GROUPE DE TRAVAIL
D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

PHILIPPE ROBBA

Solutions bornées des systèmes différentiels linéaires. Application aux fonctions hypergéométriques

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 3, n° 1 (1975-1976), exp. n° 5, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1975-1976__3_1_A3_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
3e année, 1975/76, n° 5, 16 p.
1er décembre 1975

SOLUTIONS BORNÉES DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES. APPLICATION AUX FONCTIONS HYPERGÉOMETRIQUES.

par Philippe ROBBA
(d'après un travail en commun avec B. DWORK)

Nous avions montré précédemment [6] (voir aussi [7]) que, pour que l'élément analytique η dans le disque $D(a\ ,\ 1^-)$ soit une dérivée logarithmique de fonction analytique dans ce disque, il était nécessaire et suffisant que η soit la limite uniforme dans ce disque de dérivées logarithmiques de fractions rationnelles. En terme d'opérateurs différentiels, cela signifie que, pour que l'opérateur $D - \eta$ possède une solution analytique dans le disque $D(a\ ,\ 1^-)$, il faut et il suffit qu'il existe des soltuions rationnelles approchées, c'est-à-dire une suite u_n de fractions rationnelles sans pôles dans $D(a\ ,\ 1^-)$, telle que $u_n(a) = 1$ et $(D - \eta)u_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Ce résultat jouait un rôle essentiel dans l'étude de la structure de Frobénius faible des équations différentielles du premier ordre.

Nous allons généraliser ce résultat au cas d'un système différentiel du premier ordre de m équations à m inconnues. Nous verrons qu'il possède une $m \times m$ matrice solution analytique bornée dans $D(a\ ,\ 1^-)$ si, et seulement si, il possède des $m \times m$ matrices rationnelles solutions approchées (avec une condition de minoration du déterminant pour assurer que le rang de ces matrices solutions approchées ne s'abaisse pas à la limite). Nous envisageons ce résultat comme une première étape dans l'étude de la structure de Frobénius des systèmes différentiels (cf. [4]).

Le résultat sur les systèmes différentiels du premier ordre se transcrit de façon standard en un résultat sur les opérateurs différentiels d'ordre m. Dans le cas du disque générique, on peut même obtenir des informations dans le cas où la dimension du noyau borné est plus petite que l'ordre de l'opérateur.

Nous traiterons quelques exemples numériques (équation hypergéométrique) dans l'esprit de cet exposé. Nous retrouverons ainsi, sans gros efforts de calcul, certains résultats de DWORK [2] (mais nous n'obtiendrons pas les résultats les plus importants, à savoir la structure de Frobénius forte de l'équation différentielle de Legendre).

Signalons que les démonstrations de cet exposé concernant les systèmes différentiels du premier ordre sont plus élémentaires que les démonstrations originelles dans le cas d'une équation du premier ordre. Nous utiliserons la méthode des limites banachiques introduite par VAN DER PUT [5] (cf. aussi [1]). Comme cette méthode nous semble très importante (elle joue un rôle analogue aux théorèmes de compacité dans les espaces fonctionnels en analyse classique), nous en avons fait un exposé détaillé.

Le paragraphe 3 correspond à l'exposé fait aux Journées ultramétriques de Marseille.

1. Limite banachique d'une suite bornée de fonctions.

1.1. – Soit Ω un corps valué ultramétrique maximalement complet. On sait [3] que le théorème de Hahn-Banach est satisfait pour tout espace normé ultramétrique sur Ω.

Soit $\ell^\infty(\Omega)$ l'espace des suites bornées muni de sa norme usuelle, et $c(\Omega)$ le sous-espace vectoriel des suites convergentes. Alors la forme linéaire sur $c(\Omega)$, qui à la suite convergente $\{a_n\}$ associe sa limite, se prolonge, de façon non unique, en une forme linéaire φ sur ℓ^∞ de norme 1. En se reportant à la démonstration du théorème de Hahn-Banach ultramétrique, on se convaincra qu'étant donnée une suite bornée non convergente $\{a_n\}$, il existe deux prolongements φ_1 et φ_2 tels que $\varphi_1(\{a_n\}) \neq \varphi_2(\{a_n\})$.

Si $\{a_n\} \in \ell^\infty$, on appellera $\varphi(\{a_n\})$ la limite banachique de la suite $\{a_n\}$ (sous-entendu subordonnée au choix du prolongement φ).

D'après la définition de φ, pour tous $\{a_n\}$ et $\{b_n\} \in \ell^\infty$ et $\lambda \in \Omega$,

(1.1.1) $$\varphi(\{a_n + b_n\}) = \varphi(\{a_n\}) + \varphi(\{b_n\}) ,$$

(1.1.2) $$\varphi(\{\lambda a_n\}) = \lambda\varphi(\{a_n\}) .$$

En fait, on a même plus : si $\{\lambda_n\}$ est une suite convergeant vers λ,

(1.1.3) $$\varphi(\{\lambda_n a_n\}) = \lambda\varphi(\{a_n\}) ;$$

en effet, la suite $\{(\lambda_n - \lambda)a_n\}$ converge vers 0, et donc sa limite banachique est 0.

Par contre, on <u>n'a pas toujours</u> (si Ω n'est pas localement compact)

$$\varphi(\{a_n b_n\}) = \varphi(\{a_n\})\,\varphi(\{b_n\}) .$$

(En effet, soit $\{a_n\}$ une suite bornée telle que $\inf_{i\neq j}|a_i - a_j| = \delta > 0$, soit $a = \varphi(\{a_n\})$. Posons $b_n = a_n - a$, on a $\varphi(\{b_n\}) = 0$. Sauf pour un indice au plus, soit n_0, on a $|b_n| \geqslant \delta$. Soit alors $c_n = b_n^{-1}$ pour $n \neq n_0$, la suite $\{c_n\}$ est bornée, et alors $1 = \varphi(\{b_n c_n\}) \neq \varphi(\{b_n\})\,\varphi(\{c_n\}) = 0$.)

On a enfin

(1.1.4) $$\varphi(\{a_n\}) \leqslant \sup_n |a_n| ,$$

et même (vérification laissée au lecteur)

$$\varphi(\{a_n\}) \leqslant \lim_n \sup |a_n| ,$$

1.2. — On notera $\mathfrak{a}_a$ (resp. W_a) l'espace vectoriel des fonctions analytiques (resp. analytiques bornées) dans le disque $D(a, 1^-)$ ($|a| \leq 1$).

Pour $u = \sum a_n (x - a)^n \in \mathfrak{a}_a$, et $\rho \leq 1$, on pose

$$\|u\|_\rho = |u|_a(\rho) = \sup_n |a_n| \rho^n .$$

La famille de normes $\| \ \|_\rho$, $\rho < 1$, définit une topologie métrisable sur $\mathfrak{a}_a$ qui en fait un espace de Fréchet. Muni de la norme $\| \ \|_1$, W_a est un espace de Banach.

Rappelons que $u \in \mathfrak{a}_a$ est dite à croissance logarithmique d'ordre α si

$$\|u\|_\rho = O((\log 1/\rho)^\alpha) \quad \text{lorsque} \quad \rho \to 1 .$$

On note W_a^α l'espace des fonctions à croissance logarithmique d'ordre α, ainsi $W_a = W_a^1$. Muni de la norme

$$\|u\| = \sup_n \frac{|a_n|}{(n+1)^\alpha}$$

W_a^α est un espace de Banach.

Une suite $\{u_k\}$ de fonctions de $\mathfrak{a}_a$ est dite <u>bornée</u> si, pour tout $\rho < 1$, la suite $\|u_k\|_\rho$ reste bornée.

Un prolongement φ de la forme linéaire limite ayant été choisi, on appellera <u>limite banachique de la suite bornée</u> $\{u_k = \sum_n a_{kn}(x - a)^n\}$ de fonctions de $\mathfrak{a}_a$, la fonction $u = \sum_n a_n (x - a)^n$ dont les coefficients de Taylor a_n sont les limites banachiques des suites $\{a_{kn}\}_{k \in \mathbb{N}}$; $a_n = \varphi(\{a_{kn}\})$. On écrira $u = \varphi(\{u_n\})$.

1.3. <u>Propriétés des limites banachiques</u>.

PROPOSITION. — <u>La limite banachique</u> φ <u>ayant été définie, pour toutes suites</u> $\{u_k\}$ <u>et</u> $\{v_k\}$ <u>bornées dans</u> $\mathfrak{a}_a$:

(i) $\varphi(\{u_k + v_k\}) = \varphi(\{u_k\}) + \varphi(\{v_k\})$,

(ii) <u>pour tout</u> $\rho \leq 1$, $\|\varphi\{u_k\}\|_\rho \leq \sup_k \|u_k\|_\rho$,

(iii) <u>si</u> $\{u_k\}$ <u>est une suite bornée dans</u> W_a^α, $\varphi(\{u_k\}) \in W_a^\alpha$

(iv) <u>si</u> $\{v_k\}$ <u>est une suite convergeant vers</u> v <u>dans</u> $\mathfrak{a}_a$,

$$\varphi(\{u_k v_k\}) = v\varphi(\{u_k\})$$

(v) <u>pour tout</u> $x \in D(a, 1^-)$, $\varphi(\{u_k(x)\}) = \varphi(\{u_k\})(x)$

(vi) $\varphi(\{u_k'\}) = \varphi(\{u_k\})'$.

<u>Remarques</u>.

(i) On n'a pas toujours

$$\varphi(\{u_k v_k\}) = \varphi(\{u_k\}) \varphi(\{v_k\}) .$$

(relire le paragraphe précédent).

Il en résulte que si (grâce à (i), (iv), (vi) en particulier) la limite banachique est bien adaptée pour obtenir des théorèmes d'existence dans les équations différentielles linéaires, elle ne l'est pas dans le cas des équations non linéaires (cf. § 1.6).

(ii) A priori, la définition de la limite banachique $\varphi(\{u_k\})$ dépend non seulement de φ, mais du choix du centre a du disque $D(a, 1^-)$. La propriété (v) montre que cette définition ne dépend que de φ.

Démonstration. - (i) découle de la linéarité (1.1.1), (ii) de la continuité (1.1.4) ainsi que (iii), et (vi) découle de (1.1.2).

Si $u_k = \sum a_{kn}(x - a)^n$, $v_k = \sum b_{kn}(x - a)^n$ et $u_k v_k = \sum c_{kn}(x - a)^n$, alors $c_{kn} = \sum_{i=0}^{n} a_{ki} b_{k(n-i)}$. Si on suppose que v_k converge vers $v = \sum b_n(x - a)^n$, alors, pour chaque n, $\{b_{kn}\}$ converge vers b_n et donc, en vertu de (1.1.1) et (1.1.3), $\varphi(\{c_{kn}\}) = \sum_{i=0}^{n} b_{n-i}\, \varphi(a_{ki})$ ce qui démontre (iv).

Enfin, pour tout $x \in D(a, 1^-)$, la série $\sum_n (x - a)^n \{a_{n_k}\}$ converge dans ℓ^∞ ~~vers~~ la suite de terme général $u_k(x)$. Comme φ est une forme linéaire continue, il en résulte que

$$\varphi(\{u_k(x)\}) = \sum_n (x - a)^n \{a_{n_k}\} = \varphi(\{u_k\})\ (x) .$$

1.4. Unicité et convergence.

PROPOSITION. - Soit $\{u_k\}$ une suite bornée de $\mathfrak{A}_a$. Si la suite u_k ne converge pas dans $\mathfrak{A}_a$, il existe deux limites banachiques φ_1 et φ_2 telles que $\varphi_1(\{u_k\}) \neq \varphi_2(\{u_k\})$.

Démonstration. - Pour une suite bornée d'éléments de $\mathfrak{A}_a$, la convergence dans $\mathfrak{A}_a$ coïncide avec la convergence coefficient à coefficient (vérification laissée au lecteur). Donc si la suite $\{u_k\}$ ne converge pas dans $\mathfrak{A}_a$, avec

$$u_k = \sum a_{kn}(x - a)^n ,$$

il existe un indice n_0 tel que la suite $\{a_{kn_0}\}$ ne converge pas dans Ω, et par conséquent (cf. § 1.1) il existe des prolongements φ_1 et φ_2 tels que

$$\varphi_1(\{a_{kn_0}\}) \neq \varphi_2(\{a_{kn_0}\}) ,$$

d'où $\varphi_1(\{u_k\}) \neq \varphi_2(\{u_k\})$.

Application. - Supposons que nous cherchions une solution dans $\mathfrak{A}_a$ d'un certain problème, par exemple la solution a d'une équation différentielle linéaire à coefficients analytiques $Lu = 0$.

Supposons que nous trouvions une famille bornée u_k de solutions de problèmes approchés, telle que toute limite banachique de la suite u_k soit solution de notre problème initial. Par exemple, si $Lu_k = \varepsilon_k$ tend vers 0 dans $\mathfrak{a}_a$ quand $k \to \infty$, alors en vertu de la proposition 1.3 pour toute limite banachique u de la suite u_k on aura $Lu = \lim \varepsilon_k = 0$.

Si l'on sait par ailleurs que le problème posé a une solution unique, il résultera alors de la proposition 1.4 qu'en fait la suite u_k de solutions approchées converge vers la solution exacte u dans $\mathfrak{a}_a$. Par exemple, si l'opérateur L possède au plus une solution analytique u, telle que $u(a) = 1$, et si l'on suppose que les u_k vérifient $u_k(a) = 1$, on en déduit que la suite u_k converge vers u dans $\mathfrak{a}_a$.

1.5. <u>Cas d'un corps non maximalement complet</u>. - Si Ω n'est pas maximalement complet, le théorème de Hahn-Banach n'est plus vrai. Mais on possède la version affaiblie suivante :

Si V est un espade vectoriel normé sur Ω complet de type dénombrable (c'est-à-dire qu'il existe une famille dénombrable totale dans V), et si f est une forme linéaire continue sur le sous-espace vectoriel U, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un prolongement $\tilde{f}$ de f à V tel que $\|\tilde{f}\|_V \leqslant (1 + \varepsilon)\|f\|_U$.

Si alors on considère une suite de fonctions $\{u_k\}$ bornée dans $\mathfrak{a}_a$,

$$u_k = \sum_n a_{kn}(x - a)^n ,$$

les suites $\{a_{kn}\}_{k\in N}$ définies pour tous les n entiers sont bornées. Soit V la fermeture dans $\tilde{\ell}^{\infty}$ de l'espace vectoriel engendré par $c(\Omega)$ et les suites $\{a_{kn}\}$ pour $n \in \underset{\sim}{N}$, V est de type dénombrable. La forme linéaire limite définie sur $c(\Omega)$ se prolonge donc en une forme linéaire continue φ sur V avec

$$\|\varphi\| \leqslant 1 + \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ choisi à l'avance}) .$$

Pour toute suite de fonctions $w_k = \sum b_{kn}(x - a)^n$ telle que, pour tous les n, la suite $\{b_{kn}\}$ appartienne à V ; on peut donc définir la pseudo-limite $\varphi(\{w_n\})$. C'est en particulier le cas pour les suites $\{u_k\}$, $\{u_k'\}$, $\{v_k u_k\}$, où v_k est une suite convergeant dans $\mathfrak{a}_a$. Il est alors clair que la proposition 1.3 reste valable à l'exception de (ii) qui est remplacé par

(ii^{bis}) Pour tout $\rho < 1$, $\|\varphi(\{u_k\})\|_\rho \leqslant (1 + \varepsilon) \sup_k \|u_k\|_\rho$.

Pour trouver des exemples d'utilisation de cette méthode, voir [5] § 4.3, et [1].

Observons que, dans le cas où le problème étudié (cf. § 1.4) possède au plus une solution, on peut toujours plonger Ω dans une extension maximalement complète Ω' et définir la limite banachique dans Ω'. Si les solutions approchées u_k ont leurs coefficients dans Ω, alors a priori la limite banachique $u = \varphi(\{u_k\})$ a ses coefficients dans Ω', mais en vertu de l'unicité, on sait (§ 1.4) que les solutions approchées u_k convergent vers u coefficient à coefficient donc, comme Ω est complet, les coefficients de u sont dans Ω.

1.6. Cas d'un corps localement compact.

THÉORÈME DE MONTEL. - Supposons Ω localement compact. De toute suite bornée de fonctions de $\mathfrak{a}_a$, on peut extraire une sous-suite convergeant dans $\mathfrak{a}_a$.

En d'autres termes, tout sous-ensemble borné de $\mathfrak{a}_a$ est relativement compact. On voit que $\mathfrak{a}_a$ possède la propriété de Montel.

Remarques.

(i) Il est évidemment exclu que les bornés de W_a^α soient relativement compacts, puisqu'un espace vectoriel localement compact est de dimension finie. Mais on voit que de toute suite bornée de fonctions de W_a^α, on peut extraire une sous-suite qui converge, dans $\mathfrak{a}_a$, vers une limite appartenant à W_a^α. Ce résultat plus faible peut suffire dans les applications.

(ii) Ce critère de compacité permet de traiter des problèmes non linéaires.

Principe de la démonstration. - Soit $\{u_k\}$ une suite bornée dans $\mathfrak{a}_a$,

$$u_k = \sum_n a_{kn}(x-a)^n .$$

Pour $\rho < 1$, on a, pour tout k, $\sup_n |a_{kn}| \rho^n \leq M_\rho$, ce qui montre que, pour chaque n, la suite $\{a_{kn}\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée. Comme Ω est localement compact, on voit, en appliquant le procédé diagonal, qu'il existe une suite d'entiers k_i telle que la sous-suite $\{u_{k_i}\}$ converge, coefficient à coefficient, vers une limite $u = \sum a_n(x-a)^n$ quand $i \to \infty$. On vérifie alors que, pour tout $\rho < 1$, $\sup_n |a_n| \rho^n \leq M_\rho$, ce qui montre que $u \in \mathfrak{a}_a$. Enfin on vérifie sans peine que pour une suite bornée de $\mathfrak{a}_a$ la convergence dans $\mathfrak{a}_a$ coïncide avec la convergence coefficient à coefficient.

2. Solutions approchées d'un système différentiel linéaire.

2.1. - Dans ce paragraphe, K désigne un corps valué ultramétrique complet, et Ω une extension valuée algébriquement close et maximalement complète.

On suppose également qu'il existe un point t de Ω, appelé point générique, tel que $|t| = 1$ et que, dans le corps résiduel $\overline{\Omega}$, $\overline{t}$ soit transcendant sur le corps résiduel $\overline{K}$.

E désignera le complété de $K(x)$ pour la norme de Gauss, il s'identifie à l'espace des eléments analytiques à coefficients dans K sur le disque générique $D(t, 1^-)$.

On notera $H(\Delta)$ l'espace des éléments analytiques à coefficients dans K sur Δ.

2.2. THÉORÈME. - Soit G une $n \times n$ matrice à coefficients dans $\mathfrak{a}_a$. Alors le système différentiel $Y' = GY$ possède m solutions linéairement indépendantes

<u>dans</u> $(\mathcal{A}_a)^n$ <u>(resp.</u> W_a^α) <u>si, et seulement si, il existe une suite</u> M_k <u>de</u> $n \times m$ <u>matrices à coefficients polynomiaux, bornée dans</u> $(\mathcal{A}_a)^{nm}$ <u>(resp.</u> $(W_a^\alpha)^{nm}$<u>) telle</u> <u>que l'un des mineurs d'ordre</u> m <u>de</u> M_k <u>soit, au point</u> a <u>, minoré en module par</u> <u>une constante</u> $\delta > 0$ <u>indépendante de</u> k <u>, et telle que</u> $M_k' - GM_k$ <u>converge vers</u> 0 <u>dans</u> $(\mathcal{A}_a)^{nm}$.

<u>Démonstration.</u>

(i) Si le système possède n solutions linéairement indépendantes, il existe une $n \times m$ matrice M , à coefficients dans $\mathcal{A}_a$ (resp. W_a^α) , telle que

$$H' - GH = 0 .$$

De plus, d'après le principe d'unicité de Cauchy les vecteurs colonnes de H sont linéairement indépendants en a , et donc il existe un mineur d'ordre m de K qui n'est pas nul en a .

Si $u \in \mathcal{A}_a$, $u = \sum_s a_s(x-a)^s$, on notera $u^{(k)}$ le polynôme

$$u^{(k)} = \sum_{s=0}^{k} a_s(x-a)^s .$$

Il est clair que $u^{(k)} \to u$ dans $\mathcal{A}_a$ quand $k \to +\infty$, et que la suite $\{u^{(k)}\}$ est bornée dans $\mathcal{A}_a$ (resp. dans W_a^α si $u \in W_a^\alpha$) .

Soient alors h_{ij} les coefficients de H . On peut supposer que

$$\det(h_{ij}(a))_{1\leq i,j\leq m} \neq 0 .$$

Posons $H_k = (h_{ij}^{(k)})$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Il est clair que la suite H_k est bornée dans $(\mathcal{A}_a)^{nm}$ (resp. $(W_a^\alpha)^{nm}$) . Comme $H_k \to H$ dans $(\mathcal{A}_a)^{nm}$, $H_k' - GH_k \to 0$ dans $(\mathcal{A}_a)^{nm}$ quand $k \to \infty$. Enfin

$$|\det(h_{ij}^{(k)}(a))_{1\leq i,j\leq m}| = |\det(h_{ij}(a))_{1\leq i,j\leq m}| = \delta > 0 .$$

(ii) Réciproquement, soit H_k vérifiant les hypothèses de l'énoncé. Soit A la $m \times n$ matrice $A = (h_{ij}^{(k)}(a))_{1\leq i,j\leq m}$ où $h_{ij}^{(k)}$ sont les coefficients de H_k , on peut supposer, quitte à permuter les indices i , que $|\det A| \geq \delta > 0$. Posons $U_k = H_k A^{-1}$. Alors la suite $\{U_k\}$ possède les mêmes propriétés que la quite $\{H_k\}$ et, de plus, $u_{ij}^{(k)}(a) = \delta_{ij}$ pour $1 \leq i , j \leq m$.

Comme les suites $(u_{ij}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ sont, pour chaque couple (i , j) , bornées dans $\mathcal{A}_a$, on peut considérer leurs limites banachiques associées à φ . Soit

$$U = (\varphi(u_{ij}^{(k)})) .$$

Alors, d'après la proposition 1.3, $U' - GU = \varphi(H_k' - GH_k) = 0$, les coefficients de U appartiennent à $\mathcal{A}_a$ (resp. W_a^α) , et enfin $\varphi(\{u_{ij}^{(k)}\})(a) = \delta_{ij}$ pour $1 \leq i , j \leq m$, ce qui montre que les vecteurs colonnes de U sont linéairement indépendants.

<u>Remarque.</u> - Si $m = n$, il résulte de l'unicité de la matrice U vérifiant

$U' - GU = 0$ et $U(a) = (\delta ij)$, que la suite U_k converge vers U dans $(\mathfrak{C}_a)^{n^2}$.

2.3. — Si les coefficients de G sont définis sur plusieurs classes résiduelles, alors les solutions approchées du système différentiel que nous avons définies dans la classe $D(a, 1^-)$ ne sont pas forcément des solutions approchées dans une autre classe, $D(b, 1^-)$. En effet, si des fractions rationnelles, par exemple, sans pôles dans $D(a, 1^-) \cup D(b, 1^-)$ convergent vers 0 dans $\mathfrak{C}_a$, on ne peut rien dire de leur comportement dans $D(b, 1^-)$; par contre, si elles convergent uniformément vers 0 dans $D(a, 1^-)$, alors elles convergent uniformément vers 0 dans $D(b, 1^-)$. Le théorème suivant apporte donc une précision intéressante. On pose $\Delta = D(a, 1^-)$.

THÉORÈME. — <u>Soit</u> G <u>une</u> $n \times n$ <u>matrice à coefficients dans</u> $H(\Delta)$. <u>Si le système différentiel</u> $Y' = GY$ <u>possède</u> n <u>solutions analytiques bornées dans</u> $D(a, 1^-)$ <u>linéairement indépendantes, il existe une suite</u> H_k <u>de</u> $n \times n$ <u>matrices à coefficients fractions rationnelles sans pôle dans</u> Δ, <u>bornées dans</u> W^{n^2}, <u>avec, pour tout</u> k, $|\det H_k(a)| \geq \delta > 0$, <u>telle que</u> $H'_k - GH_k$ <u>converge uniformément vers</u> 0 <u>dans</u> $D(a, 1^-)$.

Il serait intéressant d'obtenir un théorème similaire lorsque le nombre de solutions bornées indépendantes est plus petit que n.

<u>Démonstration</u>. — Il existe une $n \times n$ matrice H à coefficients dans W telle que $H' - GH = 0$. De plus, d'après le théorème d'unicité de Cauchy, $\det M$ ne s'annule jamais dans $D(a, 1^-)$, donc $|\det M(x)|$ reste constant dans $D(a, 1^-)$, et M^{-1} a donc ses coefficients dans W. Posons $F(x, z) = M(x)\, M(x+z)^{-1}$ avec $x \in \Delta$ et $z \in D(0, 1^-)$. On a

(1) $$F(x, z) = \sum_{s \geq 0} \frac{M_s(x)}{s!} z^s$$

avec $M_s(x)$, $n \times n$ matrice à coefficients dans W, et comme $F(x, z)$ est bornée sur $\Delta \times D(0, 1^-)$, il existe une constante C telle que

(2) $$\left\|\frac{M_s}{s!}\right\|_\Delta \leq C \quad \text{pour tout } s.$$

Comme $\frac{\partial}{\partial x} F = GF + \frac{\partial}{\partial z} F$, on a

(3) $$M_{s+1}(x) = M'_s(x) - G(x)\, M_s(x) \quad \text{et} \quad M_0(x) = I.$$

On pose

(4) $$H_k(x) = \sum_{s=0}^{k} \frac{M_s}{s!}(x)(a-x)^s.$$

(Observons que lorsque $k \to \infty$, H_k converge dans $\mathfrak{C}_a$ vers

$$F(x, a-x) = H(x)\, H(a)^{-1}$$

qui est donc la matrice solution du système dont la valeur en a est la matrice unité).

On trouve alors, en tenant compte des relations (3),

$$(5) \qquad H'_k(x) = G(x)\, H_k(x) + \frac{M_k(x)}{(k-1)!}(a-x)^{k-1}$$

et donc, d'après la majoration (2),

$$\|H'_k - GH_k\|_\Delta \leq C|k| .$$

On voit donc que si l'on prend k de la forme $k = p^\nu$, $H'_k - GH_k$ converge vers 0 uniformément sur Δ lorsque $\nu \to +\infty$.

Par ailleurs, on a $H_k(a) = I$, et donc $|\det H_k(a)| = 1$ pour tout k .

Enfin, comme les coefficients de G appartiennent à $H(\Delta)$, il résulte des formules de récurrence (3) que les coefficients de M_s et donc de H_k sont des éléments analytiques sur Δ .

Le théorème est donc démontré sauf pour le fait que les coefficients de nos matrices solutions approchées sont des éléments analytiques et non des fractions rationnelles. Mais comme, par définition, tout élément analytique sur Δ peut être approché uniformément sur Δ par des fractions rationnelles sans pôles dans Δ , le théorème s'ensuit facilement.

2.4. Remarque. - Il serait souhaitable de pouvoir préciser dans le théorème précédent que les fractions rationnelles ont leurs coefficients dans K .

Or, dans la démonstration, les M_s ont leurs coefficients dans $H(\Delta)$, donc si $a \in K$, les H_k ont leurs coefficients dans $H(\Delta)$ donc ceux-ci peuvent être approchés uniformément par des fractions rationnelles à coefficients dans K . Mais ce n'est plus le cas si $a \notin K$, par exemple si $a = t$ est le point générique.

Dans la démonstration, au lieu de définir H_k par la relation (4), on aurait pu poser

$$H_k(x) = \sum_{s=0}^{k} \frac{M_s(x)}{s!} (-x)^s .$$

Alors H_k aurait eu ses coefficients dans $H(\Delta)$, et la relation (5) subsisterait, donc le fait que $\|H'_k - GH_k\|_\Delta \to 0$ si $k = p^\nu$ et $\nu \to \infty$. Mais alors je ne sais pas montrer que $|\det H_k(a)|$ reste minoré par un $\delta > 0$.

2.5. Cas des équations différentielles linéaires d'ordre n . — On sait que toute équation différentielle linéaire d'ordre n est de façon canonique équivalente à un système différentiel $n \times n$ du premier ordre. On déduit donc sans peine du théorème 2.3 le résultat suivant.

THÉORÈME. - Soit L un opérateur différentiel linéaire d'ordre n à coefficients dans $H(\Delta)$. Alors L possède n solutions analytiques bornées dans Δ linéairement indépendantes si, et seulement si, il existe une suite

$$Y_k = (y_{1k} , \dots y_{nk})$$

de fractions rationnelles sans pôles dans Δ , uniformément bornées sur Δ , telle que les wronskiens des familles Y_k vérifient pour tout k

$$|W(y_{1k} , \dots , y_{nk})(a)| \geqslant \delta > 0$$

et que, pour tout i , Ly_{ik} converge vers 0 uniformément sur Δ quand $k \to \infty$.

2.6. - Si l'on se place dans le disque générique, le résultat précédent subsiste lorsque le nombre de solutions bornées est plus petit que l'ordre de L .

THÉORÈME. - Soit $L \in E[D]$. Soit m la dimension du noyau borné de L dans le disque générique $D(t , 1^-)$. Alors il existe m solutions approchées fractions rationnelles.

L'expression vague "il existe m solutions approchées" doit bien entendu être remplacée par une formulation plus rigoureuse inspirée de l'énoncé du théorème 2.5.

Démonstration. - On sait [9] qu'il existe $R \in E[D]$ tel que

noyau borné de L à t = noyau de R à t .

Il suffit alors d'appliquer le théorème 2.5 à l'opérateur R .

3. Étude de l'équation hypergéométrique.

3.1. - Nous utiliserons le résultat suivant. (Ici $\Delta = D(0 , 1^-)$.)

LEMME. - Soit $L \in H(\Delta)[D]$ d'ordre n ayant dans $\Delta = D(0 , 1^-)$ une seule singularité régulière en 0 . Alors si L possède n solutions linéairement indépendantes analytiques bornées dans $D(t , 1^-)$, pour tout $c \in D(0 , 1^-)$, $c \neq 0$, L possède n solutions linéairement indépendantes analytiques bornées dans $D(c , |c|^-)$.

Démonstration. - Soit, pour $m \in \mathbb{N}$,

$$\frac{D^m}{m!} = \sum_{j=0}^{n-1} b_{m,j} D^j \mod L .$$

Les $b_{m,j}$ sont des éléments méromorphes dans Δ . Notre hypothèse est que les $b_{n,j}$ ont juste un pôle d'ordre au plus $n - j$ en 0 . On en déduit alors, par récurrence sur m , que les $b_{m,j}$ ont simplement un pôle en 0 d'ordre $\leqslant m+n-j$.

Par ailleurs, si L a toutes ses solutions bornées dans $D(t , 1^-)$, il existe M tel que, pour tous m et j , $|b_{m,j}|_{Gauss} \leqslant M$ (cf. [9]).

On aura alors, pour tout $c \in D(0 , 1^-)$, $c \neq 0$,

$$|b_{m,j}(c)| \leqslant |b_{m,j}|_0 (|c|) \leqslant \frac{1}{|c|^{m+n-j}} |b_{m,j}|_0 (1) \leqslant \frac{M}{|c|^{m+n-j}} ,$$

et ceci entraîne que toutes les solutions de L au voisinage de c convergent dans $D(c\,,\,|c|^-)$, et sont bornées dans ce disque.

3.2. - Dorénavant $K = \underset{\sim}{Q}_p$. Nous nous intéressons à l'équation hypergéométrique (associée à l'opérateur $L = x(1-x)D^2 + (1-(a+b+1)x)D - ab$)

$$x(1-x)u'' + (1-(a+b+1)x)u' - abu = 0 .$$

0 est une singularité régulière, et son équation indicielle est $\alpha^2 = 0$ (Pour la terminologie et les propriétés de l'équation hypergéométrique dans $\underset{\sim}{C}$, cf. [10]).

Cette équation possède une solution analytique au voisinage de 0

$$u(x) = F(a\,,\,b\,;\,1\,;\,x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(a)_n\,(b)_n}{(n!)^2}\,x^n = \sum_{n\geq 0} c_n\,x^n$$

avec

$$\begin{cases}(\theta)_0 = 1\\ (\theta)_n = \theta(\theta+1)\,\ldots\,(\theta-n)\,.\end{cases}$$

Elle possède une deuxième solution

$$v(x) = u(x)\log x + \psi(x)$$

où

$$\psi(x) = u(x)\int\left[\frac{(1-x)^{a+b}}{u^2(x)\,x} - \frac{1}{x}\right]dx\,.$$

Dans $\underset{\sim}{C}_p$, u vérifie formellement l'équation différentielle, donc est solution au voisinage de 0 et, de plus, si a et b appartiennent à $\underset{\sim}{Z}_p$,

$$c_n = \frac{(a)_n\,(b)_n}{(n!)^2} \in \underset{\sim}{Z}_p\,,$$

donc u est analytique bornée dans $D(0\,,\,1^-)$. Quant à $v(x)$, elle définit une solution au voisinage du point c (appartenant aux domaines de définitionsde $u(x)$ et $\psi(x)$ à condition de remplacer $\log x$ par $\log(x/c)$. On voit à partir de son expression que $\psi(x)$ converge dans $D(0\,,\,1^-)$, on a donc, pour tout $c \in D(0\,,\,1^-)$, une deuxième solution $u(x)\log(x/c) + \psi(x)$ analytique non bornée dans $D(c\,,\,|c|^-)$.

Il résulte alors du lemme 3.1 (aved $n = 2$) que la dimension du noyau borné de L dans le disque générique $D(t\,,\,1^-)$ est au plus 1. Mais comme cette dimension est supérieure ou égale à celle du noyau borné de L dans $D(0\,,\,1^-)$ ([9], théorème 6.4), on trouve que cette dimension est 1. Il en résulte que, dans les autres classes résiduelles, L a au plus (à un facteur constant près) une solution analytique bornée. Nous nous proposons de déterminer les classes où L possède une solution bornée.

3.3. - On vérifie sans peine que $\sum \alpha_n\,x^n$ est solution de L mod $p^j\,\underset{\sim}{Z}_p[[x]]$ si, et seulement si,

$$n^2 \alpha_n \equiv (n + a)(n + b)\alpha_{n-1} \mod p^j .$$

Bien entendu, $n^2 c_n = (n + a)(n + b)c_{n-1}$ pour tout n. Par conséquent, si $g = \mathrm{ord}_p\, a$ et $h = \mathrm{ord}_p\, b$, on voit que, pour $j > g + h$ et $n = p^j$, on a

$$\mathrm{ord}\, c_{p^j-1} \geqslant 2j - g - h .$$

Le polynôme tronqué

$$P_j(x) = \sum_{n=0}^{p^j-1} c_n x^n = \sum_{n=0}^{p^j-1} \frac{(a)_n (b)_n}{n!^2} x^n$$

est donc solution de L modulo $p^{2j-g-h} \underset{\sim}{Z}_p[[x]]$ (pour $j > g + h$).

Ceci s'exprime encore en disant que $|LP_j|_{\mathrm{gauss}} \to 0$ lorsque $j \to +\infty$.

La suite P_j est donc une "suite de solutions approchées". Nous allons déterminer les classes résiduelles où les P_j s'annulent.

3.4. - On rappelle que le produit de Hadamard des séries $u = \sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $v = \sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$ est la série

$$u \perp v = \sum_{n\geqslant 0} u_n v_n x^n .$$

Il est clair que la fonction hypergéométrique s'écrit comme produit de Hadamard

$$F(a , b ; 1 ; x) = (1 - x)^{-a} \perp (1 - x)^{-b} .$$

Comme a et b appartiennent à $\underset{\sim}{Z}_p$, on peut écrire

$$a = - a_0 + pa^{(1)} , \qquad b = - b_0 + pb^{(1)} ,$$

avec $a_0 , b_0 \in [0 , 1 , \dots , p - 1]$, $a^{(1)} , b^{(1)} \in \underset{\sim}{Z}_p$.

Alors on a

$$(1 - x)^{-a} = (1 - x)^{a_0} (1 - x)^{-pa^{(1)}} \equiv (1 - x)^{a_0} (1 - x^p)^{-a^{(1)}} \mod p \underset{\sim}{Z}_p[[x]]$$

et

$$(1 - x)^{-b} \equiv (1 - x)^{b_0} (1 - x^p)^{-b^{(1)}} \mod p \underset{\sim}{Z}_p[[x]] .$$

Comme $(1 - x)^{a_0}$ et $(1 - x)^{b_0}$ sont des polynômes de degré $\leqslant p - 1$, ceci entraîne immédiatement que l'on a

$$F(a , b ; 1 ; x) \equiv P_{a_0,b_0}(x)\, F(a^{(1)} , b^{(1)} ; 1 ; x^p) \mod p \underset{\sim}{Z}_p[[x]]$$

avec $P_{a_0,b_0}(x) = (1 - x)^{a_0} \perp (1 - x)^{b_0}$.

Plus généralement, écrivons les développements p-adiques de $-a$ et $-b$

$$- a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i , \qquad - b = \sum_{i=0}^{\infty} b_i p^i$$

et posons

$$a^{(j)} = -\sum_{i=0}^{\infty} a_{i+j}\, p^i \,, \qquad b^{(j)} = -\sum_{i=0}^{\infty} b_{i+j}\, p^i \,.$$

On a alors, pour tout j,

$$F(a^{(j)}, b^{(j)} ; 1 ; x) = P_{a_j, b_j}(x)\, F(a^{(j+1)}, b^{(j+1)} ; 1 ; x^p) \mod p\, \underset{\sim}{Z}_p[[x]] \,,$$

avec $P_{a_j,b_j}(x) = (1-x)^{a_j} \perp (1-x)^{b_j}$, et par conséquent

$$F(a, b ; 1 ; x) = \prod_{i=0}^{j-1} P_{a_i,b_i}(x^{p^i})\, F(a^{(j)}, b^{(j)} ; 1 ; x^{p^j}) \mod p\, \underset{\sim}{Z}_p[[x]] \,.$$

Comme $\prod_{i=0}^{j-1} P_{a_i,b_i}(x)$ est un polynôme de degré $\leq p^j - 1$, on en déduit que

$$P_j(x) = \prod_{i=0}^{j-1} P_{a_i,b_i}(x^{p^i}) = \prod_{i=0}^{j-1} [P_{a_i,b_i}(x)]^{p^i} \mod p\, \underset{\sim}{Z}_p[[x]]$$

ou encore dans le corps résiduel

$$\overline{P}_j = \prod_{i=0}^{j-1} (\overline{P}_{a_i,b_i})^{p^i} \,.$$

On voit que les classes résiduelles où P_j a des zéros, et le nombre de zéros dans ces classes, se déterminent à partir des développements p-adiques de a et b.

Comme a_i et b_i appartiennent à l'ensemble fini $[0, 1, \dots, p-1]$, il y a au plus p^2 polynômes distincts $\overline{P}_{a_i,b_i}$, il y a donc un nombre fini de classes résiduelles où P_j s'annule.

3.4. – Soit $\overline{\alpha}$ une classe résiduelle telle qu'il y ait seulement un nombre fini de couples (a_i, b_i) pour lesquels $\overline{P}_{a_i,b_i}(\overline{\alpha}) = 0$. Nous allons montrer que L possède une solution bornée dans la classe $\overline{\alpha}$.

Puisqu'il y a un nombre fini de couples (a_i, b_i) tels que $\overline{P}_{a_i,b_i}(\overline{\alpha}) = 0$, il existe un entier k tel que, pour tout j, P_j ait au plus k zéros dans la classe $\overline{\alpha}$. Choisissons un représentant α de $\overline{\alpha}$, avec $\alpha \in \Omega$, $d(\alpha, \widehat{\underset{\sim}{Q}}_p) = \delta > 0$ où $\widehat{\underset{\sim}{Q}}_p$ désigne la clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$. Comme $P_j(x)$ ne s'annule pas dans $D(\alpha, \delta^-)$, que $|P_j|_\alpha(1) = |P_j|_{gauss} = 1$, on en déduit que $|P_j(\alpha)| \geq \delta^k$. Comme par ailleurs $\|P_j\|_\alpha = |P_j|_{gauss} = 1$ pour tout j, et $\|LP_j\|_\alpha = |LP_j|_{gauss} \to 0$ quand $j \to \infty$, on déduit du théorème 2.2 que L a une solution bornée dans la classe $\overline{\alpha}$.

3.5. – Soit $\overline{\alpha}$ une classe résiduelle telle que, pour une infinité de couples (a_i, b_i), on ait $\overline{P}_{a_i,b_i}(\overline{\alpha}) = 0$. Nous allons montrer que L n'a pas de solution bornée dans cette classe.

Comme la dimension du noyau borné de L dans le disque générique est 1, on sait [8] qu'il existe $\eta \in E$ tel que, si u_t est une solution analytique bornée de L dans $D(t, 1^-)$, $\eta = u_t'/u_t$.

Montrons que η est la limite de P'_j/P_j dans E quand $j \to \infty$, P_j étant le polynôme défini en 3.3. Si $P'_j(t) - \eta(t)\, P_j(t)$ ne tend pas vers 0 quand $j \to \infty$, on peut choisir une limite banachique φ telle que $\varphi(P'_j(t) - \eta(t)\, P_j(t)) \neq 0$. Soit $u_t = \varphi(P_j)$ la limite banachique suivant φ (dans $D(t\,,\,1^-)$), des P_j. Comme $LP_j \to 0$ dans E, $Lu_t = 0$. De plus, u_t est borné dans E, mais on a $u'_t - \eta u_t \neq 0$, ce qui contredit la définition de η. Il en résulte que

$$P'_j(t) - \eta(t)\, P_j(t) \to 0 \quad \text{quand} \quad j \to \infty .$$

Or, pour les éléments de E, on a

$$|P'_j - \eta P_j|_{gauss} = |P'_j(t) - \eta(t)\, P_j(t)| .$$

Comme de plus $|P_j|_{gauss} = 1$ pour tout j, ceci montre que $\eta = \lim P'_j/P_j$ dans E.

Calculons le résidu de η relatif à la classe $\bar{\alpha}$ (c'est le coefficient de $1/(x - \alpha)$ dans le développement de Laurent relatif à α de la partie singulière de η relative au trou $\bar{\alpha}$; ce coefficient ne dépend pas du représentant choisi α de $\bar{\alpha}$). On a

$$\mathrm{Res}(\eta\,,\,\bar{\alpha}) = \lim_{j\to\infty} \mathrm{Res}(P'_j/P_j\,,\,\bar{\alpha}) .$$

Or $\mathrm{Res}(P'_j/P_j\,,\,\bar{\alpha})$ est le nombre de zéros du polynôme P_j situé dans la classe $\bar{\alpha}$. Si z_i est le nombre de zéros du polynôme P_{a_i,b_i} dans la classe $\bar{\alpha}$, on a, d'après la relation vue en 3.3,

$$\mathrm{Res}(P'_j/P_j\,,\,\bar{\alpha}) = \textstyle\sum_{i=0}^{j} z_i\, p^i .$$

Notre hypothèse que $z_i \neq 0$ pour une infinité de i, se traduit donc par le fait que $\mathrm{Res}(\eta\,,\,\bar{\alpha}) = \sum_{i\geq 0}^{\infty} z_i\, p^i$ n'est pas un entier. (Comme $\deg P_{a_i,b_i} \leq p - 1$, on a $0 \leq z_i \leq p - 1$, et donc les z_i sont les coefficients du développement p-adique de $\mathrm{Res}(\eta\,,\,\bar{\alpha})$).

Mais si L possède une solution bornée u_α dans la classe $\bar{\alpha}$, on sait [8] que u'_α/u_α est le prolongement analytique dans $\bar{\alpha}$ de η.

Comme $\bar{\alpha}$ est algébrique sur $\underset{\sim}{F}_p = \bar{\underset{\sim}{Q}}_p$, on peut choisir un représentant α de $\bar{\alpha}$ algébrique sur $\underset{\sim}{Q}_p$. Il est alors clair que les coefficients du développement de Taylor de u_α autour de α appartiennent à $\underset{\sim}{Q}_p(\alpha)$ qui a une valuation discrète. La fonction u_α n'a donc qu'un nombre fini z de zéros dans $\bar{\alpha}$. On a donc

$$\mathrm{Res}(\eta\,,\,\bar{\alpha}) = \mathrm{Res}(u'_\alpha/u_\alpha\,,\,\bar{\alpha}) = z$$

et donc $\mathrm{Res}(\eta\,,\,\bar{\alpha})$ est un entier, ce qui contredit notre hypothèse.

3.6. – Remarquons que la formule

$$z = \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} z_i\, p^i ,$$

qui est valable lorsque L possède une solution bornée u_α dans la classe $\bar{\alpha}$, nous renseigne sur le nombre de zéros z de la solution u_α.

3.7. - Nous pouvons tirer de cette formule quelques renseignements au sujet d'une structure de Frobénius fort pour L (cf. [7] pour les définitions). D'après [7], il est nécessaire que les développements p-adiques de η dans chacune des classes résiduelles soient périodiques avec une période commune. Il faut donc que les nombres $z_i(\bar{\alpha})$ de zéros des polynômes P_{a_i,b_i} dans la classe $\bar{\alpha}$ soient périodiques (par rapport à i) avec une période commune, donc que les polynômes P_{a_i,b_i} et, par suite, les suites (a_i , b_i) soient périodiques. Il faut donc que les développements p-adiques des nombres a et b soient périodiques, ce qui signifie a et b rationnels. Soulignons que seuls les cas où a et b sont rationnels permettent une interprétation en géométrie algébrique.

3.8. - Exemple : Equation de Legendre. - Cela correspond au cas $a = b = \frac{1}{2}$. On prend $p \neq 2$ pour que a et b soient des unités p-adiques. On a

$$-\frac{1}{2} = (p-1)/2 \sum_{i=0}^{\infty} p^i ,$$

donc $a_i = b_i = (p-1)/2$ pour tout i . On a donc une solution bornée dans les classes où $H(x) = (1-x)^{(p-1)/2} \perp (1-x)^{(p-1)/2}$ ne s'annule pas et pas de solution bornée dans les classes où H(x) s'annule. On a donc les résultats de [2] sans utiliser les formules de congruence. On voit également que dans les classes où L possède une solution bornée, celle-ci ne s'annule pas.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEZIVIN (J.-P.). - Interpolation et idéaux de fonctions analytiques bornées, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, 3e année, 1975/76, n° 3.

[2] DWORK (B.). - p-adic cycles. - Bures-sur-Yvette, Institut des hautes Etudes scientifiques, 1969 (Publications mathématiques, 37 ; p. 27-115).

[3] INGLETON (A. W.). - The Hahn-Banach theorem for non-archimedean valued fields, Proc. Cambr. phil. Soc., t. 48, 1952, p. 41-45.

[4] CHRISTOL (G.). - Structure de Frobénius des équations différentielles p-adiques, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, 3e année, 1975/76 : Journées d'analyse ultramétrique [1976. Marseille-Luminy], n° J5.

[5] PUT (M. Van der). - The non-archimedean corona problem, "Table ronde d'analyse non archimédienne [1972. Paris]", Bull. Soc. math. France, Mémoire 39-40, 1974, p. 287-317.

[6] ROBBA (P.). - Caractérisation des dérivées logarithmiques, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, 2e année, 1974/75, n° 12, 6 p.

[7] ROBBA (P.). - Stucture de Frobénius faible pour les équations différentielles du premier ordre, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, 2e année, 1974/75, n° 20, 11 p.

[8] ROBBA (P.). - Factorisation d'un opérateur différentiel, III, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, 3e année, 1975/76, n° 6.

[9] ROBBA (P.). - Croissance des solutions d'une équation différentielle homogène, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, 1re année, 1973/74, n° 1 , 15p.

[10] WHITTAKER (E. T.) and WATSON (G. M.). - A course of modern analysis. 4th edition. - Cambridge, at the University Press, 1935.

(Texte reçu le 12 juin 1976)

Philippe ROBBA
138 rue Nationale
75013 PARIS