JEAN-PAUL BEZIVIN

Idéaux de type fini d'algèbres de fonctions analytiques bornées

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 3, nº 1 (1975-1976), exp. nº 15, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1975-1976__3_1_A9_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
3e année, 1975/76, n° 15, 7 p.

15 mars 1976

IDÉAUX DE TYPE FINI D'ALGÈBRES DE FONCTIONS ANALYTIQUES BORNÉES

par Jean-Paul BEZIVIN.

On démontre, dans cet exposé, une proposition qui généralise un résultat dû à M. VAN DER PUT [3]. La preuve suit d'ailleurs pas à pas celle de cet auteur.

1. Notations et présentation du problème.

On note K un corps ultramétrique complet, algébriquement clos, V est son anneau de valuation, D le disque unité ouvert de K, et k le corps résiduel $k = V/D$.

B est l'algèbre de Banach sur K des fonctions analytiques bornées sur D, munie de la norme de la convergence uniforme sur D ; on note $K\{X\}$ le sous-algèbre de Banach de B des séries restreintes (c'est-à-dire des $f = \sum_{n\in N} a_n X^n$ vérifiant $\lim|a_n| = 0$), et $V\{X\}$ la boule unité de $K\{X\}$ (les séries restreintes à coefficients dans V).

Soit $I = (g_1, \ldots, g_s)$ un idéal de type fini de B. Dans [3], M. VAN DER PUT résoud le "Corona problem", c'est-à-dire montre que si

$$\inf \sup_{x\in D, 1\leq j\leq s} |g_j(x)| = \delta > 0 ,$$

alors l'idéal I est égal à B. On peut se poser le problème plus général suivant : Soit $g \in I$, on voit facilement qu'il existe alors $A > 0$ tel que l'on ait :

$$(*) \qquad \forall\ x \in D , \quad |g(x)| \leq A \sup_j |g_j(x)| .$$

On veut étudier la réciproque, cette inégalité implique-t-elle $g \in I$? On va montrer que (*) implique $g^2 \in I$, mais que l'on n'a pas $g \in I$ en général.

On va d'abord résoudre le même problème pour des idéaux de $V\{X\}$.

2. Résolution du problème pour $V\{X\}$.

On dispose donc d'un idéal de type fini de $V\{X\}$, I, engendré par s éléments $(g_1, \ldots, g_s)$. Il est facile de voir qu'alors $t_I(x) = \sup_j |g_j(x)|$ ne dépend que de I et non pas du système générateur choisi.

On va démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - *Soit* $g \in V\{X\}$ *tel que* $|g(x)| \leq t_I(x)$, $\forall\ x \in V$. *Alors* $g^2 \in I$, *et ce résultat est le meilleur possible en général*.

On va d'abord effectuer des réductions du problème.

LEMME 1. - <u>On peut supposer que</u> :

(i) $I \cap V \neq \{0\}$,

(ii) <u>Si</u> Φ <u>est l'homomorphisme canonique de</u> $V\{X\}$ sur $k[X]$, $\Phi(I) \neq \{0\}$, <u>engendré par un polynôme de degré</u> $d \geqslant 1$,

(iii) <u>les</u> g_i <u>sont des polynômes unitaires de degré</u> d , $\Phi(g_i) = \Phi(g_1)$, $\forall\ i$, <u>et</u> $g_1(0) = 0$.

<u>Preuve</u> (cf. [3]).

(i) Tout d'abord, dire que $I \cap V \neq \{0\}$, c'est dire que les g_i n'ont pas de zéros communs dans V .

Soit S le polynôme des zéros communs aux g_j , que l'on peut supposer être unitaire, et donc dans $V[X]$. On a alors :

$$\forall\ j\ ,\ \ g_j = g_j^* S \qquad \text{et} \qquad \forall\ x \in V\ ,\ \ |g_j(x)| \leqslant |S(x)|\ .$$

On en déduit :

$$|g(x)| \leqslant t_I(x) \leqslant |S(x)|\ .$$

Il est alors clair que $S|g$, donc $g = g^* S$, $g^* \in V[X]$. On a alors :

$$|g^*(x)| \leqslant \sup_j |g_j^*(x)|\ ,\ \ \forall\ x \in V\ ,$$

et donc $g^{*2} \in (g_j^*)$. Une multiplication par S^2 donne alors le résultat.

(ii) Dire que $\Phi(I) = \{0\}$, c'est dire que $\sup_j \|g_j\| < 1$; soit $\rho \in K^*$ tel que $|\rho| = \sup_j \|g_j\|$, et notons $\tilde{g}_j = \rho^{-1} g_j$. Il est clair que $\tilde{g}_j \in V\{X\}$, $\forall\ j$, et si l'on note $\tilde{g} = \rho^{-1} g$, on a $|\tilde{g}(x)| \leqslant \sup_j |\tilde{g}_j(x)|$. On en déduit $\tilde{g}^2 \in (\tilde{g}_j)$ et une multiplication par ρ^2 donne alors le résultat. Comme $\Phi(I)$ est un idéal de $k[X]$, il est engendré par un polynôme de degré $d \geqslant 0$; si $d = 0$, $1 \in \Phi(I)$, donc il existe élément de I qui s'écrit $1 - h$ avec $\|h\| < 1$, or un élément de ce type est invdrsible dans $V\{X\}$, donc $d = 0$ implique $I = V\{X\}$, on peut donc supposer $d \geqslant 1$.

(iii) Soit P un générateur de $\Phi(I)$, il existe alors un élément f_0 de I tel que $\Phi(f_0) = P$; f_0 , à un facteur inversible de $V\{X\}$ près, est alors un polynôme unitaire de degré d , on peut supposer $f_0 = X^d + \dots \in V[X]$. Quitte à diviser les g_j par f_0 , on peut supposer degré $g_j < d$ et $(f_0\ ,\ g_1\ ,\ \dots\ ,\ g_s)$ est alors un système générateur de I . Comme degré $g_j < d$, $\Phi(g_j) = 0$, donc $(f_0\ ,\ f_0 + g_1\ ,\ \dots\ ,\ f_0 + g_s)$ est un système de générateurs satisfaisant aux premières conditions de (iii); pour réaliser la troisième, il suffit de faire une translation sur la variable x .

On se place donc dans les conditions du lemme 1, et on poursuit la démonstration de la proposition.

Si $g \in V\{X\}$, et vérifie $|g(x)| \leqslant t_I(x)$, on peut toujours, en vue du résultat à démontrer, supposer que $g \in V[X]$ (il suffit de faire une division par g_1) et même de degré $\leqslant d-1$. On va faire la démonstration par récurrence sur d, en fait, on va démontrer que : <u>Si</u> Q <u>est un polynôme vérifiant</u> $|Q(x)| \leqslant t_I(x)$, <u>alors</u> $Q^2 \in (g_1, \dots, g_s) V[X]$. Le cas $d = 1$ est trivial, on se ramène à $(x+\lambda, x) = I$, et par division par X, à $Q = Cte = \theta$. On a donc

$$|\theta| \leqslant \sup(|x+\lambda|, |x|), \quad \forall x,$$

d'où $|\theta| \leqslant |\lambda|$, $\theta = \mu\lambda$ avec $\mu \in V$, soit $\theta = \mu(x+\lambda) - \mu x \in I$.

On suppose donc la proposition vraie si $d \leqslant n-1$.

<u>Cas</u> $\Phi(g_1) = \Phi(g_j) = X^d$. – On peut supposer $d^0 Q \leqslant d-1$. Soit $\rho \in K$, $|\rho| = \sup\{|a| \; ; \; \exists j, \; g_j(a) = 0\}$, on a $|\rho| < 1$. Les polynômes

$$\rho^{-d} g_j(\rho x) = \tilde{g}_j(x)$$

sont alors dans $V[X]$, et unitaires de degré d. Si l'on pose

$$\rho^{-d} Q(x) = \tilde{Q}(x),$$

$\tilde{Q} \in V[X]$ et vérifie $|\tilde{Q}(x)| \leqslant t_{\tilde{I}}(x)$, $\tilde{I} = (\tilde{g}_j)$.

Soit $\tilde{d}$ = degré d'un générateur de $\Phi(\tilde{I})$. Si $\tilde{d} < d$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, et il existe $T_j \in V[X]$ tels que

$$\tilde{Q}^2(x) = \sum_{j=1}^{j=s} T_j(x)\, \tilde{g}_j(x).$$

Quitte à diviser les T_j par $\tilde{g}_1$, on peut supposer que $\deg(T_j) \leqslant d-1$ pour $j \geqslant 2$; l'hypothèse $\deg(Q) \leqslant d-1$ implique alors $\deg(T_1) \leqslant d-1$. On a :

$$Q^2(x) = \sum_{j=1}^{j=s} \rho^d\, T_j(x/\rho)\, g_j(x),$$

et le fait que $\deg T_j \leqslant d$ implique $\rho^d\, T_j(x/\rho) \in V[X]$, ce qui donne le résultat.

Si par contre, $\tilde{d} = d$, on voit alors que $\Phi(\tilde{g}_j) = \Phi(\tilde{g}_1)$, $\forall j$, et $\Phi(\tilde{g}_1) \neq X^d$. On s'est donc ramené au cas où

$$\Phi(g_1) = \Phi(g_j), \quad \forall j, \quad \Phi(g_1) \neq X^d, \quad g_1(0) = 0.$$

On peut alors écrire $g_j = g_j^+ g_j^-$, où g_j^+ et g_j^- sont des polynômes unitaires, g_j^+ n'ayant que des zéros de module < 1, et g_j^- des zéros de module égal à 1.

On note I^+ l'idéal engendré par les g_j^+, et I^- l'idéal engendré par les g_j^-.

Il est clair que l'on a

$$|Q(x)| \leqslant t_{I^+}(x), \quad \forall x, \text{ et } \; |Q(x)| \leqslant t_{I^-}(x), \quad \forall x,$$

on en déduit $Q^2 \in I^+ \cap I^-$.

On a donc

$$Q^2 = \sum_1^s a_j^+ g_j^+ = \sum_1^s a_j^- g_j^-, \text{ avec } a_j^+, a_j^- \in V[X].$$

Soit $\alpha^+ = g_1^+ \cdots g_s^+$, $\alpha^- = g_1^- \cdots g_s^-$. Il vient alors $Q^2 \alpha^+$ et $Q^2 \alpha^- \in I$.

Mais $\Phi(\alpha^+)$ et $\Phi(\alpha^-)$ sont des polynômes premiers entre eux dans $h[X]$, donc il existe deux polynômes U_1, $U_2 \in V[X]$, et $h \in V[X]$, $\|h\| < 1$ tels que

$$U_1\, \alpha^+ + U_2\, \alpha^- = 1 - h .$$

On en déduit

$$Q^2(1 - h) = Q^2\, \alpha^+ U_1 + Q^2\, \alpha^- U_2 \in (g_1 , \ldots , g_s) V[X] .$$

D'autre part $I \cap V \neq \{0\}$, donc il existe $m \in \underset{\sim}{N}$, tel que $h^m \in I$. Par suite, $(1 + h + \ldots + h^{m-1})(1 - h)\, Q^2 = (1 - h^m)\, Q^2 = Q^2 - h^m Q^2 \in (g_1 , \ldots , g_s)\, V[X]$, d'où $Q^2 \in (g_1 , \ldots , g_s)\, V[X]$, ce qui termine la démonstration de la proposition 1. Donnons un exemple prouvant que l'on a obtenu le meilleur résultat possible :

$$I = (\mu^2 , x(x + \mu)) \quad \text{avec} \quad 0 < |\mu| < 1 , \text{ et } \quad g(x) = x\mu .$$

On vérifie $|g(x)| \leq t_I(x)$ et $g \notin I$.

3. Résolution du problème dans B.

On se donne un idéal $I = (g_1 , \ldots , g_s)$ de B, et $g \in B$ vérifiant

$$|g(x)| \leq A \sup_j |g_j(x)| , \quad \forall\, x \in D .$$

PROPOSITION 2. - <u>Dans ces conditions, on a</u> $g^2 \in I$, <u>et ce résultat est le meilleur possible en général</u>.

<u>Preuve</u>. - On peut clairement supposer $\|g_j\| \leq 1$, $\forall\, j$, et $A = 1$. Soit alors $\varepsilon > 0$, fixé, et $\rho_n \in D$, $|\rho_{n+1}| > |\rho_n|$, telle que $|\rho_n|^m \geq 1 - \varepsilon$, et

$$\lim |\rho_n| = 1 .$$

On pose $g_{j,n}(x) = g_j(\rho_n\, x)$, on a

$$g_{j,n} \in V\{X\} , \quad \forall\, j , \quad \forall\, n , \quad g(\rho_n\, x) = g_n(x) \in V\{X\} .$$

Si I_n est l'idéal de $V\{X\}$ engendré par les $g_{j,n}$, on a

$$|g_n(x)| \leq t_{I_n}(x) , \quad \forall\, x \in V ,$$

donc, d'après la proposition 1, $g_n^2 \in I_n$. Il existe donc des $\gamma_{j,n} \in V\{X\}$ tels que

$$g^2(\rho_n\, x) = \Sigma_1^s\, \gamma_{j,n}(x)\, g_{j,n}(x) .$$

On écrit

$$\gamma_{j,n}(x) = \Sigma_0^n\, a_{j,k}^{(n)}\, x^k + x^n\, \eta_{j,n}(x) = \theta_{j,n}(x) + x^n\, \eta_{j,n}(x)$$

d'où

$$g^2(\rho_n\, x) = \Sigma_1^s\, \theta_{j,n}(x)\, g_j(\rho_n\, x) + x^n\, \eta_n(x)$$

et donc

$$g^2(x) = \sum_1^s \theta_{j,n}(x/\rho_n)\, g_j(x) + x^n \mu_s(x) .$$

L'hypothèse $|\rho_n|^n \geqslant 1 - \varepsilon$, $\forall\, n$, implique alors que

$$\|\theta_{j,n}(x/\rho_n)\| \leqslant 1/(1 - \varepsilon) , \quad \forall\, j , \quad \forall\, n .$$

On peut alors appliquer une méthode due à M. VAN DER PUT [3], de limite généralisée. On pose $\psi(c) = \lim_{n\to\infty}(c_n)$ si $c = (c_n)$ est une suite convergente ; on prolonge ψ à l'espace de Banach des suites bornées en $\tilde{\psi}$, avec $\|\tilde{\psi}\| \leqslant 1 + \varepsilon$.

Si l'on note $\theta_{j,n}(x) = \sum_0^\infty a_{j,k}^{(n)} x^k$, il résulte de ce qu'on vient de dire que $\Lambda_{j,k} = (a_{j,k}^{(n)})$ est une suite bornée. Si l'on pose

$$a_{j,k} = \tilde{\psi}(\Lambda_{j,k}) \quad \text{et} \quad \theta_j(x) = \sum_0^\infty a_{j,k}\, x^k ,$$

on vérifie facilement que l'on a :

$$g^2(x) = \sum_1^s \theta_j(x)\, g_j(x)$$

et que $\theta_j \in B$, $\forall\, j$, ce qui termine la démonstration.

Il reste à donner un exemple d'idéal I et de fonction $g \in B$ tels que

$$|g(x)| \leq A \sup|g_j(x)| \quad \text{et} \quad g \notin I .$$

On suppose K maximalement complet, et on construit alors facilement deux fonctions g_1 et $g_2 \in B$ telles que

(i) g_1 et g_2 n'ont pas de zéros communs,

(ii) $J = (g_1 , g_2) \neq B$.

On considère alors $I = (g_1^2 , g_2(g_1 + g_2))$, on a $I \subset J$, donc $I \neq B$, et soit $g = g_1 g_2$. On vérifie facilement que $g \notin I$ et que

$$|g(x)| \leq \sup(|g_1^2(x)| , |g(x)|\,|g_1(x) + g_2(x)|) .$$

4. Quelques résultats sur B .

On a la proposition suivante

PROPOSITION 3. – *Si* K *est maximalement complet, l'algèbre* B *n'est pas noethérienne.*

On suit une méthode de [2].

On construit d'abord (g_1 , g_2) comme dans le contre-exemple de la fin de la proposition 2. On va montrer qu'il existe une chaîne strictement croissante d'idéaux de type fini , $J_s = (g_1 , g_2 , \ldots , g_s)$. Supposons J_s construit. D'après la construction de g_1 et g_2 , les g_j , $j \leq s$, n'ont pas de zéros communs. D'autre part, $J_s \neq B$. Il existe alors une suite $x_k \in D$, vérifiant

$$\sup_j |g_j(x_k)| = u_k \to 0 \quad \text{si} \quad k \to \infty .$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que x_k est une suite d'inter terpolation ([3] , [1]). Il existe alors une fonction $g_{s+1} \in B$ vérifiant

$$g_{s+1}(x_{2k}) = 1 , \quad g_{s+1}(x_{2k+1}) = 0 ,$$

l'idéal $J_{s+1} = (g_1 , \dots , g_{s+1})$ est différent de B , car

$$\sup_{j\leqslant s+1} |g_j(x_{2k+1})| = u_{2k+1} ,$$

et $u_{2k+1} \to 0$ si $k \to \infty$, et $g_{s+1} \notin J_s$ car, sinon, il existerait $A > 0$ tel que $|g_{s+1}(x)| \leqslant A \sup_j |g_j(x)|$, $\forall\ x \in D$; en prenant $x = x_{2k}$, on obtient $1 \leqslant Au_{2k} \to 0$, d'où contradiction.

On a comme conséquence facile le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. - <u>Les seuls idéaux maximaux de type fini de</u> B <u>sont les noyaux de morphismes</u> $f \to f(\alpha)$ <u>où</u> $\alpha \in D$.

Enfin, on peut démontrer une généralisation de la proposition 2.

PROPOSITION 4. - <u>Soit</u> $g_k \in B$, <u>telle que</u> $\lim \|g_k\| = 0$ <u>si</u> $k \to \infty$. <u>Soit</u> $g \in B$ <u>telle qu'il existe</u> $C > 0$ <u>vérifiant</u> :

$$\forall\ x \in D , \quad |g(x)| \leqslant C \sup_k |g_k(x)| .$$

<u>Alors il existe</u> $\theta_k \in B$, $\sup \|\theta_k\| < +\infty$, <u>tels que</u>

$$g^2(x) = \sum_1^\infty \theta_k(x)\, g_k(x) .$$

On utilise les mêmes méthodes, au moyen du lemme suivant :

LEMME 2. - <u>Soit</u> I <u>un idéal de</u> $V\{X\}$, <u>engendré par une suite</u> $g_k \in V\{X\}$ <u>telle que</u> $\|g_k\| \to 0$ <u>si</u> $k \to \infty$. <u>Alors</u> I <u>est de type fini</u>.

<u>Preuve</u>. - L'idéal J de $K\{X\}$ engendré par les g_k est principal, engendré par $P \in V[X]$, $\|P\| = 1$. On a donc, $\forall\ k$, $g_k = \theta_k P$, et $\exists\ n_0$ et des $b_j \in K\{X\}$ tels que $P = \sum_1^{n_0} b_j\, g_j$.

On en déduit

$$g_k = \sum_1^{n_0} \theta_k\, b_j\, g_j , \quad \forall\ k .$$

D'autre part, $\|g_k\| = \|\theta_k\| \|P\| = \|\theta_k\|$ donc $\|\theta_k\| \to 0$. Pour $k \geqslant k_0$, on aura donc, $\forall\ j$, $\|\theta_k\| \|b_j\| \leqslant 1$, d'où $g_k \in (g_1 , \dots , g_m)$ avec $m = \sup(k_0 , n_0)$, et la conclusion.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEZIVIN (Jean-Paul). - Interpolation de fonctions analytiques bornées, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 3e année, 1975/76, n° 3.

[2] KELLEHER (J. J.) and TAYLOR (B. A.). - Finitely generated ideals in rings of analytic functions, Math. Annalen, t. 193, 1971, p. 225-237.

[3] VAN DER PUT (Marius). - The non-archimedian Corona problem, "Table ronde d'a-

nalyse non archimédienne [1972, Paris], Bull. Soc. math. France, Mémoire 39-40, 1974, p. 287-317.

(Texte reçu le 5 avril 1976)

Jean-Paul BEZIVIN
163 rue de Charonne
75011 PARIS