Pierrette Cassou-Nogues

Analogues p-adiques de certaines fonctions arithmétiques

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 2 (1974-1975), exp. nº 15, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1974-1975__2__A13_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
2e année, 1974/75, n° 15, 9 p.

14 avril 1975

ANALOGUES p-ADIQUES DE CERTAINES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES

par Pierrette CASSOU-NOGUES

Il s'agit ici d'étudier les analogues p-adiques de certaines fonctions arithmétiques. Rappelons tout d'abord les études qui ont déjà été faites sur ce sujet.

Tout d'abord, en 1964, KUBOTA et LEOPOLDT [7] ont défini une fonction zéta p-adique de Riemann et des fonctions zéta de Dedekind d'un corps de nombres abélien. La fonction zéta de Riemann est définie pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ par $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$; elle possède une équation fonctionnelle qui relie les valeurs aux entiers négatifs aux valeurs aux entiers positifs, et on a $\zeta(1 - k) = -(b_k/k)$, b_k étant le k-ième nombre de Bernoulli. KUBOTA et LEOPOLDT ont montré tout d'abord que

$$b_k = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{p^r} \sum_{n=1}^{p^r} n^k \quad \text{limite p-adique,}$$

et que

$$k \longmapsto \frac{1}{k} \lim_{r\to\infty} \frac{1}{p^r} \sum_{n=1}^{p^r} \theta_p^0(n)\left(\frac{n}{\theta_p(n)}\right)^k ,$$

où

$$\theta_p : \underset{\sim}{Z}_p \longrightarrow \underset{\sim}{Z}_p$$
$$x \longmapsto \lim_{n\to\infty} x^{p^n} ,$$

se prolongeait en une fonction méromorphe sur $\underset{\sim}{Z}_p$, et qu'elle coïncidait, pour $k \equiv 0 \mod (p - 1)$, avec $\zeta(1 - k)(1 - p^{k-1})$.

La fonction zéta d'un corps de nombres est définie par

$$Z_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} N(\mathfrak{a})^{-s} , \quad \mathrm{Re}(s) > 1 ,$$

où la sommation porte sur les idéaux entiers de K , et N(.) désigne la norme de l'idéal. Pour un corps de nombres abélien, on a

$$Z_K(s) = \prod_{\chi\in\mathfrak{X}} L(s , \chi)$$

où

$$L(s , \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \quad \text{pour } \mathrm{Re}(s) > 1 ,$$

$\mathfrak{X}$ désignant l'ensemble des caractères primitifs de K . On étudie les fonctions $L(. , \chi)$ de la même manière que la fonction zéta de Riemann.

En 1969, IWASAWA [6] a retrouvé les fonctions L p-adiques de KUBOTA et LEOPOLDT en mettant en évidence une relation entre ces fonctions et la p-composante du groupe des classes d'idéaux de la $\underset{\sim}{Z}_p$-extension fondamentale au-dessus de K .

En 1970, Y. AMICE et J. FRESNEL [1], en montrant que l'on pouvait obtenir les fonctions L p-adiques à partir des séries de Taylor $\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\, n^{-s}\, T^n$, ont obtenu une formule p-adique des résidus. En fait, leur méthode est liée à celle de KUBOTA et LEOPOLDT ([2], [3]).

D'autre part, en 1970, J.-P. SERRE [11] a construit des fonctions zéta p-adiques pour des corps de nombres totalement réels. Pour cela, il suit la méthode de KLINGEN [7] et SIEGEL [13] qui utilise le fait que $\zeta_K(1-k)$ est le terme constant d'une forme modulaire sur $SL_2(\mathbb{Z})$ dont les autres termes se calculent par des formules simples.

En 1974, COATES et SINNOTT [5] obtiennent la fonction zéta p-adique d'une extensive abélienne d'un corps quadratique réel en utilisant la méthode d'IWASAWA et une formule explicite de cette fonction zéta donnée par SIEGEL [12].

En 1973, B. MAZUR et SWINNERTON-DYER [10] ont étudié les fonctions L p-adiques des courbes elliptiques en définissant une mesure p-adique.

Ju. MANIN [9], [14] a repris cette méthode qui lui permet de définir des fonctions L p-adiques pour des séries L de Hecke associées à une forme parabolique de poids entier sur $SL_2(\mathbb{Z})$ et des séries L p-adiques associées à des caractères de Hecke.

Ici nous allons nous intéresser à des séries qui ne sont pas des séries de Dirichlet et qui n'ont pas d'équation fonctionnelle. On considèrera des séries du type $\sum_{n\in\mathbb{Z}^r} a(n)\, f(n)^{-s}$ convergentes dans un demi-plan, et prolongeables en des fonctions méromorphes qui prennent sur les entiers négatifs des valeurs qui appartiennent à une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}$, que nous noterons $[\sum_{n=1}^{\infty} a(n) f(n)^k]_{\mathbb{C}}$. Suivant la méthode de KUBOTA et LEOPOLDT, nous chercherons un analogue p-adique à la fonction $k \longmapsto [\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, f(n)^k]_{\mathbb{C}}$, et nous étudierons son prolongement à $\mathbb{Z}_p$.

I. Analogue p-adique

Nous allons tout d'abord rappeler une formule qui nous permettra ensuite de trouver des analogues p-adiques à certaines séries.

1. Formule fondamentale.

Soit f une fonction uniformément dérivable sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}_p$. Considérons les séries de Taylor

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\, T^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f'(n)\, T^n$$

convergentes dans $\mathfrak{M}_p = \{x \in \mathbb{C}_p \; ; \; |x| < 1\}$. f et f' étant des fonctions continues sur $\mathbb{Z}_p$, on sait [1] que les séries considérées sont prolongeables en des fonctions analytiques $I(f)(.)$ et $I(f')(.)$ sur $O_p - (1+\mathfrak{M}_p) = \{x \in \mathbb{C}_p \; ; \; |1-x| > 1\}$, qui sont définies par des séries de Laurent en $1 - T$. Or, si l'on fait le produit formel de la série de Laurent en $1-T$, qui définit $I(f)(.)$ dans $O_p - (1+\mathfrak{M}_p)$, par la série de Taylor en $1-T$, qui définit $\log$ dans $1+\mathfrak{M}_p$, et si l'on ajoute la série de Laurent qui définit $I(f')(.)$ dans $O_p - (1+\mathfrak{M}_p)$, on obtient une série de Taylor en $1-T$ qui converge dans $1+\mathfrak{M}_p$ ([2], [3]). On notera cette série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)\, T^n + \log T \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\, T^n .$$

On peut d'autre part considérer sur $1+\mathfrak{M}_p$ la fonction

$$T \longmapsto J(f)(T) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{p^r} \sum_{n=1}^{p^r} f(n)\, T^n .$$

On a alors, pour tout T appartenant à $1+\mathfrak{M}_p$,

$$(1) \qquad J(f)(T) = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)\, T^n + \log T \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\, T^n\right) .$$

On a une formule analogue à la formule (1) pour des fonctions de plusieurs variables. Ecrivons-la pour deux variables : Soit f une fonction uniformément dérivable sur $\underset{\sim}{Z}_p \times \underset{\sim}{Z}_p$ à valeurs dans une extension algébrique finie de $\underset{\sim}{Q}_p$. Comme dans la cas d'une variable, on peut définir une série de Taylor en $(1-T_1)$, $(1-T_2)$ convergente dans $(1+\mathfrak{M}_p)^2$, notée

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(m,n) T_1^m T_2^n + \log T_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(m,n) T_1^m T_2^n$$

$$\log T_2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(m,n) T_1^m T_2^n + \log T_1 \log T_2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m,n) T_1^m T_2^n .$$

On peut aussi considérer, dans $(1+\mathfrak{M}_p)^2$,

$$(T_1,T_2) \longmapsto J(f)(T_1,T_2) = \lim_{r_1\to\infty, r_2\to\infty} \frac{1}{p^{r_1} p^{r_2}} \sum_{m=1}^{p^{r_1}} \sum_{n=1}^{p^{r_2}} f(m,n)\, T_1^m T_2^n ,$$

et on a l'égalité de ces deux fonctions.

On peut faire la remarque suivante.

Considérons la fonction $x \longmapsto x^k/k$. Alors

$$J(x \longmapsto \frac{x^k}{x})(1) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{p^r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{k} = \frac{b_k}{k}$$

$$= -\lim_{T\to 1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} T^n + \log T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{k} T^n\right] .$$

Si l'on note

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}\right]_{\underset{\sim}{C}_p} = \lim_{T\to 1}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} T^n + \log T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{k} T^n\right] = -J(x \longmapsto \frac{x^k}{k})(1)$$

et

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}\right]_{\underset{\sim}{C}} = \zeta(1-k) ,$$

on voit que

$$\forall\, k \in \underset{\sim}{N}^* , \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}\right]_{\underset{\sim}{C}} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}\right]_{\underset{\sim}{C}_p} .$$

Considérant des séries de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, f(n)^{-s}$, convergentes dans un demi-plan de $\underset{\sim}{C}$ et prolongeables en des fonctions méromorphes qui prennent sur les entiers négatifs des valeurs qui appartiennent à une extension algébrique finie de $\underset{\sim}{Q}$: $[\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\ f(n)^k]_{\underset{\sim}{C}}$, on va, quand c'est possible, chercher une primitive convenable F_k de $x \longmapsto a(x)\ f(x)^k$ telle que, en posant

$$[\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\ f(n)^k]_{\underset{\sim}{C}_p} = \lim_{T\to 1}[\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\ f(n)^k\ T^n + \log T \sum_{n=1}^{\infty} F_k(n)T^n] - J(F_k)(1)$$

on ait, pour tout k ,

$$[\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\ f(n)^k]_{\underset{\sim}{C}} = [\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\ f(n)^k]_{\underset{\sim}{C}_p} .$$

Il n'y a pour le moment que deux types de séries que nous sachions bien étudier dans $\underset{\sim}{C}$ et pour lesquelles nous connaissions des analogues p-adiques. Nous verrons après leur étude les problèmes qui se posent dans d'autres cas.

2. Etude de $\sum_{n\in N^r} (f(n) + a)^{-s}$, où f est une forme linéaire à r variables et a un nombre réel.

Ces séries sont convergentes pour $\mathrm{Re}(s) > r$, et on va montrer qu'elles se prolongent, en des fonctions méromorphes, à tout le plan complexe. Parmi ces fonctions, on a la fonction zéta d'Hürwitz qui prolonge à $\underset{\sim}{C}$ la série $\sum_{n=1}^{\infty}(1/(n + a)^s)$ convergente pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, les fonctions qui prolongent $\sum_{n=1}^{\infty}(1/(an + b)^s)$, où a et b sont des réels quelconques, à l'aide desquelles, quand a et b sont rationnels, on peut exprimer les fonctions $L(. , \chi)$ de Dirichlet et les fonctions qui prolongent les séries du type $\sum_{(m,n)\in N^r} [(m + a_1)z + n + a_2]^{-s}$. Toutes ces fonctions s'étudient de la même manière en utilisant leur transformée de Mellin. par exemple, considérons $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [(m + a_1)z + n + a_2]^{-s}$, où a_1 et a_2 sont des réels compris entre 0 et 1 . Posons $z = x + iy$, $s = \sigma + it$. Notons $\mathcal{H}$ le demi-plan supérieur $\{y > 0\}$ et $\mathcal{K}_{\sigma_0}$ le demi-plan $\{\sigma > \sigma_0\}$. La série est convergente dans $(\mathcal{H} \cup R^{+*}) \times \mathcal{K}_2$.

Pour $x > 0$, $y > 0$, $\sigma > 2$, nous avons

$$\Gamma(s) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [(m + a_1)z + n + a_2]^{-s} = \int_0^{\infty} \frac{u^{s-1}\ e^{-(a_1 z+a_2)u}}{(e^{uz} - 1)(e^u - 1)}\, du .$$

On en déduit

$$\Gamma(s) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [(m + a_1)z + n + a_2]^{-s} = \frac{1}{e^{2\pi i s} - 1} \int_{\gamma^\delta} \frac{w^{s-1}\ e^{-(a_1 z+a_2)w}}{(e^w - 1)(e^{wz} - 1)}\, dw ,$$

où γ_δ désigne le chemin, dans le plan des w , le long de l'axe réel de $+\infty$ à δ , où $0 < \delta < \min(2\pi , 2\pi/|z|)$ avec $\arg w = 0$, ensuite le long du cercle de rayon δ avec $0 \leq \arg w \leq 2\pi$, enfin le long de l'axe réel de δ à $+\infty$ avec $\arg w = 2\pi$. Ceci permet de définir un prolongement à $\underset{\sim}{C}$ de la série, en une fonction $s \longmapsto K(z , s , a_1 , a_2)$ méromorphe, et le théorème des résidus montre que tout d'abord $K(z_1,.,a_1 , a_2)$ admet deux pôles pour $s = 2$ et $s = 1$ de résidus respectifs $1/z$ et $((\frac{1}{2} + a_1)z + \frac{1}{2} + a_2)/z$, et d'autre part, si $k \geq 0$,

$$K(z_1 - k , a_1 , a_2) = \frac{1}{(k + 1)(k + 2)} \sum_{p=0}^{k+2} \binom{k+2}{p} B_p(a_1)\ B_{k+2-p}(a_2)\ z^p ,$$

où $B_k(x)$ désigne le k-ième polynôme de Bernoulli (avec $b_1 = 1/2$). Supposons maintenant que z , a_1 , a_2 soient des entiers algébriques. On cherche alors à définir un analogue p-adique à

$$k \longmapsto K(z_1 - k , a_1 , a_2) = [\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [(m + a_1)z + n + a_2]^k]_{\underset{\sim}{C}} .$$

D'après ce qui précède, on cherche une fonction F_k telle que

$$\frac{\partial F_k}{\partial x \partial y} (x , y) = [(x + a_1)z + (y + a_2)]^k$$

et telle que, si

$$[\sum_{(m,n)\in \underset{\sim}{N}^2} [(m + a_1)z + n + a_2]^k]_{\underset{\sim}{C}_p} = J(F_k) ,$$

on ait, pour tout k ,

$$[\sum_{(m,n)\in \underset{\sim}{N}^2} [(m + a_1)z + n + a_2]^k]_{\underset{\sim}{C}} = [\sum_{m,n\in \underset{\sim}{N}^2} [(m + a_1)z + n + a_2]^k]_{\underset{\sim}{C}_p} .$$

On a

$$F_k(x , y) = \frac{[(x + a_1)z + (y + a_2)]^{k+2}}{(k + 1)(k + 2)} ,$$

car

$$J(F_k)=\lim_{r_1\to\infty, r_2\to\infty} \frac{1}{p^{r_1}} \frac{1}{p^{r_2}} \sum_{m=1}^{p^{r_1}} \sum_{n=1}^{p^{r_2}} \frac{[(m+a_1)z+n+a_2]^{k+2}}{(k + 1)(k + 2)} = \frac{\sum_{p=0}^{k+2}\binom{k+2}{p} B_p(a_1) B_{k+2-p}(a_2) z^p}{(k + 1)(k + 2)} .$$

3. Etude de $\sum_{n=1}^{\infty} P'(n)\ P(n)^{-s}$ où P est un polynôme.

Traitons le cas particulier $\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2 + a)^{-s}$ avec, par souci de simplification, $0 < a < 1$. La série converge pour $\mathrm{Re}(s)>1$. Dans ce domaine, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + a)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s-1}(1 + \frac{a}{n^2})^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \frac{a^k}{n^{2k+2s-1}} .$$

On en déduit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + a)^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} a^k\ \zeta(2s + 2k - 1) .$$

Pour k non nul, la fonction $s \longmapsto \binom{-s}{k}\ \zeta(2s + 2k - 1)$ est holomorphe, et on montre que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \binom{-s}{k} a^k\ \zeta(2s + 2k - 1)$ définit une fonction holomorphe sur $\underset{\sim}{C}$. Donc $\zeta(2s - 1) + \sum_{j=1}^{\infty} \binom{-s}{k} a^k\ \zeta(2s + 2k - 1)$ définit un prolongement méromorphe de $\sum_{n=1}^{\infty} n/(n^2 + a)^s$ ayant un seul pôle en 1 . Pour $s = - K$, on a

$$[\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2 + a)^K]_{\underset{\sim}{C}} = \zeta(- 2K - 1) + \sum_{k=1}^{K} \binom{K}{k} a^k\ \zeta(- 2K + 2k - 1)$$

$$[\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2 + a)^K]_{\underset{\sim}{C}} = \sum_{k=0}^{K} \binom{K}{k} a^k \frac{b_{2K-2k+2}}{2K - 2k + 2} .$$

Supposons maintenant que a soit entier algébrique. On cherche alors une primitive F_k de $x \longmapsto x(x^2 + a)^k$ telle que si l'on pose

$$[\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2+a)^k]_{\underset{\sim}{C}_p} = - \lim_{T\to 1}[\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2+a)T^n + \log T \sum_{n=1}^{\infty} F_k(n)T^n] = - J(F_k) ,$$

alors, pour tout k, on ait

$$[\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2 + a)^k]_{\mathbb{C}_p} = [\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2 + a)^k]_{\mathbb{C}} .$$

La primitive qui convient est la fonction $x \longmapsto (x^2 + a)^{k+1}/2(k+1)$.

Parmi les séries convergentes dans un demi-plan et prolongeables en fonctions méromorphes à tout le plan complexe, il y a les séries de Dirichlet associées à une forme modulaire. Si les formes modulaires sont de poids entier, ces séries prennent sur les entiers négatifs des valeurs nulles. Par contre, les séries de Dirichlet associées à des formes modulaires de poids demi-entier prennent sur les entiers négatifs impairs des valeurs qui, a priori, ne sont pas nulles, mais on ne sait pas les étudier. D'autre part, on sait définir des expressions du type

$$[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{r-1} (m^r + n^r)^k]_{\mathbb{C}_p} = J[(x , y) \longmapsto \frac{(x^r + y^r)^{k+1}}{r(k+1)}] ,$$

mais par contre je ne sais pas prolonger à tout le plan complexe la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{r-1} (m^r + n^r)^{-s} .$$

Nous allons étudier maintenant le prolongement analytique.

II. Prolongement analytique

On a le théorème suivant, dont la démonstration se trouve dans [4].

Si K est une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}_p$, A son anneau de valuation, $\mathfrak{p}$ son idéal de valuation, et $f_{\mathfrak{p}}$ son indice d'inertie, on note $\theta_{\mathfrak{p}}$ l'application

$$A \longrightarrow A$$

$$x \longmapsto \lim_{n\to\infty} x^{p^{f_{\mathfrak{p}} n}} \quad \text{limite } \mathfrak{p}\text{-adique}$$

ce qui équivaut à

$$\theta_{\mathfrak{p}}(x)^{p^{f_{\mathfrak{p}}}} = \theta_{\mathfrak{p}}(x) \quad \text{et} \quad \theta_{\mathfrak{p}}(x) \equiv x \mod \mathfrak{p} .$$

On suppose toujours que $|p| = 1/p$.

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> f <u>une fonction uniformément dérivable sur</u> $\mathbb{Z}_p$ <u>à valeurs dans une extension algébrique</u> K <u>de</u> $\mathbb{Q}_p$. <u>Soit</u> A <u>et</u> $\mathfrak{p}$ <u>l'anneau et l'idéal de valuation de</u> K . <u>Pour tout</u> i <u>et tout</u> k , <u>entiers naturels</u>, <u>on définit</u>

$$J(x \longmapsto \theta_{\mathfrak{p}}^{i}(f(x))[\frac{f(x)}{\theta_{\mathfrak{p}}(f(x))}]^k) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{p^r} \sum_{n=1}^{p^r} \theta_{\mathfrak{p}}^{i}(f(n))[\frac{f(x)}{\theta_{\mathfrak{p}}(f(n))}]^k .$$

<u>Alors il existe une fonction continue, et une seule, qui prolonge sur</u> $\mathbb{Z}_p$ <u>la fonction</u>

$$k \longmapsto J(x \longmapsto \theta_{\mathfrak{p}}^{i}(f(x))[\frac{f(x)}{\theta_{\mathfrak{p}}(f(x))}]^k) .$$

De plus, si π est une uniformisante de K, posons

$$B = \sup_i |\pi^i/i|_{\mathfrak{p}} .$$

Alors la fonction est analytique dans le disque

$$D = \{s \in \mathbb{Q}_p \; ; \; |s| < p^{-(1/(p-1))-\log_p B}\} .$$

On a également le même théorème avec un nombre quelconque de variables. On en déduit, entre autres, les corollaires suivants.

COROLLAIRE 1. - Soit a un réel compris entre 0 et 1, entier algébrique sur $\mathbb{Q}$. Soient $\mathfrak{p}$ un premier de $\mathbb{Q}(a)$ au-dessus de p, et $\mathbb{Q}(a)_{\mathfrak{p}}$ le complété $\mathfrak{p}$-adique de $\mathbb{Q}(a)$. Soient π une uniformisante, et $B = \sup_k |\pi^k/k|_{\mathfrak{p}}$. Alors il existe une fonction méromorphe, et une seule, qui prolonge sur

$$\{s \in \mathbb{Q}_p : |s| < p^{-(1/(p-1))-\log_p B}\}$$

la fonction

$$k \longmapsto \frac{1}{k} J(x \longmapsto \theta_{\mathfrak{p}}^{i}(x+a)[\frac{x+a}{\theta_{\mathfrak{p}}(x+a)}]^k) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{p^{r_k}} \sum_{n=1}^{p^r} \theta_{\mathfrak{p}}^{i}(n+a)[\frac{n+a}{\theta_{\mathfrak{p}}(n+a)}]^k .$$

Cette fonction coïncide, pour k entier positif, $k \equiv i \mod(p^{f_{\mathfrak{p}}} - 1)$ ($f_{\mathfrak{p}}$ désignant l'indice d'inertie de $\mathbb{Q}(a)_{\mathfrak{p}}$ sur $\mathbb{Q}_p$), avec la fonction $s \longmapsto \zeta_1(1-s)$ qui prolonge à $\mathbb{C}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_{\mathfrak{p}}^{0}(n+a)/(n+a)^s$.

COROLLAIRE 2. - Soient (z , a_1 , a_2) des entiers algébriques sur $\mathbb{Q}$ tels que a_1 et a_2 soient réels, $0 \leq a_1 < 1$, $0 \leq a_2 < 1$, et z soit ou réel positif ou complexe tel que $\mathrm{Im}(z) > 0$ si $a_1 = 0$ ou $\mathrm{Im}(z) > 0$ et $\mathrm{Re}(z) > (-a_2-1)/a_1$ si $a_1 \neq 0$.

Soit $\mathfrak{p}$ un premier de $\mathbb{Q}(z , a_1 , a_2)$ au-dessus de p, et $\mathbb{Q}(z , a_1 , a_2)_{\mathfrak{p}}$ le complété $\mathfrak{p}$-adique de $\mathbb{Q}(z , a_1 , a_2)$.

Alors il existe une fonction méromorphe, et une seule, dans un disque D contenant l'origine qui prolonge la fonction

$$k \longmapsto \frac{1}{k(k-1)} J[(x,y) \longrightarrow \theta_{\mathfrak{p}}^{0}[(x+a_1)z+y+a_2](\frac{(x+a_1)z+y+a_2}{\theta_{\mathfrak{p}}[(x+a_1)z+y+a_2]})^k]$$

$$=\lim_{r_1\to\infty, r_2\to\infty} \frac{1}{p^{r_1} p^{r_2} k(k-1)} \sum_{m=1}^{p^{r_1}} \sum_{n=1}^{p^{r_2}} \theta_{\mathfrak{p}}^{0}[(m+a_1)z+n+a_2](\frac{(m+a_1)z+n+a_2}{\theta_{\mathfrak{p}}[(m+a_1)z+n+a_2]})^k .$$

Cette fonction coïncide pour $k \equiv i \mod(p^{f_{\mathfrak{p}}} - 1)$ avec la fonction $1 \longmapsto K_1(z , 2-s , a_1 , a_2)$ qui prolonge à $\mathbb{C}$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{\mathfrak{p}}^{0}[(m+a_1)z+n+a_2]}{[(m+a_1)z+n+a_2]^s} .$$

On a un théorème analogue pour un nombre quelconque de variables.

COROLLAIRE 3. - <u>Soient</u> a <u>un réel, entier algébrique sur</u> $\mathbb{Q}$, $\mathfrak{p}$ <u>un premier de</u> $\mathbb{Q}(a)$ <u>au-dessus de</u> p , $\mathbb{Q}(a)_{\mathfrak{p}}$ <u>le complété</u> $\mathfrak{p}$<u>-adique de</u> $\mathbb{Q}(a)$.

<u>Alors il existe une fonction méromorphe, et une seule, sur un disque</u> D <u>qui contient l'origine, qui prolonge la fonction</u>

$$k \longmapsto \frac{1}{2k} J[x \longmapsto \theta_{\mathfrak{p}}^{i}(x^2+a)[\frac{x^2+a}{\theta_{\mathfrak{p}}(x^2+a)}]^k] = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2kp^r} \sum_{n=1}^{p^r} \theta_{\mathfrak{p}}^{i}(n^2+a)[\frac{n^2+a}{\theta_{\mathfrak{p}}(n^2+a)}]^k .$$

<u>Cette fonction coïncide, pour</u> $k \equiv i \mod(p^{f_{\mathfrak{p}}} - 1)$, <u>avec</u> $s \longmapsto \varphi(1-s)$ <u>qui prolonge à</u> $\mathbb{C}$ <u>la série</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_{\mathfrak{p}}^{0}(n^2+a)\, n/(n^2+a)^s$.

On peut faire la remarque importante suivante : Dans chaque cas étudié la primitive, qui donne l'analogue p-adique de la série, est telle que la fonction p-adique obtenue a les mêmes pôles avec le même résidu que la fonction complexe correspondante (corrigée par θ^0).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.) et FRESNEL (J.). - Fonctions zéta p-adiques des corps de nombres abéliens et formule des résidus pour le nombre des classes d'idéaux, Acta Arithmetica, Warzawa, t. 20, 1972, p. 353-384.

[2] CASSOU-NOGUES (P.). - Formes linéaires p-adiques et prolongement analytique, Thèse 3e cycle, Math., Univ. Bordeaux-I, 1971.

[3] CASSOU-NOGUES (P.). - Formes linéaires p-adiques et prolongement analytique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274, 1972, Série A, p. 5-8.

[4] CASSOU-NOGUES (P.). - Analogues p-adiques de certaines fonctions arithmétiques, Publications de Bordeaux-I (à paraître).

[5] COATES (J.) and SINNOTT (W.). - On p-adic L-functions over real quadratic fields, Inventiones mathematicae, Berlin, t. 25, 1974, p. 253-279.

[6] IWASAWA (K.). - On p-adic L-functions, Annals of Math., t. 89, 1969, p. 198-205.

[7] KLINGEN (H.). - Über die Werte der Dedekind Zetafunktion, Math. Annalen, t. 145, 1962, p. 265-272.

[8] KUBOTA (T.) und LEOPOLDT (H. W.). - Eine p-adische Theorie der Zeta-werte, I : Einführung der p-adischer Dirichletschen L-Funktionen, J. für reine und ang. Math., t. 214/215, 1964, p. 328-339.

[9] MANIN (Ju. I.). - Periods of parabolic forms and p-adic Hecke series, Math. USSR-Sbornik, t. 21, 1973, p. 371-393 ; [en russe] Mat. Sbornik, t. 92, 1973, p. 378-401.

[10] MAZUR (B.) and SWINNERTON-DYER (P.). - Arithmetic of Weil curves, Inventiones Math., Berlin, t. 25, 1974, p. 1-61.

[11] SERRE (J.-P.). - Formes modulaires et fonctions zeta p-adiques, "Modular functions of one variable, III", p. 191-268. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 350).

[12] SIEGEL (C.). - Uber die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen, Gött. Nach., t. 3, 1970, p. 15-56.

[13] SIEGEL (C.). - Bernouische Polynome und quadratischer Zahlkörper, Gött. Nach., t. 2, 1968, p. 7-38.

[14] VIŠIK (M. M.) and MANIN (Ju. I.). - p-adic Hecke series of imaginary quadratic fields, Math. USSR-Sbornik, t. 24, 1974 (à paraître) ; [en russe] Mat. Sbornik, t. 95, 1974, p. 357-383.

(Texte reçu le 20 juin 1975)

Pierrette CASSOU-NOGUES
9 rue Ségalier
33000 BORDEAUX