GROUPE DE TRAVAIL
D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

JEAN FRESNEL
BERNARD DE MATHAN

Transformation de Fourier p-adique et produit tensoriel de corps valués

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 3, nº 2 (1975-1976), exp. nº J1, p. J1-J6
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1975-1976__3_2_A1_0>

Groupe d'étude d'analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
3e année, 1975/76, n° J1, 6 p.

Journées d'analyse ultramétrique
[1976. Marseille-Luminy]

TRANSFORMATION DE FOURIER p-ADIQUE ET PRODUIT TENSORIEL DE CORPS VALUÉS

par Jean FRESNEL et Bernard de MATHAN

Soient $\underset{\sim}{C}_p$ un complété d'une clôture algébrique du corps p-adique $\underset{\sim}{Q}_p$, L une extension algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$, et $\hat{L}$ sa fermeture (topologique) dans $\underset{\sim}{C}_p$. Soient Γ_n le groupe des racines p^n-ième de l'unité, et $\Gamma = \bigcup_{n\geq 1} \Gamma_n$. La limite inductive des algèbres de groupe $L[\Gamma_n]$ est l'algèbre du groupe Γ . Nous nous intéressons ici à la limite inductive topologique des $\hat{L}[\Gamma_n]$ que nous notons

$$\mathfrak{L}^1(\Gamma , \hat{L}) .$$

C'est l'algèbre des fonctions définies sur Γ à valeurs dans $\hat{L}$ qui tendent vers zéro à "l'infini", muni du produit de convolution habituel

$$f * g(\gamma) = \sum_{\delta\in\Gamma} f(\delta)\, g(\gamma\delta^{-1}) .$$

Le dual de Γ n'est autre que la limite projective des $\underset{\sim}{Z}/p^n \underset{\sim}{Z}$, c'est-à-dire $\underset{\sim}{Z}_p$, si bien que l'on peut définir une transformation de Fourier $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{L}^1(\Gamma , \hat{L})$ dans l'algèbre $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \widehat{LK}_\infty)$ des fonctions continues sur $\underset{\sim}{Z}_p$ à valeurs dans $\widehat{LK}_\infty$ de la façon suivante

$$\mathfrak{F}(f)(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)\gamma^x$$

(K_∞ est le corps engendré par Γ sur $\underset{\sim}{Q}_p$, et $\widehat{LK}_\infty$ est la fermeture du corps LK_∞).

L'algèbre $\mathfrak{L}^1(\Gamma , \hat{L})$ a déjà été étudiée ainsi que sa transformation de Fourier lorsque $L \supset K_\infty$ (théorème 2) [3] [4] , nous en déduisons ici une étude de la même algèbre lorsque $L \cap K_\infty = K_1 = \underset{\sim}{Q}_p(\sqrt[p]{1})$. Nous montrons que l'homomorphisme $\mathfrak{F}$ est injectif si, et seulement si, la différente de L sur K_1 est non "nulle" (théorème 3). D'autre part si la différente de L sur K_1 est nulle, le quotient $\mathfrak{L}^1(\Gamma , \hat{L})/\ker \mathfrak{F}$ est isomorphe et isométrique à une sous-algèbre fermée de fonctions de $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \widehat{LK}_\infty)$ satisfaisant une équation fonctionnelle simple (théorème 4). De plus, l'idéal des nilpotents de $\mathfrak{L}^1(\Gamma , \hat{L})$ est dense dans le radical de Jacobson, et n'est pas fermé.

Nous nous intéressons ensuite au problème du produit tensoriel topologique de corps valués. Il se présente ainsi. Soit k un sous-corps fermé de $\underset{\sim}{C}_p$, L et M deux extensions algébriques de k contenues dans $\underset{\sim}{C}_p$, et linéairement disjointes sur k . Cela veut dire que le produit tensoriel $L \otimes_k M$ est isomorphe au compositum LM de ces deux corps. Sur le corps LM , nous pouvons considérer deux topologies, d'une part la valeur absolue induite par celle de $\underset{\sim}{C}_p$, d'autre part, la norme tensorielle définie sur LM regardé comme produit tensoriel de deux algèbres normées.

<u>Nous conjecturons que le complété de</u> LM <u>pour la valeur absolue est le quotient du produit tensoriel complété</u> $L \hat{\otimes}_k M$ <u>par son unique idéal maximal</u>.

Nous démontrons la conjecture dans le cas où $M = K_\infty$, $k = K_1$, et L quelconque. Nous montrons d'abord que la norme tensorielle sur LK_∞ est équivalente à la valeur absolue si, et seulement si, la différente de L sur K_1 est non nulle, et nous résolvons la conjecture en utilisant notre étude sur $\mathfrak{L}^1(\Gamma , \hat{L})$ (théorème 6).

I. L'algèbre $\mathfrak{L}^1(\Gamma , \hat{L})$.

I.0. <u>Les idéaux maximaux</u>. – L'objet de notre étude est de préciser le radical de Jacobson $\mathfrak{R}$ (intersection des idéaux maximaux), le nilradical (intersection des idéaux premiers ou idéal des nilpotents) ainsi que le quotient $\mathfrak{L}^1(\Gamma , \hat{L})/\mathfrak{R}$.

Rappelons tout d'abord un résultat de SCHIKHOF [5] [7].

THÉORÈME 1. – <u>Les idéaux maximaux de</u> $\mathfrak{L}^1(\Gamma , \hat{L})$ <u>sont les images réciproques par la transformation de Fourier des idéaux maximaux de</u> $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \widehat{LK_\infty})$.

Ceci montre en particulier que $\mathfrak{R} = \ker \mathfrak{F}$.

I.1. <u>Le corps</u> L <u>contient</u> K_∞ . – Dans ce cas, nous avons une bonne description de la transformation de Fourier $\mathfrak{F}$ et de l'algèbre $\mathfrak{L}^1(\Gamma , \hat{L})$ que nous allons résumer dans le théorème suivant.

THÉORÈME 2. ([3] [4]). – <u>Si</u> $L \supset K_\infty$, <u>la transformation de Fourier</u> $\mathfrak{F}$ <u>de</u> $\mathfrak{L}^1(\Gamma , \hat{L})$ <u>dans</u> $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \hat{L})$ <u>n'est pas injective, elle est surjective</u>. <u>Le quotient</u> $\mathfrak{L}^1(\Gamma , \hat{L})/\ker \mathfrak{F}$ <u>est isomorphe et isométrique à</u> $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \hat{L})$. <u>L'idéal</u> $\mathfrak{N}$ <u>des nilpotents est dense dans le radical de Jacobson</u> $\mathfrak{R}$ (intersection des maximaux) <u>et distinct de</u> $\mathfrak{R}$.

I.2. <u>Image de la transformation de Fourier</u>. – Déterminons l'adhérence B dans $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \widehat{LK_\infty})$ de l'image de la transformation de Fourier $\mathfrak{F}$.

Nous savons que

$$\mathrm{Gal}(LK_\infty/L) \simeq \mathrm{Gal}(K_\infty/K_\infty \cap L) \simeq H \subset \underset{\sim}{Z}_p^* .$$

Nous désignons par $\underset{\sim}{Z}_p^*$ le groupe des inversibles de $\underset{\sim}{Z}_p$. L'identification avec le sous-groupe H se fait de la façon suivante, soit $\tau \in \mathrm{Gal}(LK_\infty/L)$, alors il existe α unique dans $\underset{\sim}{Z}_p^*$ tel que

$$\tau(\gamma) = \gamma^\alpha \quad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma ,$$

<u>nous noterons</u> τ_α l'automorphisme ainsi associé à $\alpha \in H$.

Soit

$$g = \mathfrak{F}(f) \in \operatorname{Im} \mathfrak{F}$$

$$g(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)\gamma^x ,$$

appliquons τ_α , nous obtenons

$$\tau_\alpha(g(x)) = g(x\alpha) .$$

Soit donc B la sous-algèbre de $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \widehat{LK}_\infty)$ suivante :

$$B = \{g \in \mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p , \widehat{LK}_\infty) ; \tau_\alpha(g(x)) = g(x\alpha) , \forall \alpha \in H\} .$$

PROPOSITION 1 [5]. – <u>L'adhérence de l'image de la transformation de Fourier est l'algèbre</u> B .

I.3. <u>La différente de</u> L <u>sur</u> K_1 <u>est non nulle</u>. – Supposons pour simplifier que $L \cap K_\infty = K_1$. Si L_i est une extension finie de K_1 , nous notons $\mathfrak{D}_{L_i/K_1}$ la différente de L_i sur K_1 , soit

$$d = \sup_{K_1 \subset L_i \subset L, [L_i : K_1] < \infty} v(\mathfrak{D}_{L_i/K_1}) .$$

L'expression $v(\mathfrak{D}_{L_i/K_1})$ désigne la valuation de l'idéal $\mathfrak{D}_{L_i/K_1}$ (normalisée sur le corps K_1).

<u>Définition</u>. – Nous dirons que la différente de L sur K_1 est nulle si $d = +\infty$, ce que nous désignerons par $\mathfrak{D}_{L/K_1} = \{0\}$.

THÉORÈME 3 [5]. – <u>Si la différente de</u> L <u>sur</u> K_1 <u>est non nulle, alors la transformation de Fourier</u> $\mathfrak{F}$ <u>de</u> $\mathcal{L}^1(\Gamma , \hat{L})$ <u>dans</u> B <u>est injective et non surjective</u>.

On montre que la forme LK_s-linéaire

$$t_s = \lim_{\rightarrow} \frac{1}{p^N} \operatorname{Tr}_{LK_{N+s}/LK_s}$$

est continu et que

$$t_s(\gamma) = 0 \quad \text{pour} \quad \gamma \in \Gamma - \Gamma_s .$$

I.4. <u>La différente de</u> L <u>sur</u> K_1 <u>est nulle</u>. – Si E est un sous-corps de $\underset{\sim}{C}_p$, nous noterons $\mathcal{O}_E$ son anneau de valuation et $\mathfrak{m}_E$ son idéal de valuation.

PROPOSITION 2 [5]. – <u>Si la différente de</u> L <u>sur</u> K_1 <u>est nulle, alors pour tout entier</u> N

$$\operatorname{Tr}_{LK_N/LK_{N-1}}(\mathcal{O}_{LK_N}) \supset \mathfrak{m}_{LK_{N-1}} .$$

Ceci nous permet de construire une forme L-linéaire continue sur LK_∞ . Soit $\varepsilon > 0$, la proposition 2 montre qu'il existe une suite $\eta = (\eta_N)$ de LK_∞ possédant les propriétés suivantes

(1) $\eta_N \in LK_N$

(2) $|\eta_N| < 1 + \epsilon$

(3) $\mathrm{Tr}_{LK_{N+1}/LK_N}(\eta_N) = \eta_{N-1}$ et $\eta_1 = 1$.

Alors la forme L-linéaire t_η, définie par

$$t_\eta(x) = \mathrm{Tr}_{LK_N/L}(\eta_N\, x)\ , \text{ si } x \in LK_N$$

est continue, $\|t_\eta\| < 1 + \epsilon$ et $t_\eta(1) = 1$.

Notons aussi t_η le prolongement continu de t_η à $\widehat{LK}_\infty$, et enfin notons aussi t_η l'application $\hat{L}$-linéaire $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \widehat{LK}_\infty)$ sur $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{L})$ définie par

$$f \to t_\eta \circ f .$$

THÉORÈME 4 [5]. - <u>Soit</u> L <u>une extension algébrique de</u> $\underset{\sim}{Q}_p$ <u>dont la différente sur</u> $\underset{\sim}{Q}_p$ <u>est nulle. Alors la transformation de Fourier</u> $\mathfrak{F}_1$ <u>de</u> $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{L})$ <u>dans la sous-algèbre</u> B <u>de</u> $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p, \widehat{LK}_\infty)$ <u>est surjective, et</u> $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{L})/\ker \mathfrak{F}_1$ <u>est isomorphe et isométrique à</u> B. <u>De plus,</u>

(a) $\ker \mathfrak{F}_1 = t_\eta(\ker \mathfrak{F})$ (<u>où</u> $\mathfrak{F}$ <u>est la transformation de Fourier de</u> $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \widehat{LK}_\infty)$ <u>dans</u> $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p, \widehat{LK}_\infty)$)

(b) <u>l'idéal</u> $\mathfrak{N}_1$ <u>des nilpotents de</u> $\mathfrak{L}^1(\Gamma, L)$ <u>constitue une partie dense de</u> $\ker \mathfrak{F}_1$ <u>et distincte de</u> $\ker \mathfrak{F}_1$.

II. Produit tensoriel de corps valués.

Nous allons maintenant appliquer nos résultats sur $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{L})$ à l'étude de l'algèbre $L \hat{\otimes}_{K_1} K_\infty$.

II.1. <u>Linéaire disjonction</u>. - Notons toujours $\underset{\sim}{Q}_p$ le corps p-adique, $\tilde{\underset{\sim}{Q}}_p$ sa clôture algébrique, et $\underset{\sim}{C}_p$ le complété de $\tilde{\underset{\sim}{Q}}_p$. Si F est un sous-corps de $\underset{\sim}{C}_p$, on notera $\hat{F}$ sa fermeture topologique dans $\underset{\sim}{C}_p$. Rappelons le théorème de Tate-Sen-Ax.

THÉORÈME 5 ([11], [8] [1]). - <u>Soit</u> G <u>le groupe de Galois de</u> $\tilde{\underset{\sim}{Q}}_p$ <u>sur</u> $\underset{\sim}{Q}_p$, <u>il agit par continuité sur</u> $\underset{\sim}{C}_p$. <u>Soit</u> H <u>un sous-groupe de</u> G, <u>alors le corps des éléments de</u> $\underset{\sim}{C}_p$, <u>invariants par</u> H <u>est l'adhérence du corps des éléments de</u> $\tilde{\underset{\sim}{Q}}_p$ <u>invariants par</u> H. <u>Ceci s'écrit donc ainsi</u>

$$\underset{\sim}{C}_p^H = \widehat{\tilde{\underset{\sim}{Q}}_p^H} .$$

Ce théorème permet de décrire les sous-corps fermés de $\underset{\sim}{C}_p$ comme étant les adhérences des sous-corps de $\tilde{\underset{\sim}{Q}}_p$.

COROLLAIRE [5]. - <u>Soit</u> F <u>un sous-corps topologiquement fermé de</u> $\underset{\sim}{C}_p$. <u>Alors</u>

$$F = \widehat{\tilde{\underset{\sim}{Q}}_p \cap F} .$$

On déduit de ce corollaire la proposition suivante.

PROPOSITION 3 [5]. - <u>Soit</u> k <u>un sous-corps fermé de</u> $\underset{\sim}{C}_p$, L <u>et</u> M <u>deux sous-corps de</u> $\underset{\sim}{C}_p$, <u>extensions algébriques de</u> k <u>et linéairement disjointes sur</u> k . <u>Alors les fermetures</u> $\hat{L}$ <u>et</u> $\hat{M}$ <u>de</u> L <u>et</u> M <u>sont linéairement disjointes sur</u> k .

II.2. <u>Produit tensoriel topologique de corps.</u> - Soient toujours k un sous-corps fermé de $\underset{\sim}{C}_p$, L et M deux extensions algébriques de k linéairement disjointes sur k . Ainsi $L \otimes_k M$ est isomorphe à LM par l'application

$$\ell \otimes m \to \ell m .$$

Rappelons la définition de la norme tensorielle sur $L \otimes_k M$ [8]. Soit

$$x = \sum_i \ell_i \otimes m_i \in L \otimes_k M ,$$

on pose

$$\|x\| = \inf \sup_i |\ell_i| \, |m_i| ,$$

où "inf" est pris sur toutes les décompositions de x sous la forme $\sum_i \ell_i \otimes m_i$.

Cette norme possède les propriétés suivantes :

$$|\ell| = \|\ell\| \quad \text{et} \quad \|m\| = |m| \quad \text{si} \quad \ell \in L \quad \text{et} \quad m \in M$$

$$|x| \leqslant \|x\| \quad \text{pour tout} \quad x \in LM$$

(après identification de $L \otimes_k M$ et LM).

La boule unité est $\mathcal{O}_{LM}$ pour la valeur absolue, et $\mathcal{O}_L \mathcal{O}_M$ pour norme tensorielle (à une homothétie près).

Notons $L \hat{\otimes}_k M$ le complété de $L \otimes_k M$ pour la norme tensorielle. L'isomorphisme de $L \otimes M$ dans LM se prolonge par continuité en un homomorphisme de $L \hat{\otimes} M$ dans $\widehat{LM}$.

PROPOSITION 4 [5]. - <u>L'algèbre</u> $L \hat{\otimes}_k M$ <u>admet un seul idéal maximal, c'est le noyau de l'homomorphisme</u> φ <u>de</u> $L \hat{\otimes}_k M$ <u>dans</u> $\widehat{LM}$.

Ainsi $\varphi(L \hat{\otimes}_k M)$ est un corps normé complet intermédiaire entre LM et $\widehat{LM}$, dont la norme coïncide sur L avec la valeur absolue et sur M aussi.

CONJECTURE. - <u>Soit</u> k <u>un sous-corps fermé de</u> $\underset{\sim}{C}_p$, L <u>et</u> M <u>deux extensions algébriques de</u> k , <u>linéairement disjointes sur</u> k . <u>Alors le quotient de</u> $L \hat{\otimes}_k M$ <u>par l'unique idéal maximal</u> $\mathfrak{M}$ <u>est isomorphe et isométrique à</u> $\widehat{LM}$.

II.3. <u>Produit tensoriel avec la</u> $\underset{\sim}{Z}_p$<u>-extension cyclotonique.</u> - On montre d'abord que la norme tensorielle est équivalente à la valeur absolue de LK_∞ si, et seulement si, le conducteur [9] de $\mathcal{O}_L \mathcal{O}_{K_\infty}$ dans $\mathcal{O}_{LK_\infty}$ n'est pas nul. Et ceci est satisfait si, et seulement si, la différente de L sur K_1 est non nulle.

Ensuite on considère l'idempotent ε de $\mathcal{E}^1(\Gamma , \hat{L})$, défini par

$$\varepsilon(\gamma) = \begin{cases} \frac{\gamma^{-1}}{p} & \text{si } \gamma \in \Gamma_1 \\ 0 & \text{si } \gamma \notin \Gamma_1 . \end{cases}$$

On montre ensuite que l'algèbre $\varepsilon * \mathcal{L}^1(\Gamma, \hat{L})$ est isomorphe à $L \hat{\otimes}_{K_1} K_\infty$ et en utilisant le théorème 4 on obtient

THÉORÈME 5. - Si la différente de L sur K_1 est nulle, l'algèbre $L \hat{\otimes}_{K_1} K_\infty$ a un seul idéal maximal $\mathfrak{M}$, il est non nul et le quotient $L \hat{\otimes} K_\infty/\mathfrak{M}$ est isomorphe et isométrique à $\widehat{LK_\infty}$. De plus l'idéal $\mathfrak{N}$ des nilpotents de $L \hat{\otimes} K_\infty$ est dense dans $\mathfrak{M}$ et distinct de $\mathfrak{M}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AX (J.). - Zeros of polynomials over local fields : The Galois action, J. of Algebra, t. 15, 1970, p. 417-428.

[2] BOURBAKI (N.). - Algèbre, chapitre 5 : Corps commutatifs. 2e édition. - Paris, Hermann, 1959 (Act. scient. et ind., 1102 ; Bourbaki, 11). [Voir en particulier, Extensions linéairement disjointes, V, § 2, n° 3]

[3] FRESNEL (J.) et de MATHAN (B.). - Transformation de Fourier p-adique, Astérisque n° 24-25, 1975 : Journées arithmétiques [1974. Bordeaux], p. 139-155.

[4] FRESNEL (J.) et de MATHAN (B.). - Le résultat sur l'idéal $\mathfrak{N}$ des nilpotents n'a pas encore été publié. Il a ete exposé à Oberwolfach en septembre 1976.

[5] FRESNEL (J.) et de MATHAN (B.). - Algèbre du groupe infini Γ et produit tensoriel de corps values, Séminaire de Théorie des nombres, Bordeaux, 1975/76.

[6] PARMENTER (M. M.) and SEHGAL (S. K.). - Non-archimedean group algebras, J. of Number Theory, t. 7, 1975, p. 376-384.

[7] SCHIKHOF (W. H.). - Non-archimedean harmonic analysis, Thèse Nijmegen, 1967.

[8] SEN (S.). - On automorphisms of local fields, Annals of math, t. 90, 1969, p. 33-40.

[9] SERRE (J.-P.). - Corps locaux. 2e édition. - Paris, Hermann, 1968.

[10] SERRE (J.-P.). - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, 12, p. 69-85).

[11] TATE (J. T.). - p-divisible groups, "Proceedings of a Conference on local fields [1966. Driebergen], p. 158-183. - Berlin, Springer-Verlag, 1967.

[12] WOODCOCK (C. F.). - Fourier analysis for p-adic Lipschitz functions, J. of London math. Soc., Series 2, t. 7, 1974, p. 681-693.

(Texte reçu le 14 octobre 1976)

Jean FRESNEL
Mathématiques
Université de Bordeaux-I
351 cours de la Libération
33405 TALENCE