GROUPE DE TRAVAIL
D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

PHILIPPE ROBBA
B. DWORK

Factorisation d'un opérateur différentiel

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 2 (1974-1975), exp. nº 2, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1974-1975__2__A2_0>

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
2e année, 1974/75, nº 2, 16 p.
21 octobre 1974

FACTORISATION D'UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL

par Philippe ROBBA

(d'après un travail en commun avec B. DWORK [2])

0. Introduction.

Cet exposé se situe dans le prolongement des exposés [4] et [5]. Notre ambition est de démontrer la conjecture 5.13 de [4]. Ces résultats sont dus à B. DWORK et l'auteur [2].

0.1. - K est un corps de caractéristique zéro, complet pour une valuation ultramétrique, avec un corps résiduel de caractéristique $p \neq 0$. Soit Ω un corps algébriquement clos, complet pour une valuation étendant la valuation sur K. Nous supposons que Ω possède un élément t de module 1, dont l'image dans le corps résiduel $\overline{\Omega}$ de Ω est transcendante sur le corps résiduel $\overline{K}$ de K. Le point t est appelé le point générique, et le disque $D(t, 1^-) = \{x \in \Omega ; |x - t| < 1\}$ est appelé le disque générique.

0.2. - On note $E_0 = K(X)$, le corps des fractions rationnelles à coefficients dans K. Si $P = a_0 + \dots + a_n X^n \in K[X]$, on pose

$$|P| = \max_k |a_k| .$$

Si $R = P/Q \in E_0$, P et Q polynômes, on pose

$$|R| = |P|/|Q| .$$

Ceci définit une valeur absolue ultramétrique sur E_0 appelée la norme de Gauss. On notera E le complété de E_0 pour cette norme.

Soit A un sous-ensemble (ouvert et fermé) de $\hat{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$. On note $R(A)$ le sous-ensemble de E_0 formé des fractions rationnelles (à coefficients dans K) sans pôles dans A. On notera $H(A)$ le complété de $R(A)$ pour la norme de la convergence uniforme sur A. Les éléments de $H(A)$ sont donc les éléments analytiques sur A à "coefficients dans K".

Par exemple, si $A = D(t, 1^-)$, $R(A) = E_0$ (puisque $\overline{t}$ est transcendant au-dessus de $\overline{K}$), et donc $H(A) = E$.

Si $A \cup D(t, 1^-)$ est un ensemble analytique, $H(A) = H(A \cup D(t, 1^-))$, et donc $H(A)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de E. Mais, en général, la norme de $H(A)$ ne coïncide pas avec la norme de E. Ces deux normes coïncident si, et seulement si, A est une union de classes résiduelles. Mais, dans tous les cas, on aura, pour $f \in H(A)$, $|f|_{\text{Gauss}} \leq \|f\|_{H(A)}$.

Si A est le complémentaire d'une union finie de classes résiduelles ($\complement D(0\,,\,1^+)$ est considéré comme la classe résiduelle du point ∞), on dit que A est un ensemble <u>admissible</u>. Si A est le complémentaire d'une union finie de disques dont aucun ne contient une classe résiduelle toute entière, on dit que A est un ensemble <u>super-admissible</u>. Si A est admissible ou super-admissible, $A \cup D(t\,,\,1^-)$ est bien un ensemble analytique, donc $H(A) \subset E$. On dit que l'élément f de E est admissible (resp. super-admissible) s'il appartient à un $H(A)$ avec A admissible (resp. super-admissible).

0.3. - Soit $a \in \Omega$. On note $W_a^{\rho,\alpha}$, $0 < \rho \leq 1$, $\alpha \geq 0$, l'espace des germes en a de fonction analytique, $u = \sum_{n\geq 0} u_n(x-a)^n$, tels que

$$\sup_n |u_n|\rho^n/(n+1)^\alpha < +\infty \text{ .}$$

L'espace $W_a^{\rho,\alpha}$ est formé des fonctions analytiques dans le disque $D(a\,,\,\rho^-)$ ayant une croissance logarithmique d'ordre α au bord. En particulier, $W_t^{1,0}$ représente l'espace des fonctions analytiques bornées dans le disque générique, et E s'identifie à un sous-espace de $W_t^{1,0}$ avec la norme induite.

On note $\mathfrak{A}_a^\rho$ l'espace des fonctions analytiques dans le disque $D(a\,,\,\rho^-)$.

Si L est un opérateur différentiel linéaire à coefficients analytiques dans un voisinage du point a , on note $\mathrm{Ker}_a\, L$ l'espace des germes de fonction analytique en a , annihilés par L .

0.4. - Si $L \in E[D]$, on sait qu'il existe une factorisation de L dans $E[D]$ associée aux propriétés de croissance du noyau de L . Précisément, on a le théorème suivant.

THÉORÈME A (Théorème 1.4 de [2]). - <u>Soit</u> $L \in E[D]$. <u>Quels que soient</u> ρ , α , $0 < \rho \leq 1$, $\alpha > 0$, <u>il existe</u> $R \in E[D]$, R <u>unitaire</u>, <u>tel que</u>

$$\mathrm{Ker}_t\, L \cap W_t^{\rho,\alpha} = \mathrm{Ker}_t\, R \text{ .}$$

(<u>Evidemment</u> R <u>dépend de</u> ρ <u>et de</u> α .)

Nous avons mentionné la conjecture de B. DWORK ([4], §5.12) :

CONJECTURE A. - <u>Si les coefficients de</u> L <u>sont admissibles</u>, <u>alors les coefficients de</u> R , <u>ainsi définis</u>, <u>sont aussi admissibles</u>.

Une conséquence du théorème A est le théorème B.

THÉORÈME B (cf. [4], 4.5.13). - <u>Soit</u> $L \in E[D]$. <u>Quel que soit</u> ρ , $0 < \rho \leq 1$, <u>il existe</u> $R \in E[D]$, R <u>unitaire</u>, <u>tel que</u>

$$\mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathfrak{A}_t^\rho = \mathrm{Ker}_t\, R \text{ .}$$

Egalement, une conséquence de la conjecture A est la conjecture B.

CONJECTURE B. - Si les coefficients de L sont admissibles, les coefficients de R, définis par le théorème B, sont admissibles.

Mais un exemple de MONSKY nous a poussé à espérer que, dans ce cas, le prolongement des coefficients de R était meilleur (dans [4], cet exemple a été, par erreur, attribué à MANIN).

CONJECTURE B' (conjecture 5.13 de [4]). - Si les coefficients de L sont super-admissibles, les coefficients de R, définis par le théorème B, sont super-admissibles.

0.5. - L'objet de cet exposé est de démontrer la conjecture B'. On démontrera également la conjecture A, dans le cas $\rho < 1$ et ordre de $R = 1$. (En tout état de cause, la démonstration utilisée ne permet pas de prouver la conjecture A dans le cas $\rho = 1$, cf. §3.4.)

0.6. - Les coefficients de l'opérateur R sont solutions d'un système d'équations différentielles non linéaires (à coefficients (super) admissibles). Il s'agit de démontrer que les solutions d'un tel système, qui sont dans E, se prolongent analytiquement sur un ensemble (super) admissible.

Nous avons obtenu de semblables exemples de prolongement dans le cas d'une équation différentielle linéaire (cf. corollaire 7.9 de [5], et [6]).

Nous allons, dans une première étape, généraliser certains résultats de [4] et [5] au cas des systèmes différentiels linéaires (§1). Puis nous appliquerons cette généralisation pour démontrer que les solutions dans E de certains systèmes différentiels non linéaires sont (super) admissibles (§2). Enfin, nous utiliserons cette dernière propriété pour démontrer la conjecture B'.

1. Propriétés des systèmes différentiels linéaires.

1.1. Remarque préliminaire : Si l'espace vectoriel G est muni de la norme $\| \ \|_G$, on munira toujours G^n de la norme

$$Y = (Y_1 , \dots , Y_n) \longmapsto \|Y\|_G = \max_k \|Y_k\|_G .$$

La norme de l'opérateur linéaire continu L de G^n dans lui-même sera (abusivement) notée $\|L\|_G$.

1.2. LEMME. - Soit F un corps de caractéristique 0, muni d'une dérivation non triviale D. Soit $\mathcal{C} = F[D]$ l'espace des polynômes différentiels à coefficients dans F. Soit L une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathcal{C}$. Il existe deux matrices inversibles $n \times n$, U et V, à coefficients dans $\mathcal{C}$, telles que

$$ULV = \Delta = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & \alpha & & \\ & & & & 0 & \\ & 0 & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \in \mathcal{C}$.

(La dérivation D est non triviale s'il existe $f \in F$ tel que $Df \neq 0$.)

On en trouvera la démonstration en annexe.

1.3. LEMME. - Soit $\alpha \in E[D]$ (c'est-à-dire un opérateur différentiel linéaire à coefficients dans E). Si α est injectif dans $\mathcal{A}_t^1$, alors α est surjectif dans $W_t^{1,0}$ et quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\beta \in E[D]$ tel que

$$\|\beta\alpha - 1\|_{W_t^{1,0}} < \varepsilon \ .$$

Démonstration. - C'est une conséquence immédiate des théorèmes 5.8 et 5.10 de [4], et du théorème 2.3 de [5].

1.4. THÉORÈME. - Soit L une $n \times n$ matrice à coefficients dans $E[D]$. Si L est injectif dans $(\mathcal{A}_t^1)^n$, alors L est surjectif dans $(W_t^{1,0})^n$, et il existe une $n \times n$ matrice à coefficients dans $E_0[D]$ telle que

$$\|QL - I\|_{W_t^{1,0}} < 1$$

(I désignant la matrice identité).

Démonstration. - Soient U, V et Δ définis par le lemme 1.2. Les opérateurs U et V réalisent une bijection de $(\mathcal{A}_t^1)^n$ (resp. $(W_t^{1,0})^n$) sur lui-même. Comme L est injectif dans $(\mathcal{A}_t^1)^n$, il en est de même pour Δ et, par conséquent, Δ n'a pas de 0 sur sa diagonale, et α est injectif dans $\mathcal{A}_t^1$. D'après le lemme 1.3, α est donc surjectif dans $W_t^{1,0}$, donc Δ est surjectif dans $(W_t^{1,0})^n$, et il en est de même pour L .

D'après le lemme 1.3, il existe $\beta \in E[D]$ tel que

$$\|\beta\alpha - 1\|_{W_t^{1,0}} < 1/\|V\|_{W_t^{1,0}} \|V^{-1}\|_{W_t^{1,0}} \ . \tag{1.4.1}$$

Posons

$$\tilde{\Delta} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \beta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = V\tilde{\Delta}U \ .$$

On a alors

$$PL - I = V\tilde{\Delta}UL - I = V(\tilde{\Delta}ULV - I)V^{-1} = V(\tilde{\Delta}\Delta - I)V^{-1}$$

et donc, d'après (1.4.1),

$$(1.4.2)\qquad \|PL - I\|_{W_t^{1,0}} = \|V\|_{W_t^{1,0}} \|\tilde{\Delta}\Delta - I\|_{W_t^{1,0}} \|V^{-1}\|_{W_t^{1,0}} .$$

$$= \|V\|_{W_t^{1,0}} \|\beta\alpha - 1\|_{W_t^{1,0}} \|V^{-1}\|_{W_t^{1,0}} < 1 .$$

Notons que P est une $n \times n$ matrice à coefficients dans $E[D]$. Choisissons alors Q, $n \times n$ matrice à coefficients dans $E_0[D]$, telle que

$$(1.4.3)\qquad \|Q - P\|_{W_t^{1,0}} < 1/\|L\|_{W_t^{1,0}} .$$

On déduit alors de (1.4.2) et (1.4.3)

$$\|QL - I\|_{W_t^{1,0}} < 1 .$$

2. Prolongement analytique des solutions d'un système différentiel non linéaire.

2.1. - On munit $\hat{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$ de la métrique

$$\delta(x , y) = \begin{cases} |x - y| & \text{si } x \text{ et } y \in D(0 , 1^+) \\ \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| & \text{si } x \text{ et } y \in \complement D(0 , 1^+) \\ 1 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Pour $A \subset \hat{\Omega}$, on pose

$$\delta(A) = \inf_{x\in A, y\in \complement A} \delta(x , y)$$

$$d(A) = \inf_{x\in A, y\in \complement A} |x - y| .$$

On a clairement $d(A) \leqslant \delta(A)$.

Dans tout ce qui suit, on supposera que $A \cup D(t , 1^-)$ est analytique, ceci nous permettant d'identifier $H(A)$ à un sous-espace de E. Dans la pratique, on prendra A admissible ou super-admissible.

2.2. LEMME. - Soit $B \subset \hat{\Omega}$ avec $d = d(B) > 0$. On a

$$\|D^m/m!\|_{H(B)} \leqslant (1/d(B))^m \leqslant (1/\delta(B))^m .$$

Démonstration. - Par hypothèse, si $x \in B$, $D(x , d^-)$ est contenu dans B. Soit $u \in H(B)$, si l'on considère le développement taylorien de u dans $D(x , d^-)$ on obtient

$$\left|\frac{u^{(m)}(x)}{m!}\right| \leqslant \frac{1}{d^m} \sup_{y\in D(x,d^-)} |u(y)| \leqslant \frac{1}{d^m} \|u\|_{H(B)}$$

d'où le résultat.

2.3. LEMME. - Soit A un ensemble super-admissible, et soit $u \in H(A)$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta < 1$ tel que si $B \subset A$ et si $\delta(B) \geqslant \delta$, alors

$$\|u\|_{H(B)} < |u|_{Gauss} + \varepsilon .$$

Démonstration. - Si la classe résiduelle $\overline{\alpha}$ est contenue dans A, on a

$$\sup_{x\in\overline{\alpha}} |u(x)| = |u| .$$

Si la classe résiduelle $\overline{\alpha}$, $\overline{\alpha} \neq \overline{\infty}$, n'est pas contenue dans A, soit α un représentant de $\overline{\alpha}$. Alors

$$|u| = \lim_{\rho\to 1} |u|_{\alpha}(\rho) \quad (\text{avec } \rho < 1).$$

Comme A est super-admissible, il existe $r < 1$ tel que $CA \cap \overline{\alpha}$ soit contenu dans $D(\alpha, r^-)$. Choisissons r_α, $r < r_\alpha < 1$, tel que, pour $r_\alpha \leq \rho < 1$, on ait

$$|u_\alpha|(\rho) < |u| + \varepsilon ;$$

alors si $r_\alpha \leq |x - \alpha| < 1$, x appartient à A, et $|u(x)| \leq |u|_\alpha(\rho) < |u| + \varepsilon$.

Si la classe $\overline{\infty}$ n'est pas contenue dans A, on montre de même qu'il existe $r_\infty<1$ tel que si $r_\infty \leq 1/|x| < 1$, alors $x \in A$ et $|u(x)| \leq |u| + \varepsilon$.

Prenons $\delta = \sup_{\overline{\alpha}\cap CA\neq\emptyset} r_\alpha$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de tels $\overline{\alpha}$, on a bien $\delta < 1$. De plus, si $B \subset A$ et $\delta(B) > \delta$, lorsque $\overline{\alpha} \cap CA \neq \emptyset$, on voit que $B \cap \overline{\alpha}$ est contenu dans la couronne

$$\{x \in \hat{\Omega} ; \ r_\alpha \leq |x - \alpha| < 1\}$$

(resp. $\{x \in \hat{\Omega} ; \ r_\infty \leq 1/|x| < 1\}$ si $\overline{\alpha} = \overline{\infty}$). On a donc bien la majoration annoncée.

2.4. LEMME. - Soit A un exemple super-admissible. Soit L une $n \times n$ matrice à coefficients dans $H(A)[D]$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble super-admissible B de A tel que

$$\|L\|_{H(B)} \leq \|L\|_{W_t^{1,0}} + \varepsilon , \tag{2.4.1}$$

Démonstration. - Soit d'abord $L \in H(A)[D]$, $L = \sum_{0\leq m\leq k} C_m D^m/m!$, $C_m \in H(A)$. En vertu de la formule 5.13 de [4], on sait que

$$\|L\|_{W_t^{1,0}} = \max_m |C_m| .$$

Mais si $B \subset A$ avec $0 < \delta(B) < 1$, on a, d'après le lemme 2.2,

$$\|L\|_{H(B)} \leq \max_m \|C_m\|_{H(B)}(1/\delta(B))^m \leq (1/\delta(B))^k \max_m \|C_m\|_{H(B)} .$$

On voit alors, en utilisant le lemme 2.3, que si l'on choisit $\delta(B)$ suffisamment proche de 1, l'inégalité (2.4.1) sera satisfaite.

Enfin si L est une $n \times n$ matrice, $L = (L_{ij})$, avec $L_{ij} \in H(A)[D]$, on a

$$\|L\|_{H(B)} = \max_{i,j} \|L_{ij}\|_{H(B)} \quad \text{et} \quad \|L\|_{W_t^{1,0}} = \max_{i,j} \|L_{ij}\|_{W_t^{1,0}} .$$

Le théorème résulte alors de façon évidente du cas d'un seul opérateur différentiel.

2.5. - Soit A un sous-ensemble de Ω tel que $A \cup D(t, 1^-)$ soit analytique (en fait, on prendra A admissible ou super-admissible).

Considérons le polynôme à coefficients dans $(H(A))^n$ de degré total ≤ 2

$$F(x ; Y_0, Y_1, \dots, Y_{s-1}) = \sum_k C_k(x) \prod_{i=0}^{s-1} \prod_{j=1}^{n} Y_{ij}^{k_{ij}} ,$$

où $C_k(x) = (C_{k1}(x), \dots, C_{kn}(x)) \in (H(A))^n$; où Y_i, $0 \leq i \leq s-1$, est un n-uplet $Y_i = (Y_{i1}, \dots, Y_{in})$, et où la sommation porte sur les $k = s \times n$ matrices à coefficients entiers ≥ 0 avec $|k| = \sum_{i,j} k_{ij} \leq 2$.

Considérons le développement taylorien de F au voisinage de $Y \in \Omega^{ns}$.

$$\begin{aligned} F(x ; Y_0+Z_0,\dots,Y_{s-1}+Z_{s-1}) &= F(x ; Y_0,\dots,Y_{s-1}) \\ &+ L(x ; Y_0,\dots,Y_{s-1} ; Z_0,\dots,Z_{s-1}) + \psi(x ; Z_0,\dots,Z_{s-1}), \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

où L est linéaire en $Z_0, \dots, Z_{s-1}$, et ψ est quadratique en $Z_0, \dots, Z_{s-1}$.

Nous considèrerons le système différentiel non linéaire

$$F(x ; Y, Y', \dots, Y^{(s-1)}) = 0 . \tag{2.5.2}$$

A chaque $Y \in E^n$, nous associons l'opérateur différentiel linéaire de $(\mathfrak{a}_t^1)^n$ dans lui-même

$$L_Y : Z = (Z_1,\dots,Z_n) \longmapsto L_Y(Z) = L(x ; Y,Y',\dots,Y^{(s-1)} ; Z,\dots,Z^{(s-1)}) .$$

Si $Y \in (H(B))^n$ avec $B \subset A$, il est clair que L_Y envoie $(H(B))^n$ dans lui-même.

On pose pour $Z \in (\mathfrak{a}_t^1)^n$, $\psi(Z) = \psi(x ; Z, \dots, Z^{(s-1)})$.

Posons $\|\psi\|_E = \max_{|k|=2} |C_k(x)|$. On a, pour Z, Z_1 et Z_2 dans E^n,

$$|\psi(Z)| \leq \|\psi\|_E \, |Z|^2 \tag{2.5.3}$$

et

$$|\psi(Z_1) - \psi(Z_2)| \leq \|\psi\|_E \, |Z_1 - Z_2| \max(|Z_1|, |Z_2|) . \tag{2.5.4}$$

Posons, pour $B \subset A$,

$$\|\psi\|_{H(B)} = (1/\delta(B))^{2(s-1)} \max_{|k|=2} \|C_k(x)\|_{H(B)} .$$

Il résulte du lemme 2.2 que l'on a, pour Z, Z_1 et Z_2 dans $(H(B))^n$

$$\|\psi(Z)\|_{H(B)} \leq \|\psi\|_{H(B)} \, \|Z\|_{H(B)}^2 \tag{2.5.5}$$

et

$$\|\psi(Z_1)-\psi(Z_2)\|_{H(B)} \leq \|\psi\|_{H(B)} \|Z_1-Z_2\|_{H(B)} \max(\|Z_1\|_{H(B)}, \|Z_2\|_{H(B)}) . \tag{2.5.6}$$

2.6. THÉORÈME. - <u>Soit</u> $Y \in E^n$ <u>une solution de</u> (2.5.2). <u>Si l'opérateur</u> L_Y <u>est injectif dans</u> $(\mathfrak{a}_t^1)^n$ <u>et si</u> A <u>est super-admissible</u> (resp. <u>admissible</u>), Y <u>est super-admissible</u> (resp. <u>admissible</u>).

Remarques.

(i) Nous ne ferons la démonstration que dans le cas super-admissible. La démonstration dans le cas admissible est en fait plus simple puisqu'alors la norme sur $H(A)$ coïncide avec la norme sur E .

(ii) Le théorème est encore vrai si $F(x\ ;\ Y_0\ ,\ \ldots\ ,\ Y_{s-1})$ est analytique en $Y_0 \ldots Y_{s-1}$.

Comme nous n'utiliserons ce théorème que dans le cas où F est un polynôme de degré 2 , nous avons préféré éviter les détails techniques de la démonstration générale.

Démonstration. - D'après le théorème 1.4, L_Y est inversible dans $(W_t^{1,0})^n$, et il existe une $n \times n$ matrice Q à coefficients dans $E_0[D]$ telle que

(2.6.1) $$\|QL_Y - I\|_{W_t^{1,0}} < 1 .$$

Choisissons $\sigma > \|Q\|_{W_t^{1,0}}$ et ω , vérifiant

(2.6.2) $$\|\psi\|_E\, \sigma\omega < 1 .$$

Choisissons alors $\eta \in E_0$ tel que

(2.6.3) $$\|L_Y - L_\eta\|_{W_t^{1,0}} < \sigma^{-1}$$

et

(2.6.4) $$|Y - \eta| < \inf(\omega\ ,\ \omega/\sigma\|L_Y\|_{W_t^{1,0}}) .$$

Ceci est possible car $\|L_Y - L_\eta\|_{W_t^{1,0}} \longrightarrow 0$ quand $|Y - \eta| \longrightarrow 0$.

L'inégalité (2.6.1) implique que QL_Y est inversible dans $(W_t^{1,0})^n$ et donc Q est injectif dans $(W_t^{1,0})^n$. Nous déduisons de (2.6.1) et (2.6.3)

(2.6.5) $$\|QL_\eta - I\|_E \leqslant \|QL_\eta - I\|_{W_t^{1,0}} < 1 ,$$

et cette inégalité montre que QL_η est inversible dans E^n , et que

$$\|(QL_\eta)^{-1}\|_E = 1 .$$

Comme Q est injectif dans E , L_η est inversible dans E_n avec $L_\eta^{-1} = (QL_\eta)^{-1}\, Q$, et donc

(2.6.6) $$\|L_\eta^{-1}\|_E = \|Q\|_E \leqslant \|Q\|_{W_t^{1,0}} < \sigma .$$

Comme l'on a vu $\|L_Y\|_{W_t^{1,0}} \geqslant \|L^{-1}\|^{-1}_{W_t^{1,0}} > \sigma^{-1}$, il résulte de (2.6.3) que

(2.6.7) $$\|L_\eta\|_E \leqslant \|L_\eta\|_{W_t^{1,0}} = \|L_Y\|_{W_t^{1,0}} .$$

L'équation (2.5.1) s'écrit

(2.6.8) $$0=F(x\ ;\ Y,\dots,Y^{(s-1)})=F(x\ ;\ \eta,\dots,\eta^{(s-1)})+L_\eta(Y-\eta)+\psi(Y-\eta)\ .$$

Posons $g = F(x\ ;\ \eta\ ,\dots,\ \eta^{(s-1)})$. On déduit de l'égalité (2.6.8) et des majorations (2.5.3), (2.6.2), (2.6.4) et (2.6.7),

(2.6.9) $$|g| \leqslant \max(\|L_\eta\|_E\ |Y - \eta|\ ,\ \|\psi\|_E\ |Y - \eta|^2) < \omega/\sigma\ .$$

Soit $\tilde{A}$ un sous-ensemble super-admissible de A tel que Q et η n'aient pas de pôles dans $\tilde{A}$. On voit que $g \in (H(\tilde{A}))^n$.

Il résulte de l'inégalité (2.6.1), du choix de σ et du lemme 2.4, que l'on peut choisir B super-admissible contenu dans $\tilde{A}$ tel que

(2.6.10) $$\|Q\|_{H(B)} < \sigma$$

et

(2.6.11) $$\|QL_\eta - I\|_{H(B)} < 1\ .$$

En vertu du lemme 2.3, et d'après les inégalités (2.6.2) et (2.6.9), on peut même supposer que $\delta(B)$ est suffisamment proche de 1 pour que l'on ait aussi

(2.6.12) $$\|\psi\|_{H(B)}\ \sigma\omega < 1$$

et

(2.6.13) $$\|g\|_{H(B)} < \omega/\sigma\ .$$

Comme précédemment dans le cas de E , on déduit de (2.6.10) et (2.6.11) que L_η est inversible dans $(H(B))^n$ et que

(2.6.14) $$\|L_\eta^{-1}\|_{H(B)} = \|Q\|_{H(B)} < \sigma\ .$$

Posons

$$U = \{Z \in E^n\ ;\ \ |Z| \leqslant \omega\}\quad \text{et}\quad V = \{Z \in (H(B))^n\ ;\ \ \|Z\|_{H(B)} \leqslant \omega\}\ .$$

Alors l'application

$$\varphi\ :\ Z \longmapsto -\ L_\eta^{-1}(g + \psi(Z))$$

est une contraction de U dans lui-même (pour la métrique de E) et est une contraction de V dans lui-même (pour la métrique de $H(B)$, observez que ces deux métriques sont distinctes). Il faut vérifier que

(a) φ <u>envoie</u> U (<u>resp</u>. V) <u>dans lui-même</u>. – Or si $|Z| \leqslant \omega$, on a

$$|\varphi(Z)| \leqslant \sigma|g + \psi(Z)| \leqslant \sigma\ \max(\omega/\sigma\ ,\ \|\psi\|_E\ \omega^2) < \omega\ ,$$

en vertu de (2.5.3), (2.6.2), (2.6.6) et (2.6.9).

De même, si $\|Z\|_{H(B)} < \omega$, on a $\|\varphi(Z)\|_{H(B)} < \omega$ en vertu de (2.5.5), (2.6.12), (2.6.13) et (2.6.14).

(b) φ <u>est une contraction</u>. – Or si Z_1 et Z_2 sont dans U

$$|\varphi(Z_1) - \varphi(Z_2)| = |L_\eta^{-1}(\psi(Z_1) - \psi(Z_2))| \leqslant \sigma\|\psi\|_E\ \omega|Z_1 - Z_2|$$

en vertu de (2.5.4) et (2.6.6), et l'on a $\sigma\|\psi\|_E\ \omega < 1$ d'après (2.6.2).

De même, si Z_1 et Z_2 sont dans V ,

$$\|\varphi(Z_1) - \varphi(Z_2)\| \leq \sigma\|\psi\|_{H(B)}\ \omega\|Z_1 - Z_2\|_{H(B)}$$

en vertu de (2.5.6) et (2.6.14), et l'on a

$$\varphi\|\psi\|_{H(B)}\ \omega < 1 \quad \text{d'après (2.6.12).}$$

Il résulte de cela que φ a un unique point fixe dans U et un unique point fixe dans V . Comme V est contenu dans U (car pour $Z \in H(B)$, $|Z| \leq \|Z\|_{H(B)}$), ces deux points fixes coïncident. Mais l'équation (2.6.8) exprime que $Y - \eta$ est un point fixe de φ et la majoration (2.6.4) dit que $Y - \eta$ appartient à U . Il en résulte que $Y - \eta$ appartient à V , donc à $(H(B))^n$. Comme $\eta \in (H(B))^n$, Y aussi appartient à $(H(B))^n$ et est donc super-admissible.

3. Propriété de factorisation d'un opérateur différentiel.

3.1. Si $L \in E[D]$, ordre $L \leq n - 1$, $L = a_0 + \ldots + a_{n-1}\, D^{n-1}$, nous noterons $\Phi(L)$ l'élément de E^n : $\Phi(L) = (a_0, \ldots, a_{n-1})$.

Soit $L \in E[D]$, unitaire, d'ordre n . Supposons que l'on ait une factorisation de L dans $E[D]$:

$$L = M_Y \circ N_Y \tag{3.1.1}$$

avec $N_Y = Y_0 + Y_1\, D + \ldots + Y_{r-1}\, D^{r-1} + D^r$ et

$$M_Y = Y_r + Y_{r+1}\, D + \ldots + Y_{n-1}\, D^{n-r-1} + D^{n-r} ,$$

où

$$Y = (Y_0 , \ldots , Y_{n-1}) \in E^n .$$

L'équation 3.1.1 se traduit par le système différentiel non linéaire en Y

$$F(Y) = F(X , Y , \ldots , Y^{(n-1)}) = \Phi(M_Y \circ N_Y - L) = 0 . \tag{3.1.2}$$

Si les coefficients de L appartiennent à $H(A)$, où A est un ensemble super-admissible (ou admissible), F est bien de la forme prescrite au §2.5. Posons

$$Q_Z = Z_0 + Z_1\, D + \ldots + Z_{r-1}\, D^{r-1}$$

$$P_Z = Z_r + Z_{r+1}\, D + \ldots + Z_{n-1}\, D^{n-r-1} .$$

On a

$$F(Y + Z) = \Phi(M_Y \circ N_Y - L) + \Phi(M_Y \circ Q_Z + P_Z \circ N_Y) + \Phi(P_Z \circ Q_Z)$$

ce qui montre que

$$L_Y(Z) = \Phi(M_Y \circ Q_Z + P_Z \circ N_Y) .$$

Si l'on sait montrer que l'équation

$$L_Y(Z) = 0 \tag{3.1.3}$$

n'a pas de solution Z dans $(\mathfrak{a}_t^1)^n$, on en déduira, par le théorème 2.6, que Y est super-admissible (ou admissible). L'équation (3.1.3) s'écrit plus simplement :

(3.1.4) $$M_Y \circ Q_Z + P_Z \circ N_Y = 0 .$$

Comme ordre de $N_Y = r =$ (ordre de Q_Z) + 1 , il existe $\xi \in \mathrm{Ker}_t\, N_Y$ tel que $\xi \notin \mathrm{Ker}_t\, Q_Z$. On déduit de (3.1.4) que

(3.1.5) $$M_Y(Q_Z\, \xi) = 0 .$$

Soit η tel que $N_Y\, \eta = Q_Z\, \xi \neq 0$. Il résulte de (3.1.5) que $\eta \in \mathrm{Ker}_t\, L$.

En résumé si (3.1.4) est satisfait, il existe $\eta \in \mathrm{Ker}_t\, L$ et $\xi \in \mathrm{Ker}_t\, N_Y$ tels que $N_Y\, \eta = Q_Z\, \xi \neq 0$.

3.2. THÉORÈME. - <u>Soit</u> $L \in E[D]$, L <u>unitaire</u>. <u>Soit</u> $R \in E[D]$, R <u>unitaire</u>, <u>tel que</u>

$$\mathrm{Ker}_t\, R = \mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathfrak{a}_t^\rho , \quad 0 < \rho \leq 1 .$$

<u>Si les coefficients de</u> L <u>sont super-admissibles</u> (resp. <u>admissibles</u>), <u>les coefficients de</u> R <u>le sont aussi</u>.

<u>Démonstration</u>. - On sait déjà qu'il y a une factorisation de L dans $E[D]$, $L = M_Y \circ N_Y$, avec $N_Y = R$ (théorème B de l'introduction). Il suffit donc de montrer que (3.1.4) ne peut pas être satisfait pour un $Z \in (\mathfrak{a}_t^1)^n$. Si c'était le cas, soient $\eta \in \mathrm{Ker}_t\, L$ et $\xi \in \mathrm{Ker}_t\, N_Y$ tels que $N_Y\, \eta = Q_Z\, \xi \neq 0$. Comme $\xi \in \mathrm{Ker}_t\, N_Y = \mathrm{Ker}_t\, R$, $\xi \in \mathfrak{a}_t^\rho$ et, puisque $Z \in (\mathfrak{a}_t^1)^n$, $Q_Z\, \xi \in \mathfrak{a}_t^\rho$. Comme $\mathrm{Ker}_t\, N_Y \subset \mathfrak{a}_t^\rho$, en résolvant l'équation $N_Y\, \eta = Q_Z\, \xi$ par la méthode de variation des constantes, on voit que η aussi appartient à $\mathfrak{a}_t^\rho$ (cf. le théorème 3.1 de [2]). D'un autre côté, $\eta \in \mathrm{Ker}_t\, L$, mais $\eta \notin \mathrm{Ker}_t\, N_Y = \mathrm{Ker}_t\, R$, par conséquent $\eta \notin \mathfrak{a}_t^\rho$. Cette contradiction termine la démonstration.

3.3. THÉORÈME. - <u>Soit</u> $L \in E[D]$, L <u>unitaire</u>. <u>Soit</u> $R \in E[D]$, R <u>unitaire</u>, <u>tel que</u>

$$\mathrm{Ker}_t\, R = \mathrm{Ker}_t\, L \cap W_t^{\rho,0} , \quad 0 < \rho < 1 .$$

<u>Si</u> ordre de $R = 1$, <u>et si les coefficients de</u> L <u>sont super-admissibles</u> (resp. <u>admissibles</u>), <u>les coefficients de</u> R, <u>aussi</u>, <u>sont super-admissibles</u> (resp. <u>admissibles</u>)..

<u>Démonstration</u>. - On a la factorisation de L dans $E[D]$, $L = M_Y \circ N_Y$ avec $N_Y = R = D - (\xi'/\xi)$, où $\xi \in W_t^{\rho,0}$. Si (3.1.4) est satisfait pour un $Z \in (\mathfrak{a}_t^1)^n$, on sait qu'il existe $\eta \in \mathrm{Ker}_t\, L$, avec $\eta \notin \mathrm{Ker}_t\, N_Y$, donc $\eta \notin W_t^{\rho,0}$, et tel que $Z_0\, \xi = N_Y\, \eta = \xi D(\eta/\xi) \neq 0$, ou encore $Z_0 = D(\eta/\xi)$. Si $Z_0 \in \mathfrak{a}_t^1$, on a $(\eta/\xi)' \in \mathfrak{a}_t^1$, et donc $\eta/\xi \in \mathfrak{a}_t^1$ et, par suite, puisque $\rho < 1$, de même que ξ, $\eta \in W_t^{\rho,0}$. Cette contradiction termine la démonstration.

3.4. Nous allons montrer que la méthode utilisée ne permet pas de démontrer la conjecture A dans le cas $\rho = 1$.

Si L a des coefficients admissibles et si $\mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathfrak{A}_t^1 \neq \mathrm{Ker}_t\, L$, on sait qu'il existe R avec des coefficients admissibles tels que $\mathrm{Ker}_t\, R = \mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathfrak{A}_t^1$ (théorème 3.2). On a alors $\mathrm{Ker}_t\, L \cap W_t^{1,\alpha} = \mathrm{Ker}_t\, R \cap W_t^{1,\alpha}$. On ne restreint donc pas la généralité en supposant que $\mathrm{Ker}_t\, L \subset \mathfrak{A}_t^1$.

THÉORÈME. – Soit $L \in E[D]$, L unitaire d'ordre n. Si $\mathrm{Ker}_t\, L \subset \mathfrak{A}_t^1$, et s'il existe une factorisation de L dans $E[D]$, $L = M_Y \circ N_Y$ (M_Y et N_Y unitaires), alors l'équation (3.1.4) possède une solution $Z \in (\mathfrak{A}_t^1)^n$.

Démonstration. – Soit $u_1, \dots, u_r$, $r < n$, une base de $\mathrm{Ker}_t\, N_Y$, et soit $v \neq 0$ appartenant à $\mathrm{Ker}_t\, M_Y$. Les fonctions u_i et v appartiennent à $\mathfrak{A}_t^1$ car $\mathrm{Ker}_t\, N_Y \subset \mathrm{Ker}_t\, L \subset \mathfrak{A}_t^1$ et $\mathrm{Ker}_t\, M_Y = N_Y(\mathrm{Ker}_t\, L) \subset \mathfrak{A}_t^1$.

Choisissons $Q_Z = Z_0 + Z_1\, D + \dots + Z_{r-1}\, D^{r-1}$ tel que

$$\begin{cases} Q_Z(u_i) = 0\,, & 1 \leq i \leq r-1 \\ Q_Z(u_r) = v\,. \end{cases}$$

Ce système détermine entièrement $Z_0, \dots, Z_{r-1}$, et comme le wronskien de N_Y ne s'annule pas (il est en effet solution de l'équation $W'/W = -Y_{r-1}$), les solutions $Z_0, \dots, Z_{r-1}$ appartiennent à $\mathfrak{A}_t^1$.

L'existence de P_Z satisfaisant $P_Z \circ N_Y = -M_Y \circ Q_Z$ est alors claire vu que $\mathrm{Ker}_t\, N_Y \subset \mathrm{Ker}_t\, M_Y \circ Q_Z$.

Annexe

Soit A un anneau euclidien, c'est-à-dire un domaine d'intégrité muni d'une application φ de $A - \{0\}$ dans $\underset{\sim}{Z}^+$ (on pose $\varphi(0) = -\infty$) satisfaisant les conditions :

(i) Si b divise a : $\varphi(b) \leq \varphi(a)$,

(ii) Pour tous a et b de A, $b \neq 0$, il existe q, q', r, r' de A tels que

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad \varphi(r) < \varphi(b)\,, \qquad a = q'\,b + r' \quad \text{et} \quad \varphi(r') < \varphi(b)\,.$$

On dit que A est simple si les seuls idéaux bilatères de A sont $\{0\}$ et A.

Lorsque A est commutatif, A est simple si, et seulement si, A est un corps.

On notera $M_n(A)$ l'espace des $n \times n$ matrices à coefficients dans A.

On dit que M et N de $M_n(A)$ sont semblables s'il existe U et V de $M_n(A)$, inversibles, telles que $M = UNV$.

THÉORÈME. - Soit $M \in M_n(A)$. La matrice M est semblable à une matrice diagonale

$$\Delta = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

où α_i divise (à droite et à gauche) α_j, pour $j > i$. Si de plus on suppose que A est simple, on peut choisir Δ avec tous les α_i, sauf un au plus, égaux à 1 ou 0, c'est-à-dire que l'on aura

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \alpha_0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

(i) Si $M = 0$, le théorème est démontré.

(ii) Soit $M \neq 0$. Soit $\varphi_0 = \inf \varphi(a_{11})$, l' inf étant pris sur toutes les matrices $N = (a_{ij})$ semblables à M avec $a_{11} \neq 0$. Choisissons $N = (a_{ij})$ semblable à M telle que $\varphi(a_{11}) = \varphi_0$. Montrons alors que a_{11} divise à gauche a_{1i} (soit $a_{1i} = a_{11}\, \mu_i$) et divise à droite a_{i1} (soit $a_{i1} = \nu_i\, a_{11}$) pour $1 \leq i \leq n$.

En effet, soit $a_{1i} = a_{11}\, q_i + r_i$, $\varphi(r_i) < \varphi(a_{11})$. Soit $U = (u_{kj})$ avec $u_{kk} = 1$, $u_{1i} = -q_i$, $u_{kj} = 0$ pour les autres couples (k, j). La matrice $NU = (b_{kj})$ est semblable à M (car U est clairement inversible), et l'on a $b_{11} = a_{11}$, $b_{1i} = r_i$. Si $r_i \neq 0$, soit $V = (v_{kj})$ avec $v_{1i} = v_{i1} = 1$, $v_{kk} = 1$ pour $k \neq 1, i$, $v_{kj} = 0$ pour les autres couples (k, j). On voit que V est inversible, donc $NUV = (c_{kj})$ est semblable à M, et l'on a $c_{11} = r_i$, donc $\varphi(c_{1i}) < \varphi(a_{11}) = \varphi_0$ avec $c_{11} \neq 0$ ce qui contredit la définition de φ_0.

On a donc $r_i = 0$. On démontre de même que a_{11} divise a_i à droite (faire cette fois les multiplications de matrice à gauche).

(iii) On a démontré en passant qu'il existait une matrice $N = (a_{ij})$ semblable à M vérifiant $\varphi(a_{11}) = \varphi_0$ et $a_{1i} = a_{i1} = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Autrement dit

$$N = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix} \quad \text{où } M' \in M_{n-1}(A).$$

Un raisonnement par récurrence sur n nous permet alors de montrer que M est semblable à une matrice diagonale $\Delta = (\alpha_i)$ avec $\varphi(\alpha_1) = \varphi_0$.

(iv) Soit maintenant $\Delta = (\alpha_i)$ une matrice diagonale semblable à M (non nulle) satisfaisant $\varphi(\alpha_1) = \varphi_0$. Nous allons montrer que

$$A\alpha_2 A \subset A\alpha_1 \cap \alpha_1 A .$$

Soit $U = (u_{kj})$, $u_{kk} = 1$, $u_{12} = \lambda \in A$, $u_{kj} = 0$ pour les autres couples (i , j) . La matrice $U\Delta = (a_{kj})$ est semblable à M , et l'on a $a_{11} = \alpha_1$, $a_{12} = \lambda\alpha_2$. Comme $\varphi(a_{11}) = \varphi_0$, en vertu de (ii), il existe $\mu \in A$ tel que $\lambda\alpha_2 = \alpha_1 \mu$. Par conséquent, $A\alpha_2 \subset \alpha_1 A$, et donc $A\alpha_2 A \subset \alpha_1 A$.

On montre de même que $A\alpha_2 A \subset A\alpha_1$.

(v) Par récurrence sur n , on voit que M est semblable à une matrice $\Delta = (\alpha_i)$ telle que $A\alpha_{i+1} A \subset A\alpha_i \cap \alpha_i A$, $1 \leqslant i \leqslant n - 1$.

Cela montre en particulier que α_i est un diviseur à gauche et à droite de α_{i+1} .

(vi) Supposons maintenant que A est simple. Alors l'ensemble $\mathfrak{J}$ formé des sommes (finies) d'éléments de $A\alpha_{i+1} A$ est clairement un idéal bilatère contenu dans $A\alpha_i \cap \alpha_i A$. Par conséquent, si $\alpha_{i+1} \neq 0$, $\mathfrak{J}$ n'est pas $\{0\}$, et donc $\mathfrak{J} = A \subset A\alpha_i \cap \alpha_i A$, ce qui montre que α_i est inversible. Soit s tel que $\alpha_s \neq 0$ et $\alpha_{s+1} = 0$. Pour $i < s$, on a $\alpha_i \neq 0$ (car α_i divise α_s) et, pour $i > s$, $\alpha_i = 0$. Donc α_i est inversible pour $i < s$. Soit $U = (u_{ij})$ avec $u_{ii} = \alpha_i^{-1}$, $i < s$, $u_{ii} = 1$, $i \geqslant s$, $u_{ij} = 0$, $i \neq j$. Alors

$$U\Delta = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \alpha_s & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

est semblable à M .

<u>Exemples</u>.

(i) $A = \underset{\sim}{Z}$. Le théorème est dû à H. J. S. SMITH.

(ii) Soit K un corps. On choisit $A = K[X]$.

Pour ces deux exemples, on trouvera la démonstration dans [7] (ch. III, §§3 à 6).

En prenant $A = \underset{\sim}{C}[D]$, on obtient des résultats sur les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants (cf. [3] ch. II, §8, et ch. III, §11 pour les coefficients non constants)

(iii) Soit F un corps de caractéristique 0 muni d'une dérivation non triviale (c'est-à-dire qu'il existe un u F tel que $Du \neq 0$). Alors l'anneau $\mathfrak{C} = F[D]$ est euclidien et simple. Ceci démontre le lemme 1.2.

<u>Démonstration</u>. - Il est bien connu que cet anneau est euclidien. Nous allons montrer qu'il est simple.

Soit $\mathfrak{J}$ un idéal bilatère de $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{J} \neq \{0\}$, et soit ε l'élément de degré minimal dans $\mathfrak{J}$, on a $\varepsilon\mathfrak{C} = \mathfrak{C}\varepsilon = \mathfrak{J}$.

Soit $\varepsilon = a_0 + \dots + a_n D^n$, $a_j \in F$, $a_n \neq 0$. Comme $\varepsilon\mathfrak{C} = \mathfrak{C}\varepsilon$, il existe $\ell \in \mathfrak{C}$ tel que $\varepsilon D = \ell\varepsilon$, et en comparant les degrés, on voit que $\ell = b_0 + b_1 D$.

D'où

$$a_0 D+\ldots+a_n D^{n+1}=(b_0+b_1 D)(a_0+\ldots+a_n D^n)=\sum_{k=0}^{n}(b_0 a_k+b_1 a_k'+b_1 a_{k-1})D^k+b_1 a_n D^{n+1}$$

et par conséquent $b_1 = 1$, et

$$a_k' + b_0 a_k = 0 , \quad 0 \leq k \leq n .$$

Les a_k vérifiant la même équation différentielle sont donc tous des multiples d'une même fonction. Donc $\varepsilon = a(c_0 + \ldots + c_{n-1} D^{n-1} + D^n)$, où les c_k sont des constantes (c'est-à-dire $Dc_k = 0$), $a_n = a$.

Soit alors $b \in F$ tel que $Db \neq 0$. Il existe $\ell \in \mathcal{C}$ tel que

$$\varepsilon b = \ell \varepsilon ,$$

mais comme degré de $\ell = 0$, $\ell = f$, où $f \in F$.

Donc $a(c_0 + \ldots + c_{n-1} D^{n-1} + D^n)b = fa(c_0 + \ldots + c_{n-1} D^{n-1} + D^n)$.

En comparant les coefficients de D^n on trouve $ab = fa$, donc $b = f$ (puisque $a \neq 0$). En comparant les coefficients de D^{n-1} , on trouve

$$a(nb' + c_{n-1} b) = bac_{n-1} .$$

Comme $b' \neq 0$, il faut $n = 0$. Par conséquent $\varepsilon = a \in F$, et donc $\mathfrak{J} = \mathcal{C}$.

<u>Remarque</u>. - (On suppose A commutatif) Si $N = UM$, le déterminant d'un mineur d'ordre m de N s'exprime comme combinaison linéaire (à coefficients dans A) des déterminants des mineurs d'ordre m de M . Il en résulte que le P. G. C. D. des déterminants des mineurs d'ordre m de N divise le P. G. C. D. des déterminants des mineurs d'ordre m de M , et que par conséquent, si ces matrices sont équivalentes, ces P. G. C. D. coïncident. En considérant la matrice diagonale associée à M , on voit donc que ce P. G. C. D. est $\alpha_1 \ldots \alpha_m$. L'entier s tel que $\alpha_s \neq 0$, $\alpha_{s+1} = 0$ est bien entendu le rang de la matrice M .

Ces considérations montrent que les α_i sont des invariants de M , et que la matrice Δ diagonale, semblable à M , est essentiellement unique (à des facteurs inversibles près ...). Pour ces raisons, la théorie précédente s'appelle la <u>théorie des facteurs invariants</u>.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DWORK (B.). - On p-adic differential equations, II., Annals of Math., t. 98, 1973, p. 366-376.

[2] DWORK (B.) and ROBBA (P.). - On ordinary linear p-adic differential equations (à paraître).

[3] POOLE (E. G. C.). - Introduction to the theory of linear differential equations. - New York, Dover Publications, 1960.

[4] ROBBA (P.). - Croissance des solutions d'une équation différentielle homogène, Groupe d'Etude d'Analyse ultramétrique, 1re année, 1973/74, n° 1, 15 p.

[5] ROBBA (P.). - Indice d'un opérateur différentiel, Groupe d'Etude d'Analyse ultramétrique, 1re année, 1973/74, n° 2, 14 p.

[6] ROBBA (P.). - Prolongement des solutions d'une équation différentielle p-adique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 279, 1974, Série A, p. 153-154.

[7] TURNBULL (H. W.) and AITKEN (A. C.). - An introduction to the theory of canonical matrices. - London,and Glasgow, Blackie and Son, 1950.

(Texte reçu le 3 février 1975)

Philippe ROBBA
138 rue Nationale
75013 PARIS