Groupe de travail d'analyse ultramétrique

Bernard Randé

Principalité des idéaux de type fini de $H(D)$

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 2 (1974-1975), exp. nº 6, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1974-1975__2__A5_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
2e année, 1974/75, n° 6, 8 p.
9 décembre 1974

PRINCIPALITÉ DES IDÉAUX DE TYPE FINI DE H(D).

par Bernard RANDÉ

1. Introduction.

Soit K un corps ultramétrique, complet, algébriquement clos, de caractéristique nulle. Si D est un sous-ensemble fermé borné de K , l'ensemble H(D) des limites uniformes de fractions rationnelles sans pôle dans D est une algèbre de Banach ultramétrique par la norme uniforme sur D . A. ESCASSUT s'est posé, et a résolu, le problème de la noethérianité de H(D) [2]. Il montre notamment l'équivalence entre les propositions suivantes :

1° H(D) est noethérien.

2° Tout idéal de H(D) est principal.

3° D n'a qu'un nombre fini de composantes infraconnexes, ouvertes, et sans T-filtre, ou bien réduites à un point.

Un anneau est dit anneau de Bezout si tout idéal de type fini est principal (exemple d'anneau de Bezout non principal : un anneau de Boole, $\mathcal{P}(E)$ par exemple). L'implication (1) ⟶ (2) peut alors se lire :

$$(H(D) \text{ noethérien}) \Longrightarrow (H(D) \text{ de Bezout}).$$

Ce qui suit a pour but de montrer que la réciproque est vraie.

THÉORÈME. - (H(D) noethérien) $\Longleftrightarrow$ (H(D) de Bezout).

Notations. - On note ln le logarithme népérien.

On utilise les notations de KRASNER des semi-réels. Par exemple, $\Gamma(a, r^-, R^-)$ désigne l'ensemble des points tels que

$$(r^- < |x-a| < R^-) \Longleftrightarrow (r \leq |x-a| < R) .$$

2. Si D n'a qu'un nombre fini de composantes infraconnexes (c. i. c.) dont une au moins n'est pas ouverte ni réduite à un point, alors H(D) n'est pas de Bezout.

Soit E cette c. i. c., et $a \in E - E^0$. Remarquons que si $f \in H(E)$, $f \in H(D)$, car $\chi_E \in H(D)$ (cf. [2]). Il existe une famille x_n de points de $\complement D$ tels que

$|x_n - a| \longrightarrow 0$ en décroissant,

$x_n \in D(x_n, p_n)$, trou de D (où p_n n'appartient pas nécessairement au groupe des valeurs).

Soit α_i une suite satisfaisant à $|\alpha_i(x_i - a)| \longrightarrow 0$ en décroissant ; $|\alpha_i|$ croît. Considérons

$$f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i \, r_i \frac{x - a}{x - x_i} \quad \text{où} \quad r_i \in K \ , \quad p_i \leqslant |r_i| \leqslant |x_i| \ .$$

Alors

$$\|\alpha_i \, r_i \frac{x - a}{x - x_i}\|_E \leqslant |\alpha_i \, x_i| \ .$$

Donc $f \in H(E)$, donc $f \in H(D)$. De plus, soit $y_i \in D$, y_i vérifiant :

$$|x_i - y_i| \leqslant |r_i| + \varepsilon_i \ , \text{ où } \frac{|r_i|}{|r_i| + \varepsilon_i} > \max\left(\left|\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right| \ , \ \left|\frac{\alpha_{i+1}(x_{i-1} - a)}{\alpha_i(x_i - a)}\right|\right)$$

ce qui est évidemment possible.

Alors :

$$\text{si } j < i : \quad |\alpha_j \, r_j \frac{y_i - a}{y_i - x_j}| \leqslant |\alpha_j(y_i - a)| \leqslant |\alpha_{i-1}(y_i - a)| < |\alpha_i(y_i - a)| \frac{|r_i|}{|r_i| + \varepsilon_i}$$

$$\text{si } j > i : \quad |\alpha_j \, r_j \frac{y_i - a}{y_i - x_j}| \leqslant |\alpha_j \, r_j| \leqslant |\alpha_{i+1}(x_{i+1} - a)| < |\alpha_i(y_i - a)| \frac{|r_i|}{|r_i| + \varepsilon_i}$$

$$\text{si } j = i ; \quad |\alpha_i \, r_i \frac{y_i - a}{y_i - x_i}| \geqslant |\alpha_i(y_i - a)| \frac{|r_i|}{|r_i| - \varepsilon_i} \ .$$

Finalement, si on suppose $|\varepsilon_i| \leqslant |r_i|$:

$$\frac{1}{2} |\alpha_i(y_i - a)| \leqslant |f(y_i)| \leqslant |\alpha_i(y_i - a)| \ .$$

Construisons à présent une suite x_i' (extraite de x_i), des suites α_i , β_i , vérifiant les hypothèses précédentes, et satisfaisant de plus à

$$\left|\frac{\alpha_{2i}}{\beta_{2i}}\right| \longrightarrow 0 \ , \quad \left|\frac{\alpha_{2i+1}}{\beta_{2i+1}}\right| \longrightarrow +\infty \ .$$

Supposons les suites construites à l'ordre $2n + 1$, de façon que :

$$\left|\frac{\alpha_{2i}}{\beta_{2i}}\right| \leqslant \frac{1}{2i} \ ; \quad \left|\frac{\alpha_{2i+1}}{\beta_{2i+1}}\right| \geqslant 2_{i+1} \ , \quad 1 \leqslant i \leqslant n \ .$$

Alors on détermine successivement β_{2n} , x_{2n} , α_{2n} grâce à :

$$\frac{1}{2n} |\beta_{2n}| > \max(|\alpha_{2n-1}| \ , \ \frac{1}{2n} |\beta_{2n-1}|)$$

$$|x_{2n} - a| < \min\left(\left|\frac{(x_{2n-1} - a)\beta_{2n-1}}{\beta_{2n}}\right| \ , \ \left|\frac{\alpha_{2n-1}(x_{2n-1} - a)}{\alpha_{2n-1}}\right|\right)$$

$$|\alpha_{2n-1}| \leqslant |\alpha_{2n}| < \frac{|\beta_{2n}|}{2n} \ .$$

De même, pour β_{2n+1} , x_{2n+1} , α_{2n+1} .

Montrons à présent que l'idéal engendré par f , g associés aux éléments (α_i) , (β_i) n'est pas principal. Sinon, on aura dans $H(D)$:

$$f = ah \ ; \quad g = bh \ ; \quad (h = cf + dg) \Longrightarrow ((ac - bd)(y_i) = 1 \ ,$$

car $h(y_i) \neq 0$ évidemment. Alors

$$\frac{a}{b}(y_i).c(y_i) + d(y_i) = \frac{1}{b(y_i)} \ .$$

Comme $a/b = f/g$, si i est pair, on voit que $|b(y_i)| \geqslant \delta$ dans un voisinage de a , et i pair. Or si $k \in K(D)$, et $\|b - k\| < \delta$, alors $|k(y_i)| \geqslant \delta$ dans ce voisinage, donc $|k(y)| \geq \delta$ pour tout y dans un voisinage (continuité de k au point a). Donc $|b(y)| \geq \delta$ dans ce voisinage, et par conséquent b est inversible. Ceci est en contradiction avec

$|\frac{a}{b}(y_i)| \longrightarrow +\infty$ quand $i \longrightarrow +\infty$, donc à $|\frac{\alpha_{2i+1}}{\beta_{2i+1}}| \longrightarrow +\infty$ quand $i \longrightarrow +\infty$.

Le résultat est ainsi démontré.

3. Si D n'a qu'un nombre fini de composantes infraconnexes, dont une au moins admet un T-filtre, alors $H(D)$ n'est pas de Bezout.

Rappelons la définition d'un T-filtre de E (E c. i. c. de D).

C'est un filtre défini par une suite décroissante de cercles percés emboîtés C_m , de rayon d_m , tels que C_m admet au moins un nombre fini $k(m)$ de classes $\Gamma_{m,i}$, $1 \leq i \leq k(m)$, qu'il existe des entiers $q_{m,i}$, $1 \leq i \leq k(m)$, que si on pose :

$$\gamma_m = \sup_{1 \leq i \leq k(m)} \gamma(\Gamma_{m,i}, q_{m,i}) \; ; \quad q_m = \sum_{i=1}^{k(m)} q_{m,i} \, , \quad d_m \longrightarrow R \neq 0$$

alors

$$\gamma_m \prod_{j=1}^{m-1} \left(\frac{d_n}{d_j}\right)^{q_j} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad m \longrightarrow +\infty .$$

Par définition, si A est un disque non circonférencié tel que $A \not\subset E$, alors

$\gamma(A, q) = 1$ si $A \cap E = \emptyset$,

$\gamma(A, q) = r^q \inf_{p \in \varepsilon(A,q)} \|\frac{1}{p}\|_{A \cap E}$, où $\varepsilon(A, q)$ est l'ensemble des polynômes unitaires de degré q dont tous les zéros appartiennent à $A - A \cap E$, et $r = \operatorname{diam} A$.

Supposons pour simplifier que le T-filtre est décroissant et à centre a . On peut supposer $a = 0$.

Ces T-filtres sont caractérisés par le fait qu'ils sont auto-annulateurs, c'est-à-dire qu'il existe $f \in H(E)$ telle que :

$$\lim_{\mu \to -\ln R} v(f, \mu) = +\infty \; ;$$

$$v(f, \mu) < +\infty \quad \text{pour} \quad \mu < -\ln R$$

$$v(f(x)) = +\infty \quad \text{pour} \quad |x| \leq R .$$

Pour démontrer cette équivalence, A. ESCASSUT construit des éléments F_n de $K(E)$ vérifiant, si l'on pose $\mu_n = -\ln d_n$:

(1) $\qquad v(x) < \mu_{h(n)} \Longrightarrow |F_n(x)| = 1$ et $|1 - F_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$

(2) $\qquad \left.\begin{array}{l} v(x) \geq \mu_{h(n+1)} \Longrightarrow |F_n(x)| \leq \frac{1}{n} \\ \mu_{h(n+1)} \geq v(x) \geq \mu_{h(n)} \Longrightarrow |F_n(x)| \leq \frac{1}{2n} \end{array}\right\} \Longrightarrow (v(x) \geq \mu_{h(n)} \Longrightarrow |F_n(x)| \leq \frac{1}{n}$

où $h(n)$ est une suite tendant en croissant vers $+\infty$.

Définissons à présent des éléments de $K(D)$ $\varphi_1, \dots, \varphi_n$; $\psi_1, \dots, \psi_n$; des suites d'entiers $p_1 < r_1 < \dots < p_n < r_n < \dots$ tels que :

$$\varphi_k = \prod_{i=r_{k-1}+1}^{p_k} F_i \ ; \quad \psi_k = \prod_{i=p_k+1}^{r_k} F_i \ .$$

Si

$$f_k = \prod_{j=1}^{k} \varphi_j \ ; \quad g_k = \prod_{j=1}^{k} \psi_j \ ,$$

alors

$$v(f_k \ , \ \mu_{h(p_k)}) \geq v(g_k \ , \ \mu_{h(p_k)}) + k \ ,$$

$$v(g_k \ , \ \mu_{h(r_k)}) \geq v(f_k \ , \ \mu_{h(r_k)}) + k \ .$$

Supposons que l'on ait construit ces éléments jusqu'à l'ordre n. Notons d_n la dérivée à droite de g_n au point $\mu_{h(r_n+1)}$, et $e_n = v(g_n \ , \ \mu_{h(r_n+1)})$; g_n (par construction des F_i qui ont tous leurs pôles α tels que $|\alpha| \geq d_{h(r_n+1)-1}$) a tous ses pôles tels que $|\alpha| \geq d_{h(r_n+1)-1}$. Donc $v(g_n \ , \ \mu) \leq d_n + \mu e_n$ pour $\mu \geq \mu_{h(r_n+1)}$. Or :

$$\inf_{\mu \geq \mu_{h(m)}} v(\prod_{i=r_n}^{m} F_i \ , \ \mu) \longrightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad m \longrightarrow +\infty \ ,$$

car $v(F_{i,p}) \geq 0$, $\forall\, i$, et $v(F_m \ , \ \mu) \geq \ln m$ pour $\mu \geq \mu_{h(m)}$.

Il existe donc m_0, tel que, si $m \geq m_0$ et $\mu \geq \sup\,[\mu_{h(r_n+1)} \ , \ \mu_{h(m)}]$,

$$v(\prod_{i=r_n}^{m} F_i \ , \ \mu) - \mu e_n - d_n \geq n + 1 \ .$$

Posons $m_0 = p_{n+1}$. En recommençant la même démonstration, il existe r_{n+1} tel que si $m \geq r_{n+1}$, alors

$$v(\prod_{i=p_{n+1}+1}^{m} F_i \ , \ \mu) - \mu e'_n - d'_n \geq n + 1$$

pour $\mu \geq \sup\,[\mu_{h(p_{n+1}+1)} \ , \ \mu_{h(n)}]$.

Notons alors

$$\varphi_{n+1} = \prod_{i=r_n+1}^{p_{n+1}} F_i \ ; \quad \psi_{n+1} = \prod_{i=p_{n+1}+1}^{r_{n+1}} F_i \ .$$

On a

$$v(\varphi_{n+1} \ , \ \mu_{h(p_{n+1})}) \geq v(g_n \ , \ \mu_{h(p_{n+1})}) + n + 1 = v(g_{n+1} \ , \ \mu_{h(p_{n+1})}) + n + 1$$

car $v(\psi_{n+1} \ , \ \mu_{h(p_{n+1})}) = 0$. Donc

$$v(f_{n+1} \ , \ \mu_{h(p_{n+1})}) \geq v(g_{n+1} \ , \ \mu_{h(p_{n+1})}) + n + 1 \ .$$

De même :

$$v(g_{n+1} \ , \ \mu_{h(r_{n+1})}) \geq v(f_{n+1} \ , \ \mu_{h(r_{n+1})}) + n + 1 \ .$$

Montrons à présent que f_k admet une limite dans $H(E)$. On a :

f_k est borné, car $|\varphi_k(x)| \leq 1$, $\forall\, n$.

De plus,

- ou bien $v(x) \geq \mu_{h(r_{k-1})}$, et alors $|f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leq \frac{1}{2p_{k+1}}$, car

$$|f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leqslant |1 - \varphi_{k+1}(x)|\ |f_k(x)| \leqslant |F_{p_{k-1}}(x)|$$

et on utilise (2),

- ou bien $v(x) < \mu_{h(r_{k-1})}$, auquel cas :

$$|f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leqslant |1 - \varphi_{k+1}(x)| = |1 - \prod_{i=r_k+1}^{p_{k+1}} F_i(x) \ .$$

Or :

LEMME. - Si $|u_i| \leqslant 1$, $|1 - \pi u_i| \leqslant \max|1 - u_i|$.

Donc $|f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leqslant 1/r_{k+1}$ d'après (1).

On en déduit que f_k , g_k tendent dans $H(E)$ vers f et g .

D'autre part, dès que $\mu \leqslant \mu_{h(r_n)}$ et $i \geqslant n + 1$, on a :

$$v(\varphi_i , \mu) = v(\psi_i , \mu) = 0 \ .$$

Donc

$$v(f , \mu_{h(p_n)}) = v(\varphi_{n+1} , \mu_{h(p_n)}) + v(f_n , \mu_{h(p_n)}) = v(f_n , \mu_{h(p_n)}) \ ,$$

$$v(g , \mu_{h(p_n)}) = v(\psi_{n+1} , \mu_{h(p_n)}) + v(g_n , \mu_{h(p_n)}) = v(g_n , \mu_{h(p_n)}) \ .$$

D'où

$$v(f , \mu_{h(p_n)}) \geqslant v(g , \mu_{h(p_n)}) + n \ .$$

De même,

$$v(g , \mu_{h(r_n)}) \geqslant v(f , \mu_{h(r_n)}) + n \ .$$

Montrons qu'alors l'idéal engendré par f et g n'est pas principal. Sinon, on aurait :

$$f = ah \ , \quad g = bh \ ; \qquad h = cf + dg \ .$$

Soit, comme $v(h , \mu) < + \infty$, $\forall \mu < - \ln R$:

(3) $$v(ac + bd , \mu) = 0 \quad \text{pour} \quad \mu < - \ln R \ .$$

Or

(4) $$v(f , \mu) - v(g , \mu) = v(a , \mu) - v(b , \mu) \ .$$

Si a et b sont simultanément annulés par le T-filtre, $v(a , \mu) \longrightarrow + \infty$, $v(b , \mu) \longrightarrow + \infty$. Comme $v(c , \mu)$ et $v(d , \mu)$ sont minorés, il est clair que :

$$v(ac + bd , \mu) \geqslant \min [v(a , \mu) + v(c , \mu) , v(b , \mu) + v(d , \mu)]$$

tend vers l'infini si $\mu \longrightarrow - \ln R$, ce qui est en contradiction avec (3). Or, en supposant que $v(a , \mu)$ ne tend pas vers l'infini, on sait qu'alors $v(c , \mu)$ est majoré pour $\mu < - \ln R$. Or, d'après (4), cela signifierait que $v(f,\mu) - v(g,\mu)$ serait majoré, ce qui est en contradiction en remplaçant μ par $\mu_{h(p_n)}$. De même, si l'on suppose que $v(b , \mu)$ ne tend pas vers l'infini. Le résultat est donc démontré dans ce cas.

Le cas où le T-filtre est croissant s'en déduit immédiatement par inversion. Quant au cas où le T-filtre est décroissant et n'a pas de centre, il se traite de la même manière que précédemment, en utilisant la fonction $w(f , \mu)$ associée au T-filtre, au lieu de $v(f , \mu)$.

4. Si D a une infinité de composantes infraconnexes, H(D) n'est pas de Bezout.

Ce cas a été traité en détail dans [3]. C'est pourquoi la démonstration en sera ici rapide.

On sait tout d'abord, grâce à [2], que D admet une infinité de couronnes vides, c'est-à-dire d'éléments maximaux dans l'ensemble des couronnes non circonférenciées, centrées en un point de D, et incluses dans $\complement D$. Si l'on dénote par $I(\Gamma)$ et $E(\Gamma)$ les plages internes et externes de Γ, où Γ est une couronne vide, il est facile de voir que $X_{I(\Gamma)}$ et $X_{E(\Gamma)}$ appartiennent à H(D). Trois cas peuvent alors se produire :

- ou bien D admet une infinité de couronnes vides maximales (pour la relation d'ordre "est concentrique à"),

- ou bien D admet une suite croissante de couronnes vides,

- ou bien D admet une suite décroissante de couronnes vides.

Le deuxième cas se ramène au troisième cas par inversion.

Dans le premier cas, trois éventualités sont envisageables :

- ou bien il existe une infinité de plages internes à des distances mutuelles égales,

- ou bien il existe une infinité de plages internes dont les distances mutuelles forment une suite décroissante,

- ou bien il existe une infinité de plages internes dont les distances mutuelles forment une suite croissante.

La troisième éventualité se ramène à la deuxième par inversion.

Posons $X_n = X_{I(\Gamma_n)} \in H(D)$, et

$$f = \sum \alpha_n X_n$$

$$g = \sum \beta_n X_n$$

où α_n, β_n sont des suites de K telles que :

$$\left|\frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}}\right| \longrightarrow 0 \ ; \quad \left|\frac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}}\right| \longrightarrow +\infty \ ; \quad \alpha_n \longrightarrow 0 \ , \quad \beta_n \longrightarrow 0$$

dont l'existence est immédiate.

f et g appartiennent évidemment à H(D). De plus, si $(f , g) = (h)$, alors

$$f = ah \ ; \quad g = bh \ ; \quad h = cf + dg \ .$$

Donc, si $E = \cup\, I(\Gamma_n)$: $X_E(ac + bd) = X_E$. Posons $\|\alpha\|_{E(\Gamma_n)} = \|\alpha\|_n$.

On ne peut avoir simultanément $\|a\|_n$ et $\|b\|_n$ qui tendent vers 0 . Supposons donc que $\|a\|_{\varphi(n)} \geq \delta > 0$, où $\varphi(n)$ est une suite extraite de n . Montrons que a est inversible sur E privé d'au plus un nombre fini de plages.

Soit $k \in K(D)$ telle que $\|a - k\| < \delta$. Alors $\|a\|_{\varphi(n)} = \|k\|_{\varphi(n)} \geq \delta$.

Dans la première éventualité, soit x un point d'une plage interne et r la distance mutuelle de deux plages. Considérons $v_n(k \ , \mu)$ pour $\mu = - \ln r$. Dans toutes les classes de $D(x \ , r^+)$, sauf un nombre fini, on a :

$$v(k(y)) = v_x(k \ , - \ln r) \ .$$

Cette valeur commune est donc inférieure à $- \ln \delta$, puisqu'il y a une infinité de $I(\delta_{\varphi(n)})$. Donc $|k(y)| \geq \delta$ sauf dans un nombre fini de plages.

Dans la deuxième éventualité, envisageons deux possibilités. Si l'on note $D(x_n \ , r_n^+)$ le disque de centre $x_n \in I(\Gamma_n)$, de rayon $r_n = d(I(\Gamma_{n+1} \ , I(\Gamma_n))$, alors :

- ou bien $\bigcap_n D(x_n \ , r_n^+) = \emptyset$. Dans ce cas, k n'a ni pôle ni zéro dans $D(x_n, r_n^+)$ pour $n \geq n_0$; donc $|k(x)| = \text{Cte}$ pour $x \in \bigcup_{n \geq n_0} D(x_n \ , r_n^+)$. Donc $|k(y)| \geq \delta$ pour $x \in \bigcup_{n \geq n_0} I(\Gamma_n)$.

- ou bien $\bigcap_n D(x_n \ , r_n^+) = D(x \ , R^+)$. Pour $\mu \geq \mu_0$, la fonction $v_n(k \ , \mu)$ est linéaire ; il existe une suite de points, tendant vers l'infini, telle que :

$$v_x(k \ , \mu_{\varphi(n)}) \leq - \ln \delta \ .$$

Donc, pour tout $\mu \geq \mu_0$, $v_x(k \ , \mu) \leq - \ln \delta$. Cela montre que $|k(y)| \geq \delta$ sauf sur un nombre fini de plages.

Soit $E' = E - \bigcup_{\text{nb fini}} I(\Gamma_n)$.

Sur E' , a est donc inversible puisque $(\|a - k\| < \delta) \Longrightarrow (|a(x)| \geq \delta)$. D'où : $g = a^{-1}\, bf$.

En particulier, g/f est majoré, ce qui est contradictoire avec $\|\frac{g}{f}\|_{2n} \longrightarrow + \infty$. Le cas où D admet une suite décroissante de couronnes vides se traite de la même manière que le cas où D admet une infinité d'éléments maximaux dont les distances mutuelles décroissent.

On posera alors $X_n = X_{I(\Gamma_n) \cap E(\Gamma_{n+1})}$.

Le résultat est donc démontré dans tous les cas.

Remarque. - Une démonstration analogue permettrait d'obtenir le résultat suivant : pour tout $n \geq 2$, il existe un idéal de $H(D)$ engendré par n éléments et pas par $n - 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Analyse p-adique, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, 1re année, 1959/60, 63 p.

[2] ESCASSUT (A.). - Algèbres de Banach d'éléments analytiques au sens de Krasner, Thèse 3e cycle, Math., Bordeaux 1970.

[3] RANDÉ (B.). - Principalité des idéaux à génération finie d'une algèbre de Krasner, Diplôme d'Etudes approfondies, Univ. Paris-VI, 1975.

(Texte reçu le 6 janvier 1975)

Bernard RANDÉ
Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud
2 avenue Pozzo di Borgo
92211 SAINT-CLOUD