Pierrette Cassou-Noguès

Fonctions L p-adiques d'une extension abélienne d'un corps totalement réel

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 3, nº 2 (1975-1976), exp. nº J11, p. J1-J11

<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1975-1976__3_2_A10_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
3e année, 1975/76, n° J11, 11 p.

Journées d'analyse ultramétrique
[1976. Marseille-Luminy]

FONCTIONS L p-ADIQUES D'UNE EXTENSION ABÉLIENNE D'UN CORPS TOTALEMENT RÉEL

par Pierrette CASSOU-NOGUÈS

Il s'agit ici d'étudier les fonctions L p-adiques de corps de nombres totalement réel en utilisant la décomposition de ces fonctions en fonctions zêta partielles attachées à des classes de rayon. On va voir comment deux méthodes fondamentalement différentes d'étude de ces fonctions aux entiers négatifs donnent lieu à deux méthodes d'interpolation p-adique. On étudiera ensuite dans le cas où le corps de base est $\mathbb{Q}$ des applications de l'une de ces méthodes.

I. Valeurs aux entiers négatifs et interpolation p-adique.

Après avoir rappelé quelques définitions, on donnera deux méthodes d'étude des valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta d'une classe de rayon et les deux méthodes d'interpolation p-adique qui s'en déduisent.

1. Rappels.

Soit K un corps de nombres totalement réel. Pour tout idéal $\mathfrak{p}$ de K, notons $v_{\mathfrak{p}}$ la valuation $\mathfrak{p}$-adique normalisée de telle sorte que $v_{\mathfrak{p}}(\pi) = 1$ si π est l'uniformisante locale. Soit $\mathfrak{f}$ un idéal entier de K. On note

$$K_{\mathfrak{f}} = \{\alpha \in K \ ; \ \alpha \gg 0 \ \text{ et } \ \forall \ \mathfrak{p} | \mathfrak{f} \ , \ v_{\mathfrak{p}}(\alpha - 1) \geqslant v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{f})\} \ .$$

On appelle classe de rayon $\mathcal{R}_{\mathfrak{f}}$ mod $\mathfrak{f}$ le quotient du groupe des idéaux fractionnaires de K engendrés par les premiers de K qui ne divisent pas $\mathfrak{f}$ par le groupe des idéaux principaux de K engendrés par les éléments de $K_{\mathfrak{f}}$. Pour $r \in \mathcal{R}_{\mathfrak{f}}$, on définit

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(r \ , \ s) = \sum_{\mathfrak{a}} N(\mathfrak{a})^{-s} \ , \quad \mathrm{Re}(s) > 1 \ ,$$

la sommation étant étendue aux idéaux $\mathfrak{a}$ entiers de K qui sont premiers à $\mathfrak{f}$ et qui sont dans la classe de r. N désigne la norme de K sur $\mathbb{Q}$.

D'après la théorie du corps de classe, à chaque idéal $\mathfrak{f}$ entier, on peut faire correspondre une extension abélienne M de K dont le groupe de Galois sur K, $G(M/K)$, est isomorphe à $\mathcal{R}_{\mathfrak{f}}$. Soit χ un caractère de $G(M/K)$, et r un élément de $\mathcal{R}_{\mathfrak{f}}$, on note $\chi(r)$ l'image par χ de l'image de r dans $G(M/K)$ par l'isomorphisme précédent. On a alors

$$L(s \ , \ \chi) = \sum_{r \in \mathcal{R}_{\mathfrak{f}}} \chi(r) \ \zeta_{\mathfrak{f}}(r \ , \ s) \quad \text{pour } \ \mathrm{Re}(s) > 1 \ .$$

Par exemple, dans le cas où $K = \mathbb{Q}$, χ est un caractère de Dirichlet de conducteur f , et l'on a

$$L(s\ ,\ \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\ n^{-s} \quad \text{pour} \quad \mathrm{Re}(s) > 1 \ .$$

On peut écrire

$$L(s\ ,\ \chi) = \sum_{a=1}^{f} \chi(a) \sum_{k=0}^{\infty}(a + kf)^{-s} \ .$$

On pose

$$\zeta_f(a\ ,\ s) = \sum_{k=0}^{\infty}(a + kf)^{-s} \quad \text{pour} \quad \mathrm{Re}(s) > 1 \ ,$$

et on a la décomposition précédente.

On peut montrer que, pour tout n entier positif, $\zeta_f(a\ ,\ 1 - n) = - B_n(a)/n$, $B_n(X)$ désignant le n-ième polynome de Bernoulli. Donc, pour tout n entier positif, $\zeta_f(a\ ,\ 1 - n)$ est rationnel, et on peut prolonger sur $\mathbb{Z}_p$ la fonction

$$n \mapsto \zeta_f(a\ ,\ 1 - n) \quad [3].$$

2. Valeurs aux entiers négatifs et interpolation p-adique.

On s'intéresse de façon plus générale aux valeurs aux entiers négatifs des fonctions $\zeta_{\mathfrak{f}}(r\ ;\ \cdot)$ et à la possibilité d'interpoler p-adiquement ces valeurs. Il y a actuellement deux méthodes pour démontrer la rationnalité des valeurs aux entiers négatifs qui donnent lieu à deux méthodes d'interpolation p-adique.

(a) Méthode des formes modulaires. - La première est celle de KLINGEN et SIEGEL ([11] , [19]) qui ont obtenu $\zeta_{\mathfrak{f}}(r\ ,\ 1 - k)$ pour tout k entier positif comme le terme constant de formes modulaires dont on connait la rationnalité des autres coefficients. Ils en déduisent que pour tout k entier positif $\zeta_{\mathfrak{f}}(r\ ,\ 1 - k)$ est rationnel. C'est ce qui a donné l'idée à J.-P. SERRE [17] de définir des formes modulaires p-adiques, et d'obtenir les fonctions zêta p-adiques comme le terme constant de ces formes modulaires. J.-P. SERRE utilise des formes modulaires à une variable, ce qui ne lui permettait pas de résoudre certaines conjectures concernant notamment les dénominateurs ([9], [16]). P. DELIGNE et K. RIBET [7] ont raffiné la méthode en utilisant des formes modulaires à plusieurs variables. Ils démontrent les congruences conjecturées par J. COATES [6] qui permettent, grâce à la méthode d'IWASAWA [9] d'obtenir les fonctions p-adiques. Ils résolvent en outre les conjectures sur les dénominateurs.

(b) Méthode des valeurs explicites. - La deuxième méthode d'étude des valeurs aux entiers négatifs est due, dans le cas quadratique, à D. ZAGIER [20] et l'auteur [4] et, dans le cas d'un corps totalement réel quelconque, à T. SHINTANI [18]. Elle consiste à écrire tout d'abord

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(r\ ,\ s) = N(b)^{-s} \sum_{x} N(x)^{-s} \ ,$$

où $b \in r$, la sommation étant étendue à tous les éléments de K qui sont totalement positifs tels que $x - 1 \in \mathfrak{b}^{-1} \mathfrak{f}$ et qui sont non associés par rapport au groupe des unités de $K_{\mathfrak{f}}$. T. SHINTANI a montré qu'il existait un nombre fini J de simplexes C_j, engendrés par $i(j)$ $(i(j) \leq n)$ éléments de K tels que

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(r , s) = N(\mathfrak{b})^{-s} \sum_{j\in J} \sum_{y\in Y_j} \zeta(C_j , y , s) \quad \text{pour} \quad Re(s) > 1 ,$$

où Y_j est un ensemble fini de $\underset{\sim}{Q}^{i(j)}$.

Si $v_1 , \dots , v_{i(j)}$ désignent les générateurs de C_j, $\zeta(C_j , y , \cdot)$ est définie par

$$\zeta(C_j , y , s) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_{i(j)}=0}^{\infty} N[L(n_1 , \dots , n_{i(j)})]^{-s} \quad \text{pour} \quad Re(s) > 1 ,$$

où $L(x_1 , \dots , x_{i(j)}) = (x_1 + y_1) v_1 + \dots + (x_{i(j)} + y_{i(j)}) v_{i(j)}$.

On étudie ensuite les fonctions

$$s \mapsto \zeta(C_j , y , s) ,$$

et on montre que ces fonctions se prolongent à tout le plan complexe en des fonctions méromorphes dont on sait calculer les valeurs aux entiers négatifs. En effet, on peut montrer que

$$(1) \quad \frac{\Gamma(s)^i}{\Gamma(is)} \zeta(C_j , y , s) = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} u_1^{s-1} \quad u_{n-1}^{s-1} K(u_1 , \dots , u_{n-1} , is) \, du_1 \dots du_{n-1} ,$$

où

$$K(u_1 ,\dots, u_{n-1} , s) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_{i(j)}=0}^{\infty} \frac{1}{[\sum_{\ell=0}^{n-1} L^{(\ell)}(n_1 ,\dots, n_{i(j)}) u_\ell + L^{(n)}(n_1 ,\dots, n_{i(j)})]^s} ,$$

où $L^{(1)} \dots L^{(n)}$ désignent les conjugués dans K.

La fonction $s \mapsto K(u_1 , \dots , u_{n-1} , s)$ a déjà été étudiée [3], et on sait qu'elle se prolonge à tout le plan complexe en une fonction méromorphe qui prend sur les entiers négatifs des valeurs qui appartiennent à $\underset{\sim}{Q}(u_1 , \dots , u_{n-1})$ et qui sont données par

$$K(u_1 ,\dots, u_{n-1} , -k) = J[X \mapsto \frac{[\sum_{\ell=0}^{n-1} L^{(\ell)}(x_1 , \, , x_{i(j)}) u_\ell + L^{(n)}(x_1 , \, , x_{i(j)})]^{k+i(j)} \; k!}{M_1(u_1 ,\dots, u_{n-1}) \cdots M_{i(j)}(u_1 ,\dots, u_{n-1}) (k+i(j))!} ,$$

où $X = (x_1 , \dots , x_{i(j)})$, où $M_1(u_1 ,\dots, u_{n-1}) = \alpha_1^1 u_1 + \alpha_1^2 u_2 + \dots + \alpha_1^{n-1} u_{n-1} + \alpha_1^n$, et si F est une fonction définie sur $\underset{\sim}{Z}^{i(j)}$,

$$J(F) = \lim_{r_1 \dots r_{i(j)} \to \infty} \frac{1}{p^{r_1} \, p^{r_{i(j)}}} \sum_{n_1=0}^{p^{r_1}-1} \sum_{n_{i(j)}=0}^{p^{r_{i(j)}}-1} F(n_1 ,\dots, n_{i(j)}) .$$

On transforme l'intégrale de la formule (1) en une intégrale complexe pour obtenir le prolongement de $s \to \zeta(C_j , y , s)$ à tout le plan complexe, et les valeurs aux entiers négatifs se calculent en utilisant le théorème des résidus. On obtient

$\zeta(C_j, y, -k) =$

$$\operatorname{Tr} J[X \mapsto \frac{k!}{(nk+n)!} \frac{d^k}{du_1^k} \cdots \frac{d^k}{du_{n-1}^k} \left(\frac{[\sum_{\ell=0}^{n-1} L^{(\ell)}(x_1 \cdots x_{i(j)}) u_\ell + L^{(n)}(x_1 \cdots x_{i(j)})]^{nk+n}}{M_1(u_1 \cdots u_{n-1}) \cdots M_{i(j)}(u_1 \cdots u_{n-1})} \right)_{u_1 = 0 \cdots u_{n-1} = 0}]$$

Ceci permet d'obtenir les valeurs $\zeta(C_j , y , -k)$ comme somme de produits de nombres de Bernoulli. De même que KUBOTA et LEOPOLDT [12] ont défini la fonction zêta p-adique après avoir remarqué que

$$\zeta(-k) = \frac{-b_k}{k} = J(x \mapsto \frac{x^k}{k}) ,$$

et en étudiant

$$k \mapsto J(x \mapsto \frac{x^k}{k}) ,$$

on peut étudier de la même façon la possibilité de prolonger en une fonction méromorphe sur $\underset{\sim}{Z}_p$ la fonction

$k \mapsto$

$$\operatorname{Tr} J[X \mapsto \frac{k!}{(nk+n)!} \frac{d^k}{du_1^k} \cdots \frac{d^k}{du_{n-1}^k} \left(\frac{[\sum_{\ell=0}^{n-1} L^{(\ell)}(x_1, \ldots, x_{i(j)}) u_\ell + L^{(n)}(x_1, \ldots, x_{i(j)})]^{nk+n}}{M_1(u_1, \ldots, u_{n-1}) \cdots M_{i(j)}(u_1, \ldots, u_{n-1})} \right)_{u_1 = 0 \cdots u_{n-1} = 0}]$$

On utilise la propriété suivante.

Soit G une fonction définie par une série $\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_i=1}^{\infty} f(n_1, \ldots, n_i)^{-s}$ convergente dans un demi-plan, et prolongeable à tout le plan complexe en une fonction méromorphe, ayant un nombre fini de pôles, qui prend, sur les entiers négatifs, des valeurs qui appartiennent à un corps de nombres.

On suppose qu'il existe, pour tout k entier positif, une fonction F_k uniformément dérivable sur $\underset{\sim}{Z}_p$ telle que

(i) $\dfrac{\partial^i}{\partial x_1 \cdots \partial x_i} F_k = f^k$,

(ii) $J(x \mapsto F_k(x)) = G(-k)$,

(iii) $i \mapsto F_i(x)$ est prolongeable pour tout x en une fonction méromorphe admettant les mêmes pôles que G , dont la convergence des coefficients d'interpolation est uniforme en x .

Alors il existe une fonction G_p définie sur $\underset{\sim}{Z}_p$ par

$$G_p(s) = J(x \to F_s(x)) .$$

Cette fonction est méromorphe, et elle admet les mêmes pôles que G , avec les mêmes résidus.

Ici on a la propriété (ii) ; la propriété (i) est aisée à vérifier ; la propriété (iii) a été démontrée dans le cas quadratique [5], et l'auteur achève de la démontrer dans le cas général.

II. Applications de la méthode de KUBOTA et LEOPOLDT.

On va utiliser ici la définition de la fonction zêta p-adique de Kubota et Leopoldt pour retrouver de façon simple des résultats connus : les congruences de Coates, la formule de Leopoldt et la formule limite de Kroneker.

Rappelons que si

$$\zeta_f(a\ ,\ s) = \sum_{k=0}^{\infty}(a + kf)^{-s} \quad \text{pour} \quad \mathrm{Re}(s) > 1\ ,$$

alors

$$\zeta_f(a\ ,\ 1 - n) = -\frac{B_n(a)}{n} = -J(x \mapsto \frac{(fx + a)^n}{n})\ ,$$

où

$$J[x \mapsto (fx + a)^n] = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{p^r} \sum_{k=0}^{p^r-1}(fk + a)^n\ .$$

On définit θ par $\theta(x) = \lim_{n\to\infty} x^{p^n}$ pour tout x de $\underset{\sim}{Z}_p$. On pose

$$\langle x\rangle = \frac{x}{\theta(x)} \quad \text{si} \quad |x| = 1\ .$$

Si ζ_p désigne la fonction zêta p-adique, on a

$$\zeta_{p,f}(a\ ,\ 1 - s) = -\frac{1}{fs} J[x \mapsto \langle fx + a\rangle^s\ \theta^0(xf + a)]\ .$$

1. Congruences de Coates.

On va montrer comment on peut retrouver toutes les congruences de Coates [6] dans le cas $K = \underset{\sim}{Q}$. La méthode doit se généraliser dans le cas d'un corps de nombres quelconque.

Posons, pour tout n,

$$\delta_n(b\ ,\ c\ ,\ f) = c^n\ \zeta_f(b\ ,\ 1 - n) - \zeta_f(bc\ ,\ 1 - n)\ .$$

D'autre part, si $\zeta_{p,f}(b\ ,\ .)$ désigne la fonction zêta p-adique, on écrit

$$\zeta_{p,f}(b\ ,\ s) = \frac{1}{f(s - 1)} + \rho_p(f\ ,\ b) + c_1(s - 1) + \dots$$

Posons

$$\delta_0(b\ ,\ c\ ,\ f) = \rho_p(f\ ,\ b) - \rho_p(f\ ,\ bc) - \frac{1}{f}\log\langle c\rangle\ .$$

Les congruences de Coates peuvent s'énoncer ainsi. Soit p un premier qui divise f, alors pour tous entiers b et c avec $(b\ ,\ f) = (c\ ,\ f) = 1$ et tout entier $n \geqslant 0$, on a

(1) $\delta_1(b\ ,\ c\ ,\ f) \in \underset{\sim}{Z}_p$,

(2) $\delta_n(b\ ,\ c\ ,\ f) \equiv (bc)^{n-1}\ \delta_1(b\ ,\ c\ ,\ f) \mod \omega_{n-1}(\underset{\sim}{Q}(\sqrt[f]{1}))\ \underset{\sim}{Z}_p$.

On va démontrer ces congruences.

Si $0 < b < f$ et $(b , f) = 1$, on a

$$\frac{\zeta_{p,f}(b , 1 - s)}{\langle b\rangle^s} = \frac{1}{sf} J(x \mapsto \frac{\langle xf + b\rangle^s}{\langle b\rangle^s}) = \frac{1}{sf} J[x \mapsto (\frac{xf + b}{b})^s]$$

puisque p divise f .

Donc, pour tout n entier positif,

$$\frac{\zeta_{p,f}(b , 1 - n)}{\langle b\rangle^n} = \frac{1}{sf} J(x \mapsto (\frac{xf + b}{b})^n) = \frac{\zeta_f(b , 1 - n)}{b^n} .$$

Posons, pour tout s élément de $\underset{\sim}{Z}_p$,

$$\delta_{p,s}(b , c , f) = \langle c\rangle^s \zeta_{p,f}(b , 1 - s) - \zeta_{p,f}(bc , 1 - s) .$$

Alors

$$\frac{\delta_{p,s}(b , c , f)}{\langle bc\rangle^s} = \frac{\zeta_{p,f}(b , 1 - s)}{\langle b\rangle^s} - \frac{\zeta_{p,f}(bc , 1 - s)}{\langle bc\rangle^s} .$$

On a, pour tout n entier positif,

$$\frac{\delta_{p,n}(b , c , f)}{\langle bc\rangle^n} = \frac{\delta_n(b , c , f)}{(bc)^n}$$

et

$$\delta_{p,0}(b , c , f) = \delta_0(b , c , f) .$$

Les congruences 1° et 2° sont alors en fait équivalentes aux congruences

(1') $\dfrac{\delta_{p,1}(b , c , f)}{\langle bc\rangle} \in \underset{\sim}{Z}_p$,

(2') Pour tout n entier positif ou nul,

$$\frac{\delta_{p,n}(b , c , f)}{\langle bc\rangle^n} \equiv \frac{\delta_{p,1}(b , c , f)}{\langle bc\rangle} \quad \text{mod } \omega_{n-1}(\underset{\sim}{Q}(f\sqrt{1})) \underset{\sim}{Z}_p .$$

Soit g l'entier $0 \leq g < f$ tel que $bc = g + rf$,

$$\frac{\zeta_{p,f}(bc , 1 - s)}{\langle bc\rangle^s} = \frac{1}{sf} J[x \mapsto (\frac{(x - r)f}{bc} + 1)^s]$$

et

$$\frac{\delta_{p,s}(b , c , f)}{\langle bc\rangle^s} = \frac{1}{sf} J[x \mapsto \{(\frac{(x - r)f}{bc} + 1)^s - (\frac{xf}{b} + 1)^s\}] .$$

Démontrons (1')

$$\frac{\delta_{p,1}(b , c , f)}{\langle bc\rangle} = \frac{1}{f} J[x \mapsto \{(\frac{(x - r)f}{bc} + 1) - (\frac{xf}{b} + 1)\}] = J[x \to \frac{x}{b}(\frac{1}{c} - 1) - \frac{r}{bc}] .$$

Si $p \neq 2$,

$$\frac{\delta_{p,1}(b , c , f)}{\langle bc\rangle} \in \underset{\sim}{Z}_p .$$

Si $p = 2$, $(c , 2) = 1$. Donc $c - 1$ est divisible par 2 . Donc

$$\frac{\delta_{p,1}(b , c , f)}{\langle bc\rangle} \in \underset{\sim}{Z}_p .$$

Pour démontrer (2'), on va montrer qu'il existe une fonction K analytique sur $\underset{\sim}{Z}_p$ telle que pour tout $s \in \underset{\sim}{Z}_p$

$$\frac{\delta_{p,s}(b , c , f)}{\langle bc\rangle^s} = \frac{\delta_{p,1}(b , c , f)}{\langle bc\rangle} + (s - 1)\ K(s)$$

et

$$K(s) \in \omega_1(\underset{\sim}{Q}(f_{\sqrt{1}}))\ \underset{\sim}{Z}_p .$$

On écrit

$$(\frac{xf}{b} + 1)^s = 1 + s\,\frac{xf}{b} + s(s - 1)f \sum_{r=2}^{\infty} \binom{s-2}{r-2} (\frac{x}{b})^r \frac{f^{r-1}}{r(r-1)} ,$$

$$\frac{\delta_{p,s}(b,c,f)}{\langle bc\rangle^s} = \frac{\delta_{p,1}(b,c,f)}{\langle bc\rangle} + (s-1) \sum_{j=r}^{\infty} \binom{s-r}{j-r}\ J[x \to (\frac{x-r}{bc})^j - (\frac{x}{b})^j]\ \frac{f^{j-1}}{j(j-1)} .$$

Posons

$$K(s) = \sum_{r=2}^{\infty} \binom{s-2}{r-2}\ J[x \to (\frac{x-r}{bc})^j - (\frac{x}{b})^j]\ \frac{f^{j-1}}{j(j-1)} .$$

On a bien $K(s) \in \omega_1(\underset{\sim}{Q}(f_{\sqrt{1}}))\ \underset{\sim}{Z}_p$.

On a donc la propriété.

2. Formule de Léopoldt.

Soit χ un caractère de Dirichlet primitif pair, f son conducteur, Z_f une racine primitive f-ième de 1 et $\tau(\chi)$ la somme de Gauss associée à χ et Z_f . Rappelons la définition de $L_p(\chi)$ [12].

(a) Si f n'est pas une puissance de p ,

$$L_p(\chi) = \frac{-\tau(\chi)}{f} \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a)\ \log(1 - Z_f^a) .$$

(b) Si $f = p$,

$$L_p(\chi) = \frac{-\tau(\chi)}{f}\ \frac{1}{p-1} \sum_{a=1}^{p} \bar{\chi}(a)\ \log\{\frac{(1 - Z_p^a)^{p-1}}{p}\} .$$

(c) Si $f = p^e$, $e > 1$, on pose

$$L_p(\chi) = \frac{-\tau(\chi)}{f}\ \frac{1}{p} \sum_{a=1}^{f} \bar{\chi}(a)\ \log\{\frac{(1 - Z_f^a)^p}{1 - Z_f^{ap}}\} .$$

On a le théorème suivant ([1][13]).

<u>Quels que soient le caractère primitif</u> $\chi \neq \varepsilon$, <u>et le nombre premier</u> p , <u>on a</u>

$$L_p(1 , \chi) = (1 - \frac{\chi(p)}{p})\ L_p(\chi) .$$

On va démonter ce théorème en utilisant le fait que

$$L(s\,,\chi) = \Sigma_{a=1}^{f} \chi(a)\, \zeta_f(a\,,s)$$

et donc

$$L_p(s\,,\chi) = \Sigma_{a=1}^{f} \chi(a)\, \zeta_{p,f}(a\,,s)$$

$$\zeta_{p,f}(a\,,1-s) = \frac{1}{sf} J(x \mapsto \theta^0(xf+a)\,\langle xf+a\rangle^s)$$

$$\langle xf+a\rangle^s = 1 + s\log\langle xf+a\rangle + \cdots$$

Donc

(1) $$L_p(1\,,\chi) = \frac{1}{f}\Sigma_{a=1}^{f} \chi(a)\, J(x \mapsto \theta^0(xf+a)\log\langle xf+a\rangle)\,.$$

On sait que

$$\chi(a) = \frac{\tau(\chi)}{f}\Sigma_{b=1}^{f} \bar{\chi}(b)\, Z_f^{ab}\,.$$

Alors, en remplaçant dans (1),

$$L_p(1\,,\chi) = \frac{\tau(\chi)}{f^2}\Sigma_{b=1}^{f} \bar{\chi}(b)\,\Sigma_{a=1}^{f} Z_f^{ab}\, J(x \mapsto \theta^0(xf+a)\log\langle xf+a\rangle)$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{a=1}^{f} Z^{ab} J(x \mapsto \log\langle xf+a\rangle) &= \lim_{r\to\infty}\frac{1}{p^r}\Sigma_{n=0}^{p^r-1}\Sigma_{a=1}^{f}\theta^0(nf+a)\log\langle xf+a\rangle\, Z_f^{(nf+a)}\\ &= \lim_{r\to\infty}\frac{1}{p^r}\Sigma_{n=1}^{p^r f}\theta^0(n)\log\langle n\rangle\, Z_f^{nb}\\ &= f\lim_{r\to\infty}\frac{1}{p^r f}\Sigma_{n=0}^{p^r f-1}\theta^0(n)\log\langle n\rangle\, Z_f^{nb}\,.\end{aligned}$$

Posons

$$J(F)(T) = \lim_{r\to\infty}\frac{1}{p^r a}\Sigma_{n=0}^{p^r a-1} F(n)\, T^n\,.$$

On peut montrer [2] que cette limite existe pour T, élément de $\underset{\sim}{C}_p$, tel que $|1-T|<1$, et ne dépend pas de a, et que la fonction $T \mapsto J(F)(T)$ admet un prolongement fonctionnel pour tout T tel que $|Z_a - T| < 1$. Donc on a

(1') $$L_p(1\,,\chi) = \frac{\tau(\chi)}{f}\Sigma_{b=1}^{f}\bar{\chi}(b)\, J(x\mapsto\theta^0(x)\log\langle x\rangle)\,(Z_f^b)\,.$$

Mais on sait que si F désigne une fonction uniformément dérivable sur $\underset{\sim}{Z}_p$, alors les séries de Taylor $\Sigma_{n=1}^{\infty} F(n)\, T^n$ et $\Sigma_{n=1}^{\infty} F'(n)\, T^n$ se prolongent en des fonctions analytiques, notées $I(F)(T)$ et $I(F')(T)$, définies dans un domaine D qui contient $\{T \in \underset{\sim}{C}_p\,;\ |1-T| = 1\}$. On a alors, $\forall\, T \in D$ tel que $|T| = 1$,

$$J(F)(T) = -I(F')(T) - I(F)(T)\log T\,,$$

où $\log T$ désigne éventuellement le prolongement fonctionnel du $\log$.

D'autre part, on peut montrer aussi que la série de Laurent formelle en $1-T$,

$$I(F')(T) + I(F)(T)\log T\,,$$

est en fait une série de Taylor convergente dans $\{T\in\underset{\sim}{C}_p\,;\ |1-T|<1\}$ et, dans ce domaine, on a

$$J(F)(T) = -[I(F')(T) + I(F)(T)\log T] .$$

Ici on considère

$$F : x \mapsto \theta^0(x)\log\langle x\rangle$$

$$F' : x \mapsto \theta^0(x)/x$$

$$I(F')(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^0(n)\, T^n}{n} = \frac{1}{p}\log\frac{(1-T)^p}{1-T^p}$$

Si $f \neq p$, puisque $\log Z_f = 0$, on a

$$J(x \mapsto \theta^0(x)\log\langle x\rangle)(Z_f^b) = \frac{-1}{p}\log\frac{(1-Z_f^b)^p}{1-Z_f^{bp}} .$$

Donc

$$L_p(1, \chi) = \frac{-\tau(\chi)}{f}\sum_{b=1}^{f}\bar{\chi}(b)\frac{1}{p}\log\frac{(1-Z_f^b)^p}{1-Z_f^{bp}} .$$

Si $f = p^e$, c'est la formule cherchée.

Si f n'est pas une puissance de p, on écrit

$$L_p(1-\chi) = \frac{-\tau(\chi)}{f}[\sum_{b=1}^{f}\bar{\chi}(b)\log(1-Z_f^b) - \frac{\chi(p)}{p}\sum_{b=1}^{f}\chi(bp)\log(1-Z_f^{bp}) .$$

Donc

$$L_p(1-\chi) = -(1-\frac{\chi(p)}{p})\frac{\tau(\chi)}{f}\sum_{b=1}^{f}\bar{\chi}(b)\log(1-Z_f^b) .$$

Si $f = p$, on veut calculer

$$\sum_{b=1}^{f}\bar{\chi}(b)\, J(x \mapsto \theta^0(x)\log\langle x\rangle)(Z_f^b) .$$

Or

$$\sum_{b=1}^{f}\bar{\chi}(b)\, J(x \mapsto \theta^0(x))\log\langle x\rangle)(Z_f^b)$$

$$= \lim_{T\to 1}[\sum_{b=1}^{f}\bar{\chi}(b)\, I(x \mapsto \frac{\theta^0(x)}{x})(Z_f^b T) + \log T\sum_{b=1}^{f}\bar{\chi}(b)\, I(x \mapsto \theta^0(x)\log x)(Z_f^b T).$$

$T \mapsto \sum_{b=1}^{f}\bar{\chi}(b)\, I(x \mapsto \frac{\theta^0(x)}{x})(Z_f^b T)$ est la fonction analytique qui prolonge la série de Taylor $\sum_{b=1}^{f}\bar{\chi}(b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta^0(n)}{n}Z_f^{bn}T^n$, convergente pour $|T| < 1$ et au voisinage de $T = 1$, fonction analytique qui peut s'écrire

$$\frac{1}{p-1}\sum_{b=1}^{f}\bar{\chi}(b)\log\frac{(1-Z_f^b T)^{p-1}}{p} .$$

D'où le résultat.

3. Analogue de la formule complexe $L(1, \chi) = \frac{1}{f}\sum_{b \bmod f}\chi(b)(\Gamma'(\{b/f\})/\Gamma(\{b/f\}))$.

Dans cette formule va intervenir la fonction Γ p-adique. Nous allons tout d'abord rappeler sa définition. Elle a été étudiée par DIAMOND [8] et MORITA [15]. La définition que l'on va donner est proche de celle de DIAMOND.

On part du fait que pour la fonction Γ complexe on a $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$, donc

$$\log \Gamma(s+1) - \log \Gamma(s) = \log s .$$

On va chercher une fonction p-adique qui satisfait cette équation fonctionnelle, donc l'analogue p-adique de $\log \Gamma$.

On utilise le résultat suivant [2].

Soit $\mathfrak{W}(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{Q}_p)$ l'espace de Banach des fonctions uniformément dérivables sur $\underset{\sim}{Z}_p$, muni de la norme usuelle sur cet espace. Soit Δ l'opérateur défini sur $\mathfrak{W}(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{Q}_p)$ à valeurs dans $(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{Q}_p)$ tel que

$$\Delta(g)(x) = g(x+1) - g(x) .$$

Alors Δ est un opérateur linéaire continu surjectif sur $\mathfrak{W}(\underset{\sim}{Z}_p , \underset{\sim}{Q}_p)$ et

$$J(f) = g'(0) \quad \text{si} \quad \Delta(g)(x) = f(x) .$$

On avait

$$L_p(1 , \chi) = \frac{1}{f} \sum_{a=1}^{f} \chi(a)\, J(x \mapsto \theta^0(xf+a) \log\langle xf+a\rangle) .$$

On pose $\log f = \log\langle f_1\rangle$, où f_1 est le facteur de f non divisible par p. On définit en outre la fonction analytique

$$x \mapsto \log(x + \frac{a}{f}) = \log f + \theta^0(xf+a) \log\langle xf+a\rangle .$$

Or $\sum_{a=1}^{f} \chi(a) \log f = 0$. Donc

$$L_p(1 , \chi) = \frac{1}{f} \sum_{a=1}^{f} \chi(a)\, J[x \mapsto \log(x + \frac{a}{f})] .$$

Donc

$$L_p(1 , \chi) = \frac{1}{f} \sum_{a=1}^{f} \chi(a)\, g'(0) ,$$

où g est définie par $g(x+1) - g(x) = \log(x + \frac{a}{f})$.

Donc $g'(0)$ est l'analogue p-adique de $\Gamma'(a/f)/\Gamma(a/f)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.) et FRESNEL (J.). - Fonctions zêta p-adiques des corps de nombres abéliens réels, Acta Arithm., Warszawa, t. 20, 1972, p. 353-384.

[2] CASSOU-NOGUÈS (P.). - Formes linéaires p-adiques et prolongement analytique, Thèse 3e cycle, Université de Bordeaux-I, 1971 (multigraphiée).

[3] CASSOU-NOGUÈS (P.). - Analogues p-adiques de quelques fonctions arithmétiques, Publications mathématiques de Bordeaux, Année 1974/75, p. 1-43.

[4] CASSOU-NOGUÈS (P.). - Prolongement analytique et valeurs aux entiers négatifs de certaines séries arithmétiques relatives à des formes quadratiques, Séminaire de Théorie des nombres de Bordeaux, 1975/76, exposé n° 4.

[5] CASSOU-NOGUÈS (P.). - Fonctions p-adiques attachées à des formes quadratiques, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 3e année, 1975/76, n° 16.

[6] COATES (J.). - Fonctions zêta partielles d'un corps de nombres totalement réel, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 16e année, 1974/75, n° 1, 9 p.

[7] DELIGNE (P.) and RIBET (K.). - Values of abelian L functions at negative

integers (à paraître).

[8] DIAMOND (J.). - The p-adic log gamma function and p-adic Euler constants (à paraître).

[9] FRESNEL (J.). - Valeurs des fonctions zêta aux entiers négatifs, Séminaire de Théorie des nombres de Bordeaux, Année 1970/71, exposé n° 27.

[10] IWASAWA (K.). - On p-adic L functions, Annals of Math., t. 89, 1969, p. 198-205.

[11] KLINGEN (H.). - Über die Werte der Dedekindschen Zeta-Funktion, Math. Annalen, t. 145, 1962, p. 265-272.

[12] KUBOTA (T.) und LEOPOLDT (H. W.). - Eine p-adische Theorie der Zetawerte, I: Einführung der p-adischen Dirichletschen L-Funktionen, J. reine und ang. Math., t. 214-215, 1964, p. 328-339.

[13] LEOPOLDT (H. W.). - Zur Arithmetik in abelschen Zahlkörpern, J. reine und ang. Math., t. 209, 1962, p. 54-71.

[14] LEOPOLDT (H. W.). - Eine p-adische Theorie der Zetawerte, II (à paraître).

[15] MORITA (Y.). - A p-adic analogue or the Γ function, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Section I-A, t. 22, 1975, p. 255-266.

[16] SERRE (J.-P.). - Cohomologie des groupes discrets, "Prospects in mathematics", p. 77-169. - Princeton, Princeton University Press, 1971 (Annals of Mathematics Studies, 70).

[17] SERRE (J.-P.). - Formes modulaires et fonctions zeta p-adiques, "Modular functions of one variable, III", p. 191-268; - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 350).

[18] SHINTANI (T.). - On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non positive integral place, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo (preprint).

[19] SIEGEL (C. L.). - Über die Fouriersche Koeffizienten von Modulformen, Gött. Nachr., t. 3, 1970, p. 15-56.

[20] ZAGIER (D.). - A Kronecker limit formula for real quadratic fields, Math. Annalen, t. 213, 1975, p. 153-184.

(Texte reçu le 20 juillet 1976)

Pierrette CASSOU-NOGUES
Mathématiques et Informatique
Université de Bordeaux-I
351 cours de la Libération
33405 TALENCE