JEAN-PAUL BEZIVIN

Fonctions analytiques de Krasner-Tate

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 2 (1974-1975), exp. nº 4, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1974-1975__2__A4_0>

Groupe d'Etude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
2e année, 1974/75, n° 4, 7 p.
25 novembre 1974

FONCTIONS ANALYTIQUES DE KRASNER-TATE

par Jean-Paul BEZIVIN

Dans tout ce qui suit, on considèrera un corps K ultramétrique, complet, algébriquement clos, et maximalement complet [6] ; les notions d'infraconnexes, de trous, d'enveloppes sont définies dans [1] ; la notion de quasi connexe est définie dans [5].

1. Rappels sur la théorie de Tate ([3] et [8]).

On commence par étudier les algèbres de Banach $K\{X_1, \ldots, X_n\}$, des séries restreintes en $X_1, \ldots, X_n$, c'est-à-dire les séries $\sum_v a_v X^v$, $v=(v_1,\ldots,v_n)\in \mathbb{N}^n$ a_v tendant vers zéro suivant le filtre des complémentaires des parties finies de $\mathbb{N}^n$.

On démontre que toute algèbre $A = K\{X_1, \ldots, X_n\}$, que l'on appellera topologiquement pure, est noethérienne, et que tout idéal I de A est fermé.

On appelle algèbre topologiquement de type fini tout quotient d'une algèbre topologiquement pure par un idéal.

On note, si B est topologiquement de type fini, par X l'ensemble des idéaux maximaux de B. On sait que si $x \in X$, alors $B/(x) = K$. On en déduit donc que tout $f \in B$ se réalise comme fonction sur X, à valeurs dans K, en posant $f(x) =$ image de f dans $B/(x)$.

Enfin, on montre que X s'identifie à une partie de U^n, où U est le disque unité "fermé".

Pour obtenir les espaces analytiques rigides, on effectue des recollements de tels spectres maximaux d'algèbres topologiquement de type fini, plus précisément, on se donne un espace topologique X, et un recouvrement de X par des ouverts X_i, possèdant (entre autres) comme propriétés d'être isomorphes à des spectres maximaux d'algèbres topologiquement de type fini B_i.

On appelle fonction analytique sur X, toute fonction f de $X \longrightarrow K$ telle que $f/X_i \in B_i$, $\forall$ i. On notera $\mathfrak{A}(X)$ cet ensemble ; pour tout recouvrement y_i de X, compatible avec le recouvrement (X_i), on montre que l'espace des fonctions analytiques est le même.

2. La théorie de Krasner [5].

Soit D un sous-ensemble de K. On note H(D) le complété pour la topologie de la convergence uniforme sur D, de l'espace K(D) des fractions rationnelles sans pôles dans D. H(D) sera l'espace des éléments analytiques sur D.

Si D est quasi connexe, on dira que f est analytique sur D si, et seulement si, il existe une famille D_i de quasi-connexes, tels que D_i soit enchaînée, de réunion D , et si $f/D_i \in H(D_i)$, $\forall$ i .

3. Les algèbres de Krasner-Tate.

Les algèbres d'éléments analytiques sur un fermé borné de K , qui sont isomorphes à une algèbre de Tate, ont été étudiées par ESCASSUT. On retrouve ici certains de ses résultats ([1] et [2]).

Définition. - On dira qu'un fermé borné de K est ultracirconférencié s'il est réunion finie d'infraconnexes fermés bornés, dont le diamètre appartient à $|K|$, n'ayant qu'un nombre fini de trous, dont le diamètre est dans $|K|$.

On sait qu'un fermé borné ultracirconférencié est quasi connexe si, et seulement si, il est infraconnexe.

THÉORÈME. - Soit une algèbre de Banach H(D) , où D est un quasi-connexe ; alors,

H(D) est une algèbre de Krasner-Tate $\Longleftrightarrow$ D est ultracirconférencié.

THÉORÈME. - Si D est ultracirconférencié, H(D) est une algèbre principale, tout idéal de D étant engendré par un polynôme dont tous les zéros sont dans D .

4. Les fonctions analytiques de Krasner-Tate.

On va étudier ici des espaces de fonctions analytiques de Krasner, sur un quasi-connexe, qui sont aussi des fonctions analytiques rigides au sens de TATE.

Il faut donc munir D d'une structure d'espace analytique rigide. On va se limiter au cas où la structure rigide de D va être réalisée par recollement de $H(D_i)$, où D_i est un quasi-connexe ultracirconférencié.

On a alors la proposition suivante.

PROPOSITION. - Pour que D soit un tel quasi-connexe, il faut et il suffit que D soit réunion enchaînée de quasi-connexes fermés bornés ultracirconférenciés.

Il est clair que la condition est nécessaire : si la famille D_i n'était pas enchaînée, il existerait au moins deux composantes quasi connexes de D , ce qui est impossible, car alors la fonction, égale à 1 sur l'une d'entre elles, et à 0 sur l'autre, serait dans $\mathfrak{A}(D)$, d'après le §1, donc dans A(D) .

Réciproquement, il est tout d'abord clair que $\mathfrak{A}(D) \subset A(D)$. Le fait que

$$A(D) \subset \mathfrak{A}(D)$$

va résulter du lemme suivant.

LEMME. - Soit D un quasi-connexe fermé borné, ultracirconférencié. Si $f \in A(D)$, alors $f \in H(D)$.

Comme f est analytique sur D, il existe une famille D_λ, $\lambda \in \Lambda$, de quasi-connexes tels que $f/D_\lambda \in H(D_\lambda)$, $\forall \lambda$, la famille D_λ étant enchaînée.

Si on choisit deux points a, $b \in D$, tels que $|a - b| = \delta(D)$, $\delta(D)$ étant le diamètre de D, et des points α_i appartenant aux circonférences des trous de D, il existe F quasi connexe, union finie enchaînée de D_λ, $\lambda \in \Lambda$, tel que a, b, $\alpha_i \in F$ et, par suite, les trous de F seront tous les trous de D, avec peut-être d'autres. On sait que $f/F \in H(F)$ (cf. [7]).

D'après le théorème de Mittag-Leffler [7], on a

$$f = \sum_{T \in \mathcal{T}(F)} f_T ;$$

comme K est maximalement complet, si $T \in \mathcal{T}(F)$ et $T \subset D$, $f_T = 0$. Donc

$$f = \sum_{T \in \mathcal{T}(D)} f_T \quad \text{et} \quad f \in H(D) ,$$

ce qui démontre le lemme.

On a là un exemple d'un quasi-connexe D tel que $H(D) = A(D)$, mais il en existe d'autres, qui ne sont pas ultracirconférenciés : par exemple,

$$D = \{x \in K ; \quad |x| \leqslant |b| , |x| \neq 1\} ,$$

où $b \in K$, $|b| > 1$; si $f \in A(D)$, f est un élément analytique sur un quasi-connexe D', $\{0 , b\} \subset D'$; D' possède alors tous les trous de D, avec peut-être d'autres en plus. On a

$$f = \sum_{T \in \mathcal{T}(D')} f_T \quad \text{et} \quad f_T = 0 \quad \text{si} \quad T \subset D ,$$

car K est maximalement complet, d'où

$$f = \sum_{T \in \mathcal{T}(D)} f_T \quad \text{et} \quad f \in H(D) .$$

Si K n'est pas maximalement complet, on ne peut pas dire grand chose. Par exemple, les fonctions analytiques rigides sur K tout entier sont les séries entières convergeant dans tout K ; par contre, il existe des fonctions analytiques au sens de KRASNER sur K tout entier, non développables en série entière.

5.

On va maintenant étudier des espaces analogues. On va prendre D quasi connexe, tel que :

(i) il existe une suite croissante de D_k quasi-connexes ultracirconférenciés de réunion D,

(ii) D est réunion croissante d'une suite de D'_k quasi-connexes ultracirconférenciés, tel que D'_k n'ait aucun trou contenu dans D'_{k+1}.

Quand on en aura besoin, on pourra toujours supposer que (ii) est vérifiée.

On rappelle ici un résultat de ROBBA [7].

PROPOSITION. - Si A et B sont deux infraconnexes, $A \subset B$, et si A n'a aucun trou inclus dans B, alors $H(B)$ est dense dans $H(A)$.

PROPOSITION. - Si $D' \subset D$ est un quasi-connexe ultracirconférencié, il existe k_0 tel que

$$k \geq k_0 \Longrightarrow D' \subset D_k .$$

Comme les quasi-connexes ultracirconférenciés sont stables par intersection finie, il suffit de démontrer le lemme suivant.

LEMME. - Si D' est un quasi-connexe ultracirconférencié, et si D_k est une suite croissante de quasi-connexes ultracirconférenciés, de réunion D', (D_k) est stationnaire à partir d'un certain rang.

D' a un nombre fini de trous, les diamètres des trous sont dans $|K|$, et le diamètre de D' est dans $|K|$, donc il existe k_0,

$$k \geq k_0 \Longrightarrow D_k \text{ a tous les trous avec peut-être d'autres ;}$$

s'il n'en a pas, c'est terminé.

Sinon, soit $T \subset D'$ un des trous de D_{k_0} ; en choisissant $\alpha \in T$, on fait fractionner le trou T en d'autres trous plus petits dans D_k tels que $\alpha \in D_k$.

Si l'opération pouvait se poursuivre indéfiniment, il existerait une suite croissante k_n, et des trous T_n de D_{k_n} tels que $T_{n+1} \subset T_n \subset T$; or l'intersection des T_n serait non vide, car K est maximalement complet. Soit α dans cette intersection, $\alpha \in T \subset D$, donc $\alpha \in D$, mais $\alpha \notin \bigcup D_{k_n} = D$ (contradiction), d'où le résultat.

COROLLAIRE. - $A(D)$ est muni d'une topologie naturelle, celle de la convergence uniforme sur toute partie quasi connexe ultracirconférenciée de D. Cette topologie est métrisable, et $A(D)$ est complet pour cette topologie.

C'est clair.

On va maintenant étudier les idéaux de $A(D)$.

PROPOSITION. - Soit Γ un ensemble tel que $\Gamma_n = \Gamma \cap D_n$ soit fini pour tout n. On note $\tilde{\Gamma}$ l'ensemble des points de Γ muni de multiplicités. Alors il existe $f \in A(D)$, $f \not\equiv 0$, et telle que l'ensemble des zéros de f contienne $\tilde{\Gamma}$.

On note P_k le polynôme unitaire ayant exactement pour zéro les points de $\Gamma_k - \Gamma_{k-1}$, affectés des multiplicités, et on pose $Q_n = P_1 P_2 \dots P_n$.

On va définir, par récurrence, une suite d'éléments analytiques sur D_n vérifiant $\|g_{n+1} - g_n\|_{D_n} \leq \varepsilon_n$, où ε_n est une suite décroissante tendant vers zéro, avec

$\varepsilon_1 < \|P_1\|_1$, et telle que Q_n divise g_n dans $H(D_n)$, pour tout n .

On part de $g_1 = P_1$; supposons construit $g_2 , \ldots , g_n$, et cherchons g_{n+1} . On a $g_n = Q_n \alpha_n$, $\alpha_n \in H(D_n)$, et on doit avoir $g_{n+1} = P_{n+1} Q_n \beta_n$, avec $\beta_n \in H(D_{n+1})$. Or $\alpha_n / P_{n+1} \in H(D_n)$, et on sait que $H(D_{n+1})$ est dense dans $H(D_n)$, il existe donc β_n approchant α_n/P_{n+1} en norme $\| \ \|_{D_n}$ d'aussi près que l'on veut, d'où g_{n+1} .

Si p est fixé, appartenant à $\underset{\sim}{N}$, la suite g_n , $n \geq p$, est de Cauchy dans $H(D_p)$, donc converge vers $f_p \in H(D_p)$. Il est clair que la famille f_p est cohérente, et définit une fonction analytique sur D , soit f ; d'autre part, Q_p divise g_n , $\forall\, n \geq p$, d'où Q_p divise f , $\forall\, p$, et enfin,

$$\|f - P_1\|_1 \leqslant \varepsilon_1 < \|P_1\|_1$$

assure que $f \not\equiv 0$.

On ne peut pas assurer que cette fonction ne possède pour zéro que les points de Γ .

PROPOSITION. - <u>Soient</u> f_1 , f_2 <u>éléments de</u> $A(D)$, <u>tels que l'intersection des ensembles de leurs zéros soient vides</u>, <u>alors il existe</u> g_1 , $g_2 \in A(D)$ <u>tels que</u> $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1$.

On montre tout d'abord que le $H(D_k)$-module des (c_1 , c_2) , tels que

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0 ,$$

est égal à $(- f_2 , f_1) H(D_k)$.

D'autre part, f_1/D_k et f_2/D_k sont dans $H(D_k)$, qui est principal ; donc il existe $\varphi_{i,k}$, $i = 1 , 2$, dans $H(D_k)$, tel que $\varphi_{1,k} f_1 + \varphi_{2,k} f_2 = 1$.

On va montrer, par récurrence, l'existence de deux suites $g_{i,k}$ vérifiant

$$g_{i,k} \in H(D_k) , \|g_{i,k+1} - g_{i,k}\| \leqslant \varepsilon_k ,$$

où ε_k est une suite tendant vers zéro, et telles que $g_{1,k} f_1 + g_{2,k} f_2 = 1$ pour tout k .

Supposons les deux suites construites jusqu'au rang n ; il en résulte que

$$(\varphi_{1,n+1} - g_{1,n} , \varphi_{2,n+1} - g_{2,n}) = \lambda_1(- f_2 , f_1) \quad \lambda_1 \in H(D_n) .$$

Mais $H(D_{n+1})$ est dense dans $H(D_n)$; on choisit $\lambda \in H(D_{n+1})$ tel que $\|\lambda - \lambda_1\|_{D_n}$ soit assez petit, de façon que

$$g_{1,n+1} = \varphi_{1,n+1} + \lambda f_2 , \qquad g_{2,n+1} = \varphi_{2,n+1} - \lambda f_1$$

satisfassent aux conditions posées.

Les suites $g_{i,n}$ sont alors de Cauchy dans chaque $H(D_p)$, $n \geq p$, d'où les fonctions g_1 et g_2 .

COROLLAIRE 1. - <u>On a la même proposition pour</u> n <u>fonctions</u>.

COROLLAIRE 2. - <u>S'il existe</u> h <u>tel que</u> h <u>possède pour zéros l'intersection des zéros de</u> f_1 , f_2 , f_n <u>(avec les multiplicités adéquates), alors il existe</u> $g_1 , g_2 , \dots , g_n \in A(D)$ <u>tels que</u> $\sum_1^n g_i f_i = h$.

PROPOSITION. - <u>Tout idéal de</u> $A(D)$ <u>de type fini est fermé pour la topologie de</u> $A(D)$.

En effet, supposons, pour simplifier, I définit par deux fonctions f_1 , f_2 , et soit $g \in \overline{I}$. Il est clair qu'alors g appartient à l'idéal de $H(D_k)$ engendré par les restrictions de f_1 et f_2 à D_k . Il existe donc $\varphi_{0,k} \in H(D_k)$ tels que $\varphi_{1,k} f_1 + \varphi_{2,k} f_2 = g$ sur D_k . On termine comme précédemment.

On va maintenant énoncer une conjecture.

CONJECTURE. - <u>Soit</u> D <u>un quasi-connexe union croissante de</u> D_k <u>ultracirconférenciés. Soit</u> Γ <u>un ensemble de points de</u> D , <u>tel que</u> $\Gamma \cap D_n$ <u>soit fini pour tout</u> n <u>(on suppose</u> Γ <u>muni de multiplicités). Alors il existe une fonction analytique</u> h <u>admettant exactement les points de</u> Γ <u>pour zéros</u>.

On sait que la conjecture est vraie si $D = K$, si D est un disque de K , si D est un quasi-connexe ayant un nombre fini de trous.

On se place désormais dans le cas de D vérifiant la conjecture.

PROPOSITION. - <u>Tout idéal de type fini de</u> $A(D)$ <u>est principal</u>.

C'est clair.

<u>Définition</u>. - Une T-famille sera une collection Σ d'ensembles Γ de D , tels que $\Gamma \cap D_n$ soient finis pour tout n , (munis de multiplicités) possédant les propriétés suivantes.

(i) $\Gamma_1 , \Gamma_2 \in \Sigma \Longrightarrow \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \in \Sigma$

(ii) $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ et $\Gamma_1 \in \Sigma \Longrightarrow \Gamma_2 \in \Sigma$

(iii) $\emptyset \notin \Sigma$.

(cf. [4].)

PROPOSITION. - <u>Etant donnée une</u> T-<u>famille</u> Σ , <u>il existe une</u> T-<u>famille maximale qui contient</u> Σ <u>(maximale pour l'inclusion)</u>.

<u>Exemples</u>. - Si $\alpha \in D$, $\Sigma_\alpha = \{\Gamma \ ; \ \alpha \in \Gamma\}$ est une T-famille maximale.

On dira qu'une T-famille Σ est de type I s'il existe $\alpha \in D$, telle que $\Sigma = \Sigma_\alpha$, de type II dans le cas contraire. On montre facilement qu'il existe des T-familles maximales qui ne sont pas des Σ_α et que tous les ensembles composant Σ de type II sont infinis.

PROPOSITION. - Si Σ est une T-famille maximale, on pose

$$\mathfrak{M}(\Sigma) = \{f \in A(D) \ ; \quad Z(f) \in \Sigma\} ,$$

en notant $Z(f)$ l'ensemble des zéros de f (avec multiplicités). Alors $\mathfrak{M}(\Sigma)$ est un idéal maximal de $A(D)$. D'autre part, si $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal de $A(D)$, on pose

$$\Sigma(\mathfrak{M}) = \{\Gamma \ ; \quad \exists\ f \in \mathfrak{M} , \ Z(f) = \Gamma\} .$$

$\Sigma(\mathfrak{M})$ est une T-famille maximale, et les deux applications $\Sigma \longrightarrow \mathfrak{M}(\Sigma)$ et $\mathfrak{M} \longrightarrow \Sigma(\mathfrak{M})$ sont deux bijections réciproques de l'ensemble des T-familles maximales sur l'ensemble des idéaux maximaux de $A(D)$.

D'autre part, on a la proposition suivante.

PROPOSITION. - Un idéal $\mathfrak{M}$ maximal de $A(D)$ est principal si, et seulement si, il est de type I.

On en déduit le résultat suivant :

PROPOSITION. - Si D et D' vérifient les conditions de la conjecture, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction f bi-analytique de D sur D', est que $A(D)$ et $A(D')$ soient algébriquement isomorphes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ESCASSUT (Alain). - Algèbres de Banach d'éléments analytiques au sens de Krasner, Thèse 3e cycle, Math., Bordeaux 1970.

[2] ESCASSUT (Alain). - Algèbres de Banach ultramétriques et algèbres de Krasner-Tate, Astérisque, 1973, n° 10, p. 1-108.

[3] HOUZEL (Charles). - Espaces analytiques rigides sur un corps ultramétrique, d'après Tate [Colloque Poitou-Aquitaine, 1965].

[4] KAKUTANI (Shizuo). - Rings of analytic functions, "Lectures on functions of a complex variable", Edited by W. KAPLAN, p. 71-83. - Ann Arbor, University of Michigan Press, 1955.

[5] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, "Colloque international du CNRS, 143 : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres" [1964. Clermont-Ferrand] p. 97-141. - Paris, Centre National de la Recherche Scientifique, 1966.

[6] LAZARD (Michel). - Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 14, p. 47-75).

[7] ROBBA (Philippe). - Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets, Astérisque, 1973, n° 10, p. 109-218.

[8] TATE (John). - Rigid analytic spaces, Inventiones Math., Berlin, t. 12, 1971, p. 257-289).

(Texte reçu le 9 décembre 1974)

Jean-Paul BEZIVIN
163 rue de Charonne
75011 PARIS