0\} .$$

On sait que $(\oplus_{i\in I} E_i)'$ et $\overline{\prod}_{i\in I} E'_i$ sont isométriquement isomorphes. Soit Φ_1 l'application linéaire continue de E' dans $\overline{\prod}_{i\in I} E'_i$, définie par

$$\Phi_1(x') = (x' \circ u_i)_{i\in I}$$

(u_i est l'application canonique de E_i dans E), alors $\Phi_1(E') \subseteq \varprojlim_n E'_i$. Réciproquement si $\chi = (x'_i)_{i\in I} \in \varprojlim_n E'_i$, alors $\chi \in \overline{\prod}_{i\in I} E'_i = (\oplus_{i\in I} E_i)'$; comme

$$x'_i = {}^t u_{ji}(x'_j) = x'_j \circ u_{ji} ,$$

on a $\langle \chi , u_i - u_{ji}(x_i)\rangle = 0$, $\forall\ i \in I$, $\forall\ x_i \in E_i$; donc $\langle \chi , S\rangle = 0$; il correspond à χ un élément x' de E' tel que $\chi = \Phi_1(x')$, ainsi

$$\Phi_1(E') = \varprojlim_n E'_i .$$

<u>Remarque</u>. - Considérons sur $E' = \varprojlim_n E'_i$ la topologie θ_p induite par la topologie produit ; E_s étant l'image canonique de $\varinjlim {}^s E_i$ dans $E = \varinjlim_n E_i$, soient $\sigma(E' , E_s)$ et $\sigma(E' , E)$ les topologies faibles sur E' associées aux dualités $\langle E' , E_s\rangle$ et $\langle E' , E\rangle$.

Alors $\sigma(E' , E_s) \subsetneq \sigma(E' , E)$ et $\sigma(E' , E_s) \subseteq \theta_p$.

Soient X et Y deux espaces topologiques compacts totalement discontinus, et θ une application continue de X dans Y ; l'application $\tilde\theta$ de $\mathcal{C}(Y , K)$ dans $\mathcal{C}(X , K)$, définie par $\tilde\theta(g) = g \circ \theta$ est un homomorphisme continu d'algèbres de Banach tel que $\|\tilde\theta\| \leq 1$ ($\tilde\theta$ est isométrique si θ est surjectif).

Considérons un système projectif (X_i , θ_{ij}) d'espaces compacts totalement discontinus pour lequel l'ensemble des indices I est préordonné <u>filtrant à droite</u> ; $X = \varprojlim X_i$ est un espace compact totalement discontinu. On note par θ_i l'application canonique de X dans X_i . Il est clair que $(\mathcal{C}(X_i , K) , \tilde\theta_{ij})$ est un système inductif d'algèbres de Banach commutatives unitaires.

PROPOSITION 2. - <u>Soit</u> (X_i , θ_{ij}) <u>un système projectif d'espaces c. t. d. ;</u> <u>l'ensemble des indices</u> I <u>étant préordonné filtrant à droite</u>.

Soit $X = \varprojlim X_i$. Alors X est non vide ; on a

$$\mathcal{C}(X , K) = \varinjlim_n \mathcal{C}(X_i , K) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}(X , K)' = \varprojlim_n \mathcal{C}(X_i , K)' .$$

On sait que si I est filtrant à droite, $X = \varprojlim X_i$ est non vide. Soit

$$B = \bigcup_{i \in I} \check{\theta}_i(\mathcal{C}(X_i , K)) ;$$

B est une sous-algèbre unitaire de $\mathcal{C}(X , K)$. Si x et y sont deux points distincts de X , il existe $j \in I$ tel que les composantes x_j et y_j de x et y dans X_j sont distinctes ; il existe aussi un voisinage ouvert fermé V_j de x_j dans l'espace c. t. d. X_j tel que $y_j \notin V_j$. La fonction $f = \chi_{V_j} \circ \theta_j$ (χ_{V_j} étant la fonction caractéristique de V_j) appartient à B avec $f(x) = 1$ et $f(y) = 0$; donc B sépare les points de X et est dense dans $\mathcal{C}(X , K)$ (théorème de Weierstrass, cf. [5]). On en déduit que l'application linéaire continue $\check{\theta}$ de $\varinjlim_n \mathcal{C}(X_i , K)$ dans $\mathcal{C}(X , K)$, définie par les $\check{\theta}_i$, est surjective. On se ramène au cas où les θ_i sont surjectives pour voir que $\check{\theta}$ est injective.

Le reste découle de la proposition 1.

3. L'algèbre des mesures d'un groupe c. t. d.

Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf complète de coproduit c ; on définit sur le dual $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{H}$ une structure d'algèbre de Banach en posant $f' * g' = {}^t c(f' \otimes g')$, où $f' , g' \in \mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}'$ est identifé à une partie de $(\mathcal{H} \hat{\otimes} \mathcal{H})'$. Si G est un groupe c. t. d. , considérons sur le dual $\mathcal{C}(G , K)'$ de l'algèbre de Hopf complète $\mathcal{C}(G , K)$ le produit $\mu * \nu = {}^t c(\mu \otimes \nu)$, où μ et $\nu \in \mathcal{C}(G , K)'$; ce produit coïncide avec le produit de convolution usuelle :

$\forall f \in \mathcal{C}(G , K)$,

$$\langle \mu * \nu , f \rangle = \langle \mu \otimes \nu , c(f) \rangle = \langle \mu , \langle \nu , \gamma_{s^{-1}} f \rangle \rangle = \langle \nu , \langle \mu , \delta * f \rangle \rangle .$$

Soit θ un homomorphisme continu du groupe c. t. d. G dans le groupe c. t. d. G_1 , $\check{\theta}$ est un homomorphisme d'algèbres de Hopf complètes de $\mathcal{C}(G_1 , K)$ dans $\mathcal{C}(G , K)$ (c'est-à-dire $c \circ \check{\theta} = (\check{\theta} \hat{\otimes} \check{\theta}) \circ c_1$) et ${}^t\check{\theta}$ est un homomorphisme d'algèbres de Banach de $\mathcal{C}(G , K)'$ dans $\mathcal{C}(G_1 , K)'$. Considérons un système projectif de groupes c. t. d., $(\mathcal{C}(G_i , K) , \check{\theta}_{ij})$ est un système inductif d'algèbres de Hopf complètes. On sait (cf. [4]) que le produit tensoriel topologique commute aux limites inductives complètes ; donc $\varinjlim_n \mathcal{C}(G_i , K)$ est une algèbre de Hopf complète, et on peut énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 3. - Soit (G_i , θ_{ij}) un système projectif de groupes c. t. d. (l'ensemble des indices I étant filtrant à droite). Alors on a

$$\mathcal{C}(G , K) = \varinjlim_n \mathcal{C}(G_i , K) \quad \text{(égalité d'algèbres de Hopf complètes)}$$

et

$$\mathcal{C}(G , K)' = \varprojlim_n \mathcal{C}(G_i , K)' \quad \text{(égalité d'algèbres de Banach)} .$$

Remarque. – $\mathcal{C}(G\,,\,K)'_0 = \varprojlim \mathcal{C}(G_i\,,\,K)'_0$ et $\mathcal{C}(G\,,\,K)'_1 = \varprojlim \mathcal{C}(G_i\,,\,K)'_1$.

Remarque. – Supposons K sphériquement complet.

Il y a une correspondance bijective décroissante entre idéaux à gauche (resp. à droite, resp. bilatères) $\sigma(\mathcal{C}(G\,,\,K)'\,,\,\mathcal{C}(G\,,\,K))$-fermés de $\mathcal{C}(G\,,\,K)'$ et sous-espaces fermés de $\mathcal{C}(G\,,\,K)$ stables par γ (resp. δ, resp. γ et δ).

La famille $\mathfrak{N}$ des sous-groupes ouverts distingués du groupe c. t. d. G ordonnée par l'ordre opposé à l'inclusion est filtrante à droite. On sait que

$$G = \varprojlim_{H\in\mathfrak{N}} G/H\,.$$

Considérons pour $H \in \mathfrak{N}$ l'application canonique θ_H de G sur G/H alors $\tilde{\theta}_H$ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf de $\mathcal{C}(G/H\,,\,K)$ sur $\mathcal{C}(G\,,\,K)^H$; donc

$$[\mathcal{C}(G\,,\,K)^H]' = \mathcal{C}(G/H\,,\,K)' = K[G/H]\,,$$

où $K[G/H]$ est l'algèbre du groupe fini G/H munie de la norme

$$\|\sum a_{\bar{s}}\,\bar{s}\| = \max|a_{\bar{s}}|\,,\quad \bar{s}\in G/H \text{ et } a_{\bar{s}}\in K\,.$$

COROLLAIRE. – <u>Soit</u> G <u>un groupe c. t. d.</u> ; <u>lorsque</u> H <u>parcourt la famille</u> $\mathfrak{N}$ <u>des sous-groupes ouverts distingués de</u> G, <u>on a</u>

$$\mathcal{C}(G\,,\,K) = \varinjlim_{n} \mathcal{C}(G/H\,,\,K)$$

<u>et</u>

$$\mathcal{C}(G\,,\,K)' = \varprojlim_{n} \mathcal{C}(G/H\,,\,K)' = \varprojlim_{n} K[G/H]\,.$$

Remarques.

(i) Soit Λ l'anneau des entiers du corps K, et $\mathfrak{M}$ son idéal maximal ; on a

$$\mathcal{C}(G\,,\,K)'_0 = \varprojlim \Lambda[G/H]$$

et

$$\mathcal{C}(G\,,\,K)'_1 = \varprojlim \mathfrak{M}[G/H]$$

(ii) La topologie $\mathcal{T}_p$ sur $\mathcal{C}(G\,,\,K)'$, induite par la topologie produit des espaces normés $\mathcal{C}(G/H\,,\,K)'$, est définie par la famille de semi-normes

$$\|\mu\|_H = \max_{1\leq i\leq n_H}|\langle\mu\,,\,\chi_{s_i H}\rangle|\,,\quad H\in\mathfrak{N}\,.$$

De plus, $\mathcal{T}_p = \sigma(\mathcal{C}(G\,,\,K)'\,,\,\mathcal{R}^*(G))$; les topologies induites sur $\mathcal{C}(G\,,\,K)'_0$ par $\mathcal{T}_p$ et $\sigma(\mathcal{C}(G\,,\,K)'\,,\,\mathcal{C}(G\,,\,K))$ sont égales.

Comme exemple d'illustration, si $G = \mathbb{Z}_p$ et $K = \mathbb{Q}_p$,

$$\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p\,,\,\mathbb{Q}_p)'_0 = \varprojlim \mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p] = \mathbb{Z}_p[[X]]$$

l'anneau des séries formelles sur $\underset{\sim}{Z}_p$, donc

$$\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{Q}_p)' = \underset{\sim}{Q}_p^{(b)}[[X]]$$

l'algèbre des séries formelles à coefficients bornés (cf. [1] et [6]).

4. Modules de Banach sur $\mathcal{C}(G , K)'$.

Soit E un espace de Banach sur K qui est un $\mathcal{C}(G , K)'$-module tel que

$$\|\mu \cdot x\| \leqslant \alpha\|\mu\|\|x\| , \quad \mu \in \mathcal{C}(G , K)' , \quad x \in E \quad (\alpha \geqslant 1) .$$

Si l'on pose, pour tout $s \in G$, $V_s(x) = \varepsilon_s \cdot x$, alors

$$V_s \in \mathcal{L}(E) , \quad V_e = 1_E \quad \text{et} \quad V_{st} = V_s \circ V_t , \quad \forall\, s , t \in G .$$

Considérons une représentation linéaire continue de G dans E et le soufflet $\langle\ \rangle$ comme forme linéaire continue de $\mathcal{C}(G , K)' \hat{\otimes} \mathcal{C}(G , K)$ sur K. Posons :

$$\mu \cdot_U x = (\langle\ \rangle \hat{\otimes} 1_E) \circ (1 \hat{\otimes} \Delta_U)(\mu \otimes x) = (\langle\ \rangle \hat{\otimes} 1_E)(\mu \otimes \Delta_U(x)) .$$

On définit ainsi sur E une structure de $\mathcal{C}(G , K)'$-module telle que

$$\|\mu \cdot_U x\| \leqslant \alpha\|\mu\|\|x\| , \quad \text{où} \quad \alpha = \sup_{s\in G}\|U_s\| .$$

Nota Bene.

(i) On a aussi $\mu \cdot_U x = (\mu \hat{\otimes} 1_E) \circ \Delta_U(x)$.

(ii) $\mu \cdot_U x = \lim_{H\in\mathfrak{H}} \sum_{i=1}^{n_H} \langle \mu , \chi_{s_i H} \rangle U_{s_i}(x)$.

THÉORÈME 2. – *Il y a une correspondance bijective entre représentations linéaires continues de G dans E et structures de $\mathcal{C}(G , K)'$-module de Banach sur E telles que, pour tout $x \in E$, l'application Λ-linéaire $\mu \to \mu \cdot x$ de $\mathcal{C}(G , K)'_0$ dans E est continue lorsque $\mathcal{C}(G , K)'_0$ est muni de la topologie induite par* $\mathcal{T}_p = \sigma(\mathcal{C}(G , K)' , \mathcal{R}^*(G))$.

En effet, soit U une représentation continue de G dans E ; on a vu que, pour $x \in E$,

$$\Delta_U(x) = \lim_{H\in\mathfrak{H}} \sum_{i=0}^{n_H} \chi_{s_i H} \otimes U_{s_i}(x) ;$$

si $\varepsilon \in \underset{\sim}{R}_+^*$, il existe $H_\varepsilon \in \mathfrak{H}$ tel que

$$\|\Delta_U(x) - \sum_{i=0}^{n_{H_\varepsilon}} \chi_{s_i H_\varepsilon} \otimes U_{s_i}(x)\| < \varepsilon .$$

On en déduit, pour tout $\mu \in \mathcal{C}(G , K)'$,

$$\|\mu \cdot_U x - \sum_{i=0}^{n_{H_\varepsilon}} \langle \mu , \chi_{s_i H_\varepsilon} \rangle U_{s_i}(x)\| < \varepsilon\|\mu\| ,$$

donc, pour tout $\mu \in \mathcal{C}(G , K)'_0$,

$$\|\mu \cdot_U x - \sum_{i=0}^{n_{H_\varepsilon}} \langle \mu , \chi_{s_i H_\varepsilon} \rangle U_{s_i}(x)\| < \varepsilon .$$

si $\mu \in \mathcal{C}(G, K)'_0$ est tel que

$$\|\mu\|_{H_\varepsilon} = \max_{1 \leq i \leq n_{H_\varepsilon}} |\langle \mu , \chi_{s_i H_\varepsilon} \rangle| < \varepsilon/\alpha\|x\| ,$$

on a

$$\|\mu \cdot_U x\| \leq \max(\varepsilon , \alpha\|x\|\|\mu\|_{H_\varepsilon}) < \varepsilon .$$

Réciproquement, si la structure de $\mathcal{C}(G, K)'$-module de Banach sur E vérifie l'hypothèse du théorème ; puisque $G \simeq X(\mathcal{C}(G, K)) \subseteq \mathcal{C}(G, K)'_0$, la représentation linéaire de G dans E, définie par $V_s(x) = \varepsilon_s \cdot x$, est continue. On voit que

$$\mu \cdot_U x = \lim_{H \in \aleph} \sum_{i=1}^{n_H} \langle \mu , \chi_{s_i H} \rangle \varepsilon_{s_i} \cdot x = \mu \cdot x .$$

<u>Remarque</u>. - Si K est local (resp. sphériquement complet), alors $\mathcal{C}(G, K)'_0$, muni de la topologie $\mathcal{T}_p$, est compact (resp. c-compact) et, pour tout $x \in E$, $\mathcal{C}(G, K)'_0 \cdot_U x$ est un convexe compact (resp. c-compact) de E.

RÉFÉRENCES

[1] AMICE (Y.). - Mesures p-adiques, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, 6e année, 1964/65, n° 16, 6 p.

[2] ARIBAUD (F.). - Représentations linéaires p-adiques des groupes compacts totalement discontinus, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 12e année, 1969/70, n° 16, 24 p.

[3] DIARRA (B.). - Exemples de représentations linéaires p-adiques du groupe compact $\underset{\sim}{Z}_p$, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, t. 276, 1973, p. 97-100.

[4] GRUSON (L.). - Théorie de Fredholm p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 94, 1966, p. 67-95.

[5] KAPLANSKY (I.). - The Weierstrass theorem for non-archimedean valued fields, Proc. Amer. math. Soc., t. 1, 1950, p. 356-357.

[6] PUT (M. Van der). - Difference equations over p-adic fields, Math. Annalen, t. 189, 1972, p. 189-203.

[7] SCHIKOFF (W. H.). - Non-archimedean representations of compact groups, Compositio Math., Groningen, t. 23, 1971, p. 215-232.

(Texte reçu le 1er juillet 1976)

Bertin DIARRA
11 avenue de Russie
03700 BELLERIVE SUR ALLIER