Groupe de travail d'analyse ultramétrique

Alain Escassut

# Calcul fonctionnel holomorphe dans les algèbres de Banach ultramétriques

*Groupe de travail d'analyse ultramétrique*, tome 2 (1974-1975), exp. n° 17, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1974-1975__2__A15_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
2e année, 1974/75, n° 17, 7 p.



28 avril 1975

# CALCUL FONCTIONNEL HOLOMORPHE DANS LES ALGÈBRES DE BANACH ULTRAMÉTRIQUES

par Alain ESCASSUT

Problème. - Soit $K$ un corps valué non archimédien complet algébriquement clos, et soit $D \subset K$. On note $K(D)$ l'algèbre des fractions rationnelles sans pôle dans $D$, et on note $H(D)$ le groupe topologique complété de $H(D)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur $D$ ( $H(D)$ est une $K$-algèbre de Banach si, et seulement si, $D$ est fermé borné).

Soit $A$ une $K$-algèbre de Banach ultramétrique unitaire, et $\forall\ x \in A$, soit $s(x)$ l'ensemble des $\lambda \in K$ tels que $x - \lambda$ ne soit pas inversible.

De façon analogue aux propriétés connues du calcul fonctionnel holomorphe dans une $\underline{C}$-algèbre de Banach [1], on aimerait trouver, pour tout $x \in A$, un homomorphisme unifère continu $\theta$ de $H(s(x))$ dans $A$ tel que $\theta(h) = h(x)$, $\forall\ h \in K(s(x))$. En fait, on sait que ceci n'est pas possible, sauf si la norme $\|.\|$ de $A$ est définie par $\|x\| = \sup_{\varphi \in X(A)} |\varphi(x)|$, où $X(A)$ désigne l'ensemble des caractères de $A$.

On va donc chercher une sous-algèbre $\mathcal{O}_x$ de $H(s(x))$ contenant bien entendu $K(s(x))$, et telle que l'application $\theta$ définie dans $K(s(x))$ comme ci-dessus, se prolonge dans $\mathcal{O}_x$. Pour cela, on devra définir quelques notions nouvelles, et notamment la notion de partition naturelle du complémentaire d'un fermé de $K$.

## 1. Partitions naturelles.

Soit $K$ un corps valué non archimédien complet, algébriquement clos, et soit $D \subset K$. On dit que $D$ est infraconnexe si $\forall\ a \in D$, l'application $x \longrightarrow |x - a|$ a une image dans $\underline{R}$ dont l'adhérence est un intervalle.

Soit $D \subset K$, de diamètre $R$. On appelle enveloppe $\underline{D}$ de $D$ le disque circonférencié de diamètre $R$ qui contient $D$ (si $R = +\infty$, $\underline{D} = K$ ).

Soient $a \in K$, et $r' < r''$ ($r'$, $r'' \in \underline{R}^+$). On appelle couronne non circonférenciée de centre $a$, de rayon inférieur $r'$, de rayon supérieur $r''$, l'ensemble

$$\Gamma(a\ ,\ r'\ ,\ r'') = \{\xi \in K\ ;\ r' < |\xi - a| < r''\}\ .$$

On appelle couronne vide d'un fermé borné $D$ de $K$ une couronne non circonférenciée $\Gamma(a\ ,\ r'\ ,\ r'') \subset (K - D)$, et telle que $a \in D$ et

$$r' = \sup\{|\xi|\ ;\ |\xi| \in D\ ,\ |\xi| < r''\}\ ,$$

$$r'' = \inf\{|\xi|\ ;\ |\xi| \in D\ ,\ |\xi| > r'\}\ .$$

On appelle circonférence d'un disque non circonférencié $d(a,r)=\{|\xi|\ ;\ |\xi-a|<r\}$

l'ensemble des $\xi \in K$ tels que $|\xi - a| = r$ .

Définitions. - Soit $D$ un fermé de diamètre $r \in ]0 , +\infty[$ , et soit $R \geq r$ . Nous dirons qu'une partition $\mathcal{P}$ de $K - D$ est naturelle si ses seuls éléments sont :

- le complémentaire dans $K$ du disque circonférencié $V$ de diamètre $R$ qui contient $D$ ,

- des couronnes non circonférenciées $\Gamma \subset V - D$ , des disques non circonférenciés $T \subset V - D$ .

Alors si $\mathcal{P}$ est une telle partition naturelle de $K - D$ , le nombre $R$ est appelé diamètre de $\mathcal{P}$ ; le disque $V$ est appelé enveloppe de $\mathcal{P}$ ; les couronnes $\Gamma$ sont appelées couronnes de $\mathcal{P}$ ; les disques $T$ sont appelés supertrous de $\mathcal{P}$ .

Nous dirons qu'une partition naturelle de $K - D$ est infraconnexe si elle n'admet pas de couronnes.

Alors si $D$ est un fermé de $K$ , il existe une partition naturelle infraconnexe unique $\mathcal{P}_0$ d'enveloppe $\underset{\sim}{D}$ telle que $\forall\, a \in \underset{\sim}{D} - D$ , le supertrou de $\mathcal{P}_0$ contenant $a$ soit le disque non circonférencié de centre $a$ , de diamètre $d(a , D)$ (distance du point $a$ à $D$ ).

$\mathcal{P}_0$ est appelé partition canonique de $D$ , et les supertrous de $\mathcal{P}_0$ sont appelés trous de $D$ .

Remarque. - L'ensemble des partitions naturelles infraconnexes de $K - D$ , qui admettent $\underset{\sim}{D}$ pour enveloppe, est ordonné par la finesse, et admet pour plus petit élément la partition canonique.

On notera $\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_2$ la relation "$\mathcal{P}_1$ est une partition plus fine que $\mathcal{P}_2$" .

## 2. Algèbres $H(D , \mathcal{P})$ .

Soit $D \subset K$ . Suivant les conventions habituelles, on notera $K(D)$ l'algèbre des fractions $h(X) \in K(X)$ sans pôle dans $D$ .

Si $A$ est une $K$-algèbre, on notera $\mathrm{Mult}\, A$ l'ensemble des semi-normes multiplicatives de $A$ , et si $A$ admet une norme de $K$-algèbre $\|.\|$ , on notera $\mathrm{Mult}(A , \|.\|)$ [4] l'ensemble des semi-normes multiplicatives de $A$ continues pour la norme $\|.\|$ .

Soit $D$ un fermé borné, et soit $\mathcal{P}$ une partition naturelle de $K - D$ . On notera $\mathrm{Mult}(K(D) , \mathcal{P})$ l'ensemble des éléments de $\mathrm{Mult}\, K(D)$ dont le filtre circulaire [3] est sécant à $\underset{\sim}{D}$ , ou bien à au moins un supertrou de $\mathcal{P}$ et à sa circonférence. Alors on notera $\|.\|_{\mathcal{P}}$ la norme de $K$-algèbre de $K(D)$ , définie par $\|h\|_{\mathcal{P}} = \sup\{\varphi(h) \; ; \; \varphi \in \mathrm{Mult}(K(D) , \mathcal{P})\}$ , et l'on a donc

$$\mathrm{Mult}(K(D) , \mathcal{P}) = \mathrm{Mult}(K(D) , \|.\|_{\mathcal{P}}) .$$

PROPOSITION. - Soit $D$ un fermé borné, et soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux partitions naturelles de $D$ telles que $\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_2$. Alors on a pour $h \in K(D)$

$$\|h\|_D \leq \|h\|_{\mathcal{P}_1} \leq \|h\|_{\mathcal{P}_2} .$$

Notation. - On notera $H(D, \mathcal{P})$ la K-algèbre de Banach complétée de $K(D)$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{P}}$.

COROLLAIRE. - Soit $D$ un fermé borné, et soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux partitions naturelles de $D$ telles que $\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_2$. Alors il existe un homomorphisme unifère continu unique de $H(D, \mathcal{P}_2)$ dans $H(D, \mathcal{P}_1)$ (resp. dans $H(D)$) qui induit l'identité sur $K(D)$.

THÉORÈME de Mittag-Leffler pour une partition infraconnexe [5]. - Soit $\mathcal{P}$ une partition naturelle infraconnexe d'un fermé borné $D$, et soit $V$ l'enveloppe de $\mathcal{P}$. Soit $f \in H(D, \mathcal{P})$. Alors il existe $f_0 \in H(V)$ et, pour tout supertrou $T_i$ de $\mathcal{P}$, il existe $f_i \in H(K - T_i)$ tel que $\lim_{|x| \to +\infty} f_i(x) = 0$, tels que la famille $f_i$ soit sommable dans $H(D, \mathcal{P})$, de somme $f$ et tels que

$$\|f\|_{\mathcal{P}} = \sup \|f_i\|_{\mathcal{P}} .$$

PROPOSITION. - Soit $D$ un fermé borné ; soit $\mathcal{P}$ une partition naturelle de $K - D$, et soit $h \in K(D)$. Soient $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ les couronnes vides des $\mathcal{P}$ qui contiennent des pôles de $h$, et soient $T_1, \dots, T_n$ les supertrous de $\mathcal{P}$ qui contiennent des pôles de $h$. Soit $\Delta$ un fermé borné contenant $D$ tel que $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ soient des couronnes vides de $\Delta$ et tel que $T_1, \dots, T_n$ soient des trous de $\Delta$ non inclus dans une couronne vide de $\Delta$. Alors on a

$$\|h\|_\Delta = \|h\|_{\mathcal{P}} .$$

COROLLAIRE 1. - Soit $\mathcal{P}$ une partition naturelle de $K - D$, et soit $\Delta$ un fermé borné contenant $D$ dont tout trou et toute couronne vide est inclus dans un supertrou, ou bien dans une couronne de $\mathcal{P}$. Alors $H(\Delta)$ est isomorphe à une sous-algèbre de Banach de $H(D, \mathcal{P})$ par un isomorphisme unifère continu qui induit l'identité sur $K(D)$.

Soit $A$ une K-algèbre ; pour tout $x \in A$, on note $s(x)$ l'ensemble des $\lambda \in K$ tels que $x - \lambda$ ne soit pas inversible.

COROLLAIRE 2. - Soit $A$ une K-algèbre de Banach unitaire. Soit $x \in A$, et soit $\mathcal{P}$ une partition naturelle de $s(x)$. On suppose qu'il existe un homomorphisme unifère continu $\theta_{\mathcal{P}}$ de $H(D, \mathcal{P})$ dans $A$ qui associe $x$ à l'application identique $X$ sur $D$. Soit $\Delta$ un fermé borné dont tout trou et toute couronne vide est inclus dans un supertrou ou bien dans une couronne de $\mathcal{P}$. Alors $\theta_{\mathcal{P}}$ induit sur $H(\Delta)$ un homomorphisme unifère continu, qui fait correspondre à $x$ l'identité $X$ sur $\Delta$ et qui est injectif si $\Delta$ est infini.

3. Partition x-spectrale et partitions x-normales.

La définition de l'algèbre $\mathcal{O}_x$ qui permettra la construction du calcul fonctionnel holomorphe nécessite l'introduction des partitions x-spectrale et x-normales du spectre d'un élément $x$.

Notation. - Soit $(A, \|.\|)$ une K-algèbre de Banach, et soit $x \in A$. On notera $\|x\|_{s_1}$ la limite de la suite $\|x^n\|^{1/n}$ (on sait que $\|.\|_{s_1}$ est une semi-norme telle que

$$\|x\|_{s_1} = \sup\{\varphi(x) \; ; \; \varphi \in \mathrm{Mult}(A, \|.\|)\} \text{ ).}$$

Définition. - Nous dirons qu'une couronne non circonférenciée $\Gamma(a, r', r'')$ est fortement incluse dans une couronne non circonférenciée $\Gamma(a, R', R'')$ si $r' < R' < R'' < r''$.

Soit $(A, \|.\|)$ une K-algèbre de Banach, soit $x \in A$, et soit $D = s(x)$. Nous dirons qu'une couronne non circonférenciée $\Gamma(a, r' r'')$ est une couronne x-vide de $D$ si $\Gamma(a, r', r'') \subset (K - D) \cap d(a, \|x\|_{s_1})$ et si $r'$ et $r''$ satisfont

$$r' = \sup\{\varphi(x - a) | \varphi \in \mathrm{Mult}(A, \|.\|) \; ; \; \varphi(x - a) < r''\}$$

et

$$r'' = \inf\{\varphi(x - a) | \varphi \in \mathrm{Mult}(A, \|.\|) \; ; \; \varphi(x - a) > r'\} .$$

LEMME. - Soit $(A, \|.\|)$ une K-algèbre de Banach, soit $x$ un élément inversible de $A$, et soit $D = s(x)$. Soit $\|.\|^1$ une semi-norme ultramétrique de $A$ telle que $\|1/x\|_{s_1} \leq \|1/x\|^A \leq \|1/x\|$. Alors on a $\|1/(x - b)\|^1 = \|1/x\|^1$ pour tout $b \in K$ tel que $|b| < 1/\|1/x\|^1$.

Rappelons que $\|x\|_{s_1} \geq \sup_{\lambda \in s(x)} |\lambda|$ de sorte que $\|x - a\|_{s_1}$ est indépendant de $a$ si $a \in s(x)$.

On appellera partition x-spectrale la partition naturelle $\mathcal{S}_x$ de $K - D$ qui a pour diamètre $\|x - a\|_{s_1}$ pour $a \in s(x)$, et dont les supertrous $T$ vérifient $\mathrm{diam}(T) = 1/\|1/(x - a)\|_{s_1}$ pour $a \in T$, et dont les couronnes sont les couronnes x-vides de $D$.

On appellera partition x-normale une partition naturelle $\mathcal{P}$ de $K - D$ qui a pour diamètre $\|x\|_{s_1}$ et qui possède en outre les propriétés suivantes :

- les couronnes vides de $\mathcal{P}$ sont en nombre fini, et chacune est fortement incluse dans une couronne x-vide de $D$.

- presque tous les supertrous $T$ de $\mathcal{P}$ vérifient $1/\|1/(x - a)\| = \mathrm{diam}(T)$ pour $a \in T$, et ceux (en nombre fini) qui ne vérifient pas cette relation sont tels que $1/\|1/(x - a)\| \leq \mathrm{diam}(T) < 1/\|1/(x - a)\|_{s_1}$.

Soit $a \in \mathcal{S}(x)$. On notera $\mathcal{P}_x$ l'unique partition naturelle infraconnexe de $K - D$ de diamètre $\|x - a\|$, et dont les supertrous $T(\alpha)$ vérifient

$$\operatorname{diam} T(\alpha) = 1/\|1/(x - \alpha)\| .$$

PROPOSITION. - Soit $A$ une K-algèbre de Banach unitaire. Soit $x \in A$, soit $D = s(x)$, et soit $X$ l'application identique sur $D$. Soit $\mathcal{P}$ une partition x-normale de $K - D$ ; alors il existe un homomorphisme unifère continu unique $\theta_{\mathcal{P}}$ de $H(D, \mathcal{P})$ dans $A$ tel que $\theta_{\mathcal{P}}(X) = x$.

Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux partitions x-normales de $K - D$ telles que $\mathcal{P}_2 < \mathcal{P}_1$, alors $\theta_{\mathcal{P}_2}$ induit $\theta_{\mathcal{P}_1}$ sur $H(D, \mathcal{P}_1)$.

COROLLAIRE. - Soit $A$ une K-algèbre de Banach ultramétrique, et soit $x \in A$. Alors il existe un homomorphisme unifère continu unique $\theta_0$ de $H(s(x), \mathcal{P}_x)$ dans $A$ tel que $\theta_0(X) = x$.

PROPOSITION. - Soit $(A, \|.\|)$ une K-algèbre de Banach unitaire. Soit $x \in A$, et soit $A_x$ la sous-K-algèbre unitaire pleine engendrée par $x$ dans $A$. On suppose que $\|.\|$ et $\|.\|_{s_1}$ induisent sur $A_x$ deux normes équivalentes. Alors l'application de $K(s(x))$ dans $A_x$ : $h \longrightarrow h(x)$ est continue et se prolonge en un homomorphisme unifère continu $\theta_{\mathcal{S}}$ de $H(s(x), \mathcal{S}_x)$ dans $A$.

## 4. Algèbre des germes $\mathcal{O}_x$.

On notera $\mathcal{O}_x$ la limite inductive des algèbres $H(s(x), \mathcal{P})$ lorsque $\mathcal{P}$ parcourt la famille des partitions x-normales. Alors $\mathcal{O}_x$ est une sous-algèbre de $H(s(x))$ dont les éléments seront appelés germes analytiques x-normaux sur $\mathcal{S}(x)$.

THÉORÈME. - Soit $A$ une K-algèbre de Banach ultramétrique unitaire. Soit $x \in A$, et soit $X$ l'identité sur $s(x)$. Alors il existe un homomorphisme unifère continu unique $\Theta_x$ de $\mathcal{O}_x$ dans $A$ tel que $\Theta_x(X) = x$, et si la semi-norme $\|.\|_{s_1}$ de $A$ est une norme pour laquelle $A$ est complète, alors $\Theta_x$ se prolonge en un homomorphisme continu de $H(s(x), \mathcal{S}_x)$ dans $A$.

Notation. - Si $f \in \mathcal{O}_x$, on notera $\tilde{f}(x) = \Theta_x(f)$.

PROPOSITION. - Soient $A$ et $A'$ deux K-algèbres de Banach ultramétriques unifères, et $\varphi$ un homomorphisme unifère continu de $A$ dans $A'$. Soit $x \in A$, et soit $f \in \mathcal{O}_x$. Alors $\varphi(f(x)) = f(\varphi(x))$.

## 5. Fonctions analytiques dans A.

Définitions. - Soit $A$ une K-algèbre de Banach ultramétrique unitaire, soit $\Omega \subset A$, et soit $E \subset K$. Nous dirons qu'une couronne non circonférenciée $\Gamma(a, r', r'') \subset K - E$ est une couronne $\Omega$-vide de $E$ si

$$r' = \sup\{\varphi(x - a) \ ; \ \varphi \in \operatorname{Mult}(K(E), \|.\|_{s_1}), \quad x \in \Omega, \quad \varphi(x - a) < r''\},$$

$$r'' = \inf\{\varphi(x - a) \ ; \ \varphi \in \operatorname{Mult}(K(E), \|.\|_{s_1}), \quad x \in \Omega, \quad \varphi(x - a) > r'\}.$$

On notera $E_\Omega = \bigcup_{x\in\Omega} s(x)$ , $F_\Omega$ l'ensemble des $a \in K$ tels que $\sup_{x\in\Omega}\|1/(x-a)\|$ ne soit pas borné, et enfin on notera $D_\Omega$ l'ensemble $E_\Omega \cup F_\Omega$ .

LEMME. - $D_\Omega$ <u>est fermé.</u>

On appellera <u>partition</u> <u>$\Omega$-spectrale</u> la partition naturelle de $K - D_\Omega$ de diamètre $\sup_{x\in\Omega} \|x\|_{s_1}$ , dont les couronnes vides sont les couronnes $\Omega$-vides de $D_\Omega$ et dont les supertrous $T$ vérifient $\mathrm{diam}(T) = \inf_{x\in\Omega}(1/\|1/(x-a)\|_{s_1})$ pour $a \in T$ .

De même, on appellera <u>partition</u> <u>$\Omega$-normale</u> une partition naturelle de $K - D_\Omega$ , de diamètre $\sup_{x\in\Omega} \|x\|_{s_1}$ possèdant les propriétés suivantes :

- les couronnes sont en nombre fini, et chacune est fortement incluse dans une couronne de la partition $\Omega$-spectrale.

- les supertrous $T$ vérifient presque tous $\mathrm{diam}(T) = \inf_{x\in\Omega}(1/\|1/(x-a)\|)$ pour $a \in T$ , et ceux (en nombre fini) qui ne vérifient pas cette relation sont tels que

$$\inf_{x\in\Omega}(1/\|1/(x-a)\|) \leq \mathrm{diam}(T) < \inf_{x\in\Omega}(1/\|1/(x-a)\|_{s_1}) \ .$$

On notera $\mathcal{O}^*_\Omega$ la limite, inductive des algèbres $H(D_\Omega , \mathcal{P})$ lorsque $\mathcal{P}$ parcourt la famille des partitions $\Omega$-normales ; on notera $\mathcal{O}_\Omega$ les éléments analytiques de $H(E_\Omega)$ de la forme $f = g + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j/(x-a_j)^{q_j}$ , où $g \in \mathcal{O}^*_\Omega$ et où $a_j \in F_\Omega$ et $\lambda_j \in K$ (les points $a_1 , \ldots , a_n$ n'étant pas forcément tous distincts).

<u>Définition</u>. - Nous dirons qu'une application $g$ de $\Omega$ dans $A$ est <u>analytique</u> <u>dans</u> $\Omega$ s'il existe une suite $h_n$ de $K(E_\Omega)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty}(\sup_{x\in\Omega} \|g(x) - h(x)\|) = 0 \ .$$

THÉORÈME. - <u>Soit</u> $A$ <u>une</u> $K$-<u>algèbre de Banach ultramétrique unitaire</u>, <u>soit</u> $\Omega \subset A$ , <u>et soit</u> $f \in \mathcal{O}_\Omega$ . <u>Alors</u> $\forall\, x \in \Omega$ , $f \in \mathcal{O}_x$ <u>et l'application de</u> $\Omega$ <u>dans</u> $A$ : $x \longrightarrow f(x)$ <u>est analytique dans</u> $\Omega$ . <u>De plus</u>, <u>pour toute boule</u> $B$ <u>de centre</u> $a$ <u>incluse dans</u> $\Omega$ , $f(x)$ <u>est développable en série de Taylor</u> : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ <u>convergeant dans</u> $B$ .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Théorie spectrale, ch. I. : "Algèbres normées ...". - Paris, Hermann, 1967 (Actualités scientifiques et industrielles, 1332. Bourbaki, 32).

[2] ESCASSUT (Alain). - Eléments analytiques et filtres percés sur un infraconnexe, Annali Mat. pura ed applic., Bologna (à paraître).

[3] GARANDEL (Gérard). - Les semi-normes multiplicatives sur les algèbres d'éléments analytiques au sens de Krasner, Indagationes Mathematicae, 1975 (à paraître).

[4] GUENNEBAUD (Bernard). - Sur une notion de spectre pour les algèbres normées ultramétriques, Thèse Sc. math. Univ. Poitiers, 1973.

[5] ROBBA (Philippe). - Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets, Astérisque, 1973, n° 10, p. 109-218.

(Texte reçu le 9 juin 1975)

Alain ESCASSUT
Laboratoire de Mathématiques
associé au CNRS
Université de Bordeaux-I
351 cours de la Libération
33405 TALENCE