GROUPE DE TRAVAIL
D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

ALAIN ESCASSUT

Spectre maximal d'une algèbre de Krasner

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 1 (1973-1974), exp. nº 12, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1973-1974__1__A9_0>

Groupe de Travail d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, A. ESCASSUT, P. ROBBA)
1973/74, n° 12, 14 p.

8 avril 1974

SPECTRE MAXIMAL D'UNE ALGÈBRE DE KRASNER

par Alain ESCASSUT

Introduction.

Cet article a pour objet d'étudier les idéaux maximaux de codimension infinie d'une algèbre d'éléments analytiques au sens de KRASNER. Soit un infraconnexe fermé borné D d'un corps algébriquement clos ultramétrique complet K ; en utilisant les résultats de [2] concernant la caractérisation des semi-normes multiplicatives continues de l'algèbre de Krasner $H(D)$ par des filtres circulaires de D, et grâce aux résultats de [8] montrant que tout idéal maximal de $H(D)$ définit au moins une semi-norme multiplicative continue, nous chercherons à associer à chaque idéal maximal de codimension infinie $\mathfrak{M}$ un filtre circulaire particulier $\mathfrak{F}$ tel que $\mathfrak{M}$ soit l'idéal des éléments $f \in H(D)$ tels que $\lim_{\mathfrak{F}} f(x) = 0$. On retrouvera naturellement les problèmes classiques d'analycité, et on utilisera fréquemment la notion de T-filtre [3].

Ce problème est en rapport avec celui évoqué par B. GUENNEBAUD concernant l'existence de plusieurs valeurs absolues continues dans une extension Γ de K munie d'une structure de K-algèbre de Banach, et nous tenterons de confirmer, dans le cas des algèbres $H(D)$, sa conjecture selon laquelle si le corps résiduel de K ou si le groupe des valeurs de K est non dénombrable, alors Γ n'admet qu'une seule valeur absolue continue.

I. Caractérisation des idéaux maximaux.

1. Les idéaux maximaux de codimension 1.

Considérons une algèbre de Banach d'éléments analytiques $H(D)$ sur un fermé borné D de K dont l'application identique sur D est notée x. Il est clair que, pour tout point $a \in D$, l'idéal $\mathfrak{I}(a)$ des éléments de $H(D)$, nuls au point a, est un idéal maximal de codimension 1 et, d'après le théorème IV.2 de [1] et le théorème 1.3 de [4], il est clair que $\mathfrak{I}(a)$ est engendré par le polynôme $x - a$ si $a \in \mathring{D}$, et que (a) n'est pas de type fini si $a \in D - \mathring{D}$. Réciproquement, pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de codimension 1 de $H(D)$, l'homomorphisme φ de $H(D)$ sur K, tel que $\operatorname{Ker} \varphi = \mathfrak{M}$, est continu, et si l'on note $a = \varphi(x)$, il est clair que $\varphi(f) = 0$ si, et seulement si, $f(a) = 0$, donc $\mathfrak{M} = \mathfrak{I}(a)$.

2. Rappels.

Rappelons très brièvement quelques résultats et définitions de [2]. Dans tout cet article, on désignera par K un corps algébriquement clos ultramétrique complet.

Soit A une K-algèbre normée dont la norme est notée $\|\cdot\|$. On notera $\mathrm{Mult}(A, \|\cdot\|)$ l'ensemble des semi-normes multiplicatives de A continues pour la norme $\|\cdot\|$.

Il est clair que l'ensemble $\mathrm{Ker}\,\varphi$ des $x \in A$ tels que $\varphi(x) = 0$ ($\varphi \in \mathrm{Mult}(A, \|\cdot\|)$) est un idéal premier. On notera $\mathrm{Mult}_m(A, \|\cdot\|)$ l'ensemble des $\varphi \in \mathrm{Mult}(A, \|\cdot\|)$ tels que $\mathrm{Ker}\,\varphi$ soit un idéal maximal de A, et l'on notera $\mathrm{Mult}_a(A, \|\cdot\|)$ l'ensemble des $\varphi \in \mathrm{Mult}(A, \|\cdot\|)$ tels que $\mathrm{Ker}\,\varphi$ soit un idéal maximal de codimension 1.

Le théorème 1 de [8] a pour conséquence la proposition I.1.

PROPOSITION I.1. - Pour tout idéal maximal d'une K-algèbre de Banach A, le corps $\Gamma = A/\mathfrak{M}$, muni de sa structure de K-algèbre de Banach quotient, admet au moins une valeur absolue continue $|\cdot|$ et, si Φ désigne la surjection canonique de A sur Γ, l'application $\varphi : x \longrightarrow |\Phi(x)|$ est telle que $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathfrak{M}$.

L'étude de $\mathrm{Mult}(H(D), \|\cdot\|_D)$ (où D est un fermé borné et où $\|\cdot\|_D$ désigne la norme de la convergence uniforme sur D) a été faite dans [2] et [6]. Nous allons en rappeler les principaux résultats qui utilisent notamment la notion de filtre circulaire.

Précisons quelques notations.

Soient $a \in K$, et $r \geq 0$. On notera $d(a, r)$ l'ensemble des $\xi \in R$ tels que $|\xi - a| \leq r$, appelé disque circonférencié de centre a de diamètre r. On notera $C(a, r)$ l'ensemble des $\xi \in K$ tels que $|\xi - a| = r$ (appelé cercle de centre a de rayon r). Enfin, soit $a \in K$, et soient $r_1, r_2 \in R$ tels que $0 \leq r_1 \leq r_2$. On notera $\Gamma(a, r_1, r_2)$ l'ensemble des $\xi \in K$ tels que $r_1 < |\xi - a| < r_2$.

D'autre part, on appellera classe d'un disque circonférencié ou d'un cercle de diamètre r tout disque non circonférencié de diamètre r inclus dans ce disque ou ce cercle.

On appelle filtre circulaire de K un filtre de K qui admet un système générateur de la forme $\Phi \cup \hat{\Phi}$ (que l'on nomme système générateur canonique), où Φ est une suite strictement décroissante de disques circonférenciers d_n (où l'on note $r = \lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}(d_n)$), et où $\hat{\Phi}$ est la famille des couronnes $\Gamma(a, r_1, r_2)$ telles que $a \in \bigcap_{d\in\mathfrak{F}} d$ et $r_1 < r < r_2$. Le nombre r est appelé diamètre de $\mathfrak{F}$; on note $\Delta(\mathfrak{F})$ l'ensemble $\bigcap_{n\in N} d_n$, et les points de $\Delta(\mathfrak{F})$ sont appelés centres de $\mathfrak{F}$. De plus, on dit qu'un filtre circulaire est large si son diamètre est > 0 (c'est-à-dire si ce n'est pas un filtre de Cauchy).

Nous résumerons les résultats de [2] et [6] par le théorème I.2.

THÉORÈME I.2. - Soit D un fermé borné. Pour tout $\varphi \in \mathrm{Mult}(H(D), \|\cdot\|_D)$, il existe un filtre circulaire unique $\mathfrak{F}_\varphi$ sécant à D, tel que $\varphi(\mathfrak{F}) = \lim_{\mathfrak{F}\cap D} |f(x)|$, et l'application $\varphi \longrightarrow \mathfrak{F}_\varphi$ est une bijection de $\mathrm{Mult}(H(D), \|\cdot\|_D)$ sur l'ensemble des filtres circulaires de K sécants à D. De plus, $\varphi \in \mathrm{Mult}_a(H(D), \|\cdot\|_D)$ si, et seulement si, $\mathfrak{F}_\varphi$ est un filtre de Cauchy ; alors, si $\varphi \in \mathrm{Mult}_a(H(D), \|\cdot\|_D)$, $\mathfrak{F}_\varphi \cap D$ est le filtre des voisinages d'un point $a \in D$, et l'on a $\varphi(f) = |f(a)|$ pour tout $f \in H(D)$.

Nous considèrerons uniquement des filtres circulaires sécants à l'ensemble D considéré, et il est immédiat de voir que si deux filtres circulaires de K ont une même intersection avec D, ils sont égaux. On nommera donc filtre circulaire de D l'intersection avec D d'un filtre circulaire de K sécant à D, et on pourra confondre sans inconvénient tout filtre circulaire de K sécant à D avec son intersection avec D.

Alors si $\mathfrak{F}$ est un filtre circulaire de D, on notera $\Delta(\mathfrak{F}, D)$ l'ensemble $\Delta(\mathfrak{F}) \cap D$ (où l'on considère $\mathfrak{F}$ comme filtre circulaire de K).

D'autre part, nous dirons ici qu'un filtre circulaire $\mathfrak{F}$ est entouré par un filtre circulaire $\mathfrak{G}$ si l'un des éléments de $\mathfrak{F}$ est inclus dans $\Delta(\mathfrak{G})$.

Enfin, on a défini dans [2] la notion de filtre monotone de K que l'on peut résumer de la façon suivante : un filtre $\mathfrak{G}$ de K est décroissant s'il admet un système générateur de la forme $\mathfrak{F} \cap C\Delta(\mathfrak{F})$, où $\mathfrak{F}$ est un filtre circulaire large de K, et un filtre $\mathfrak{G}$ est croissant s'il admet un système générateur de la forme $\mathfrak{F} \cap d$, où $\mathfrak{F}$ est un filtre circulaire et où d est l'une des classes du disque $\Delta(\mathfrak{F})$. Alors d est le plus petit disque appartenant à $\mathfrak{G}$.

Enfin on appelle filtre monotone de K un filtre croissant ou décroissant. Alors il est clair qu'avec les notations ci-dessus, le filtre $\mathfrak{F}$ servant à définir le filtre décroissant ou croissant $\mathfrak{G}$ est le seul filtre circulaire sécant à $\mathfrak{G}$. On l'appelle filtre circulaire associé à $\mathfrak{G}$, et nous dirons ici qu'un filtre monotone $\mathfrak{G}$ est entouré par un filtre circulaire $\mathfrak{F}'$ si son filtre circulaire associé $\mathfrak{F}$ est entouré par $\mathfrak{F}'$. De même nous dirons que $\mathfrak{F}'$ est entouré par $\mathfrak{G}$ si $\mathfrak{F}'$ est entouré par $\mathfrak{F}$.

Alors si D est un fermé borné de K, on appelle filtre monotone de D l'intersection avec D d'un filtre monotone de K sécant à D. D'autre part, si $\mathfrak{G}$ est un filtre décroissant de D et si $\mathfrak{F}$ est son filtre circulaire associé, on appelle plage de $\mathfrak{G}$ l'ensemble $\mathcal{P}(\mathfrak{G}) = \Delta(\mathfrak{F}, D)$; si $\mathfrak{G}$ est un filtre croissant de D, et si $\mathfrak{F}$ est son filtre circulaire associé, on appelle plage de $\mathfrak{G}$ l'ensemble $\mathcal{P}(\mathfrak{G}) = (Cd) \cap D)$, où d est le plus petit disque appartenant à $\mathfrak{G}$. Enfin, pour tout filtre monotone $\mathfrak{F}$ de D, on appelle chapeau de $\mathfrak{F}$, noté $\mathcal{C}(\mathfrak{F})$, le complémentaire de $\mathcal{P}(\mathfrak{F})$ dans D.

On dit qu'un élément $f \in H(D)$ est annulé par un filtre $\mathfrak{F}$ de D si

$$\lim_{\mathfrak{F}} f(x) = 0 \ ;$$

alors l'idéal des éléments annulés par $\mathfrak{F}$ sera noté $\mathfrak{J}(\mathfrak{F})$.

On a défini dans [2] l'expression $w_{\mathfrak{F}}(f, \mu)$ associée à un filtre décroissant $\mathfrak{F}$

que l'on utilisera fréquemment, ainsi que les notions d'éléments <u>strictement annulés</u> et <u>auto-annulés</u> par un filtre monotone [3]. On sait qu'un filtre monotone admet des éléments strictement annulés et des éléments auto-annulés si, et seulement si, c'est un T-filtre ([3], théorème I.6).

3. Filtres circulaires distingués.

Nous allons caractériser les idéaux maximaux de codimension infinie par les filtres circulaires distingués que nous allons définir.

Nous dirons qu'un filtre circulaire $\mathfrak{F}$ d'un infraconnexe D est <u>sous-distingué</u> s'il possède les deux propriétés suivantes :

(i) $\Delta(\mathfrak{F}, D)$ est vide ou égal à la réunion d'une famille de chapeaux de T-filtres croissants,

(ii) Tout T-filtre décroissant de $\Delta(\mathfrak{F}, D)$ est sécant à au moins un chapeau de T-filtre croissant de $\Delta(\mathfrak{F}, D)$.

De plus, nous dirons qu'un filtre circulaire sous-distingué est <u>distingué</u> s'il possède la propriété (iii).

(iii) $\Delta(\mathfrak{F}, D)$ est égal à D, ou bien à la plage d'un T-filtre décroissant de D, ou bien à l'intersection d'une suite décroissante de plages de T-filtres décroissants de D.

LEMME I.3. - <u>Si $\mathfrak{F}$ est un filtre circulaire distingué d'un infraconnexe fermé borné D, $\mathfrak{J}(\mathfrak{F})$ n'est inclus dans aucun idéal maximal de codimension</u> 1.

<u>Preuve</u>. - On a vu que tout idéal maximal de codimension 1 est de la forme $\mathfrak{J}(a)$ (où $a \in D$). Or, pour tout $a \in \Delta(\mathfrak{F}, D)$ il existe un T-filtre $\mathfrak{T}$ croissant de $\Delta(\mathfrak{F}, D)$ de centre a, et il existe donc un élément $f \in H(D)$ auto-annulé par $\mathfrak{T}$, tel que $f(a) \neq 0$, de sorte que $f \in \mathfrak{J}(\mathfrak{F})$ et $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}) \not\subset \mathfrak{J}(a)$. De même, pour tout $a \in D - \Delta(\mathfrak{F}, D)$, grâce à la condition (iii), il existe un T-filtre décroissant $\mathfrak{T}'$ entourant $\mathfrak{F}$, tel que $f(a) \neq 0$ de sorte que $f \in \mathfrak{J}(\mathfrak{F})$ et $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}) \not\subset \mathfrak{J}(a)$.

LEMME I.4. - <u>Deux filtres circulaires distingués distincts définissent des idéaux incomparables</u>.

<u>Preuve</u>. - Soient $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ deux filtres circulaires distingués distincts. Supposons d'abord $\mathfrak{F}_1$ entouré par $\mathfrak{F}_2$. Alors $\Delta(\mathfrak{F}_1, D) \neq D$, donc $\Delta(\mathfrak{F}_2, D)$, qui contient strictement $\Delta(\mathfrak{F}_1, D)$, admet au moins un T-filtre décroissant $\mathfrak{T}$ non sécant à $\Delta(\mathfrak{F}_1, D)$, et $\mathfrak{T}$ est donc sécant à un chapeau de T-filtre croissant $\mathfrak{S}$ de $\Delta(\mathfrak{F}_2, D)$. Alors il existe un élément $f \in H(D)$, auto-annulé par $\mathfrak{S}$, et non annulé par $\mathfrak{T}$, de sorte que $f \notin \mathfrak{J}(\mathfrak{F}_1)$ et $f \in \mathfrak{J}(\mathfrak{F}_2)$, et il existe $g \in H(D)$, auto-annulé par $\mathfrak{T}$, et non annulé par $\mathfrak{S}$, de sorte que $g \notin \mathfrak{J}(\mathfrak{F}_2)$ et $g \in \mathfrak{J}(\mathfrak{F}_2)$, ce qui prouve que $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}_1)$ et $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}_2)$ sont incomparables.

LEMME I.5. - *Soient* $\mathfrak{F}$ *et* $\mathfrak{S}$ *deux filtres circulaires de diamètres* R *et* S *d'un infraconnexe fermé borné* D *tels que* $\mathfrak{S}$ *entoure* $\mathfrak{F}$. *Alors on a*

$$\mathfrak{I}(\mathfrak{F}) \supset \mathfrak{I}(\mathfrak{S}) \quad (\text{resp. } \mathfrak{I}(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{I}(\mathfrak{S}))$$

si, et seulement si, $\mathfrak{F}$ *n'est entouré par aucun* T-*filtre croissant de diamètre* $r \in \,]R , S]$ (resp. *décroissant de diamètre* $r \in [R , S[$.

Preuve. - Soit $\mathfrak{T}$ un T-filtre croissant entourant $\mathfrak{F}$ et de diamètre $r \in]R,S]$; il existe des éléments $f \in H(D)$ auto-annulé par $\mathfrak{T}$, donc annulés par $\mathfrak{S}$ et non annulés par $(\mathfrak{F})$, de sorte que $\mathfrak{I}(\mathfrak{F}) \neq \mathfrak{I}(\mathfrak{S})$. Réciproquement, si $\mathfrak{F}$ n'est entouré par aucun T-filtre croissant de diamètre $r \in \,]R , S]$, la relation

$$w_{\mathfrak{F}}(f , - \log S) = + \infty$$

implique $w_{\mathfrak{F}}(f , \mu) = + \infty$ pour tout $\mu \in [- \log S , - \log R[$, d'où

$$w_{\mathfrak{F}}(f , - \log R) = + \infty \quad \text{et} \quad \mathfrak{I}(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{I}(\mathfrak{F}) .$$

De même, si $\mathfrak{T}$ est un T-filtre décroissant entourant $\mathfrak{F}$, de diamètre $r \in [R,S[$, il existe un élément $f \in H(D)$ auto-annulé par $\mathfrak{T}$, et donc annulé par $\mathfrak{F}$ mais non par $\mathfrak{S}$, de sorte que $\mathfrak{I}(\mathfrak{F}) \not\subset \mathfrak{I}(\mathfrak{S})$, et si $\mathfrak{F}$ n'est entouré par aucun T-filtre décroissant de diamètre $r \in [R , S[$, alors $\mathfrak{I}(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{I}(\mathfrak{S})$; le lemme I.5 est donc établi.

LEMME I.6. - *Soit* $\mathfrak{F}$ *un filtre circulaire maximal d'un infraconnexe fermé borné* D *tel que* $\mathfrak{I}(\mathfrak{F})$ *soit un idéal maximal de codimension* ∞ . *Alors* $\mathfrak{F}$ *est sous-distingué, et il existe un filtre circulaire distingué* $\mathfrak{S}$ *qui entoure* $\mathfrak{F}$, *tel que* $\mathfrak{I}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{I}(\mathfrak{S})$.

Preuve. - Nous allons montrer que $\mathfrak{F}$ satisfait nécessairement (i) et (ii). En effet, pour tout $a \in \Delta(\mathfrak{F} , D)$ il existe $f \in \mathfrak{I}(\mathfrak{F})$ tel que $f(a) \neq 0$; mais on a évidemment $v_a(f , - \log R) = + \infty$; soit μ_a le plus grand des nombres μ tels que $v_a(f , \mu) = + \infty$. Alors f est strictement annulé par un T-filtre croissant $\mathfrak{T}_a$ de centre a , de diamètre $p^{-\mu_a} \leq r$ de sorte que $\Delta(\mathfrak{F} , D) \supset \mathcal{C}(\mathfrak{T}_a)$. Or par définition $\bigcup_{a \in \Delta(\mathfrak{F},D)} \mathcal{C}(\mathfrak{T}_a) \supset \Delta(\mathfrak{F} , D)$, donc la condition (i) est satisfaite.

Supposons maintenant que la condition (ii) ne soit pas satisfaite. Alors $\Delta(\mathfrak{F} , D) \neq \emptyset$, et il existe un T-filtre décroissant $\mathfrak{T}$ de $\Delta(\mathfrak{F} , D)$, de diamètre r , qui n'est sécant à aucun chapeau de T-filtre croissant de $\Delta(\mathfrak{F} , D)$. Alors, pour tout $f \in \mathfrak{I}(\mathfrak{F})$, on a $f \in \mathfrak{I}(\mathfrak{T})$, car $w_{\mathfrak{T}}(f , - \log R) = + \infty$, donc $w_{\mathfrak{T}}(f,\mu) = +\infty$ pour tout $\mu \in [- \log R , - \log r]$ puisque $\mathfrak{T}$ n'est sécant à aucun chapeau de T-filtre croissant. Donc $\mathfrak{I}(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{I}(\mathfrak{T})$. Or puisque $\mathfrak{T}$ est entouré par $\mathfrak{F}$, il est clair que tout élément $f \in H(D)$, strictement annulé par $\mathfrak{T}$ n'appartient pas à $\mathfrak{I}(\mathfrak{F})$ ce qui contredit le fait que $\mathfrak{I}(\mathfrak{F})$ soit maximal. Donc la condition (ii) est satisfaite, et $\mathfrak{F}$ est sous-distingué.

Supposons maintenant que $\mathfrak{F}$ ne soit pas distingué ; alors il ne satisfait pas la condition (iii). Supposons d'abord que $\mathfrak{F}$ ne soit entouré par aucun T-filtre décroissant, et soit R' le diamètre de D. Soit $\mathfrak{S}'$ le filtre circulaire de D de diamètre R', qui entoure $\mathfrak{F}$. Alors on a $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{J}(\mathfrak{S}')$ d'après le lemme 4, donc $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{J}(\mathfrak{S}')$ puisque $\mathfrak{J}(\mathfrak{F})$ est un idéal maximal. Supposons enfin qu'il existe des T-filtres décroissants qui entourent $\mathfrak{F}$, et soit R'' la borne inférieure de l'ensemble de leurs diamètres. Alors le filtre circulaire $\mathfrak{S}''$ de diamètre R'' qui entoure $\mathfrak{F}$ est tel que $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{J}(\mathfrak{S}'')$ (toujours grâce au lemme I.4), et le filtre $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}'$ ou $\mathfrak{S}''$ que nous avons fait apparaître est sous-distingué puisque $\mathfrak{J}(\mathfrak{S})$ est maximal, et il est clair que $\mathfrak{S}$ satisfait la condition (iii) par définition, ce qui prouve le lemme I.6.

PROPOSITION I.7. - <u>Soit</u> $\mathfrak{F}$ <u>un filtre circulaire distingué d'un infraconnexe fermé borné</u> D. <u>Alors</u> $\mathfrak{J}(\mathfrak{F})$ <u>est un idéal maximal de codimension infinie de</u> $H(D)$.

<u>Preuve de la proposition</u>. - Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal contenant $\mathfrak{J}(\mathfrak{F})$. Alors $\mathfrak{M}$ est de codimension infinie, car sinon $\mathfrak{M}$ serait de la forme $\mathfrak{J}(a)$ (où $a \in D$), et on aurait donc $f(a) = 0$ pour tout $f \in \mathfrak{J}(\mathfrak{F})$, ce qui contredit le fait que $\mathfrak{F}$ soit distingué. Alors, d'après le lemme I.6, $\mathfrak{M}$ est de la forme $\mathfrak{J}(\mathfrak{S})$, où $\mathfrak{S}$ est un filtre circulaire distingué. Mais, d'après le lemme I.4, on a $\mathfrak{S} = \mathfrak{F}$.

THÉORÈME I.8. - <u>L'application</u> $\mathfrak{J}$ <u>induit une bijection de l'ensemble des filtres circulaires distingués sur l'ensemble des idéaux maximaux de codimension</u> ∞.

<u>Preuve</u>. - Grâce au lemme I.4 et à la proposition I.7, il est clair que $\mathfrak{J}$ induit une injection de l'ensemble des filtres circulaires distingués dans l'ensemble des idéaux maximaux de codimension ∞. Mais grâce à la proposition I.7 et au lemme I.5, tout idéal maximal de codimension ∞ de $H(D)$ est de la forme $\mathfrak{J}(\mathfrak{F})$, où $\mathfrak{F}$ est un filtre circulaire distingué, ce qui prouve le théorème I.8.

COROLLAIRE I.9. - <u>Un idéal maximal d'une algèbre de Banach</u> $H(D)$ <u>sans idempotent différent de</u> 0 <u>et</u> 1 <u>est</u>

<u>ou bien principal</u>, <u>de codimension</u> 1, <u>de la forme</u> $\mathfrak{J}(a) = (x - a)\, H(D)$, <u>où</u> $a \in \mathring{D}$;

<u>ou bien de type infini</u>, <u>de codimension</u> 1, <u>de la forme</u> $\mathfrak{J}(a)$, <u>où</u> $a \in D - \mathring{D}$;

<u>ou bien de type et de codimension infinis</u>, <u>de la forme</u> $\mathfrak{J}(\mathfrak{F})$, <u>où</u> $\mathfrak{F}$ <u>est un filtre circulaire distingué</u>.

II. Filtres distingués irréguliers.

1. Problème.

Nous allons chercher maintenant à quelle condition on peut avoir un filtre sous-distingué $\mathfrak{S}$ et un filtre distingué $\mathfrak{F}$ tels que

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{J}(\mathfrak{S}) .$$

PROPOSITION II.1. - *Soit* $\mathfrak{S}$ *un filtre circulaire distingué de diamètre* S *, et soit* $\mathfrak{F}$ *un filtre circulaire sous-distingué de diamètre* R *tel que* $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{J}(\mathfrak{S})$. *Alors* $\mathfrak{S}$ *entoure* $\mathfrak{F}$ *et, pour tout* $a \in D$ *tel que* $w_{\mathfrak{F}}(a) \in [-\log S , -\log R]$, a *est centre d'un* T-*filtre croissant de diamètre* $\leq p^{-w_{\mathfrak{F}}(a)}$.

Il est immédiat de voir que $\mathfrak{S}$ entoure $\mathfrak{F}$, car $\mathfrak{F}$ est entouré par un filtre circulaire distingué $\mathfrak{S}'$ tel que $\mathfrak{J}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{J}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{J}(\mathfrak{S}')$. Or $\mathfrak{J}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{J}(\mathfrak{S}')$ implique $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}'$ d'après le lemme 2. D'autre part, puisque $\mathfrak{S}$ est distingué, pour tout $a \in \Delta(\mathfrak{S} , D)$, a est centre d'un T-filtre croissant $\mathfrak{T}$ de diamètre $\rho \leq S$. Mais puisque $\mathfrak{T}$ n'entoure pas $\mathfrak{F}$, on a $-\log \rho \geq w_{\mathfrak{F}}(a)$, ce qui prouve la proposition II.1.

DÉFINITION. - *Nous dirons qu'un filtre circulaire distingué* $\mathfrak{S}$ *d'un infraconnexe fermé borné* D *est régulier si* D *n'admet pas de filtre circulaire sous-distingué* $\mathfrak{F}$ *, différent de* $\mathfrak{S}$ *, tel que* $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{J}(\mathfrak{S})$. *Si* $\mathfrak{S}$ *n'est pas régulier, nous dirons que* $\mathfrak{S}$ *est irrégulier*.

Remarque. - En particulier, on voit que si $\mathfrak{S}$ est un filtre circulaire irrégulier de diamètre R , alors $\Delta(\mathfrak{S} , D) \neq \emptyset$ et si $a \in \Delta(\mathfrak{S} , D)$, la borne supérieure R' des diamètres de T-filtres croissants de centre a , de $\Delta(\mathfrak{S} , D)$ est telle que $R' < R$ ce qui prouve, d'après la proposition II.1, que, pour tout $r \in [R' , R] \cap |K|$ et pour toute classe Γ du cercle $C(a , r)$, Γ contient au moins un trou de D .

Inversement, on obtient un exemple de filtre circulaire irrégulier de la façon suivante. Soit D un infraconnexe fermé de diamètre R admettant une famille de T-filtres croissants $(\mathfrak{T}_i)_{i\in I}$ de diamètre $r_i < R$ (pour tout $i \in I$), telle que la famille $(\mathcal{C}(\mathfrak{T}_i))_{i\in I}$ soit une partition de D , et supposons que les seuls T-filtres de D soient la famille $(\mathfrak{T}_i)_{i\in I}$. Alors le filtre circulaire $\mathfrak{F}$ de D tel que $\Delta(\mathfrak{F} , D) = D$ est un filtre circulaire distingué par construction car $\Delta(\mathfrak{F} , D)$ n'admet aucun T-filtre décroissant et que $\Delta(\mathfrak{F} , D) = \bigcup_{i\in I} \mathcal{C}(\mathfrak{F}_i)$. Or $\mathfrak{F}$ est irrégulier car, pour tout i , $\mathfrak{T}_i$ est associé à un filtre circulaire $\mathfrak{F}_i$ de D qui n'est entouré par aucun T-filtre croissant ou décroissant, ce qui prouve que $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{J}(\mathfrak{F}_i)$, d'après le lemme I.4, puisque $\mathfrak{F}$ entoure $\mathfrak{F}_i$. Mais comme $r_i < R$, $\mathfrak{F}_i \neq \mathfrak{F}$, et $\mathfrak{F}$ est donc irrégulier.

L'existence de filtres circulaires réguliers est évidente. Il suffit par exemple de considérer un infraconnexe fermé D de diamètre R tel que, pour tout $a \in D$, il existe un T-filtre croissant de diamètre R . Alors le filtre circulaire maximal $\mathfrak{F}$ de D tel que $\Delta(\mathfrak{F} , D) = D$ est distingué et régulier de façon évidente.

Par contre, le problème de l'existence de filtre circulaire irrégulier est beaucoup plus délicat. Or ce problème est lié à un autre problème soulevé par B. GUENNEBAUD :

Soit $(A , \|.\|)$ une K-algèbre de Banach, et soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de codimension infinie ; le corps $\Gamma = A/\mathfrak{M}$ peut-il être muni de plusieurs valeurs absolues continues pour la norme de K-algèbre de Banach de Γ quotient de celle de A ? Si l'on note Φ la surjection canonique de A sur Γ, il est clair que l'ensemble des valeurs absolues continues w du corps normé Γ est en bijection avec l'ensemble des $f \in \mathrm{Mult}(A, \|.\|)$ tels que $\mathrm{Ker}(f) = \mathfrak{M}$ par l'application $w \to f_w$ telle que $f_w(x) = w(\Phi(x))$, et l'on est donc ramené, par l'intermédiaire des f_w, à rechercher deux filtres circulaires maximaux distincts $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ tels que $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}_1) = \mathfrak{J}(\mathfrak{F}_2) = \mathfrak{M}$.

Si $\mathfrak{G}$ est un filtre circulaire irrégulier, alors il existe en effet des filtres circulaires sous-distingués $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{G}$ tels que $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{J}(\mathfrak{G})$, et réciproquement, si $\mathfrak{J}(\mathfrak{F}_1) = \mathfrak{J}(\mathfrak{F}_2) = \mathfrak{M}$, alors, d'après le lemme I.4 et la proposition I.7, $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ sont entourés par un même filtre circulaire distingué $\mathfrak{G}$ tel que

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{J}(\mathfrak{F}_1) = \mathfrak{J}(\mathfrak{F}_2) = \mathfrak{M},$$

et comme $\mathfrak{F}_1 \neq \mathfrak{F}_2$, on a au moins $\mathfrak{F}_1$ ou $\mathfrak{F}_2 \neq \mathfrak{G}$, ce qui prouve que $\mathfrak{G}$ est irrégulier.

On voit donc que le problème posé par B. GUENNEBAUD, lorsqu'il est restreint à l'étude des algèbres de Krasner, se ramène à celui de l'existence de filtres circulaires distingués irréguliers.

2. Existence de filtres circulaires distingués irréguliers.

Nous allons résoudre ce problème grâce au théorème II.3. Nous utiliserons à cette occasion le lemme suivant qui est trivial.

LEMME II.2. - *Soit une famille* Φ *de nombres* > 0 *non dénombrable. Alors il existe* $\delta > 0$, *et il existe une sous-famille* Φ', *non dénombrable, de* Φ, *telle* $x \geq \delta$ *pour tout* $x \in \Phi'$.

Preuve. - Si le lemme était faux, l'ensemble Φ_n des $x \in \Phi$ tels que $x \geq \frac{1}{n}$ serait dénombrable pour tout n, et $\Phi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ serait dénombrable.

Soit $|K| = \{|x| \; ; \; x \in K\}$, et soit k le corps résiduel de K.

THÉORÈME II.3. - *Si* $|K|$ *ou* k *est non dénombrable, tout filtre circulaire distingué d'un infraconnexe fermé borné de* K *est régulier. Si* $|K|$ *et* k *sont dénombrables, il existe des infraconnexes fermés bornés admettant des filtres circulaires distingués irréguliers.*

Preuve. - Supposons qu'un infraconnexe D admette un filtre circulaire distingué irrégulier $\mathfrak{G}$, de diamètre R, et soit un point $0 \in \Delta(\mathfrak{G}, D)$ pris pour origine.

D'après la remarque précédente, il existe un nombre $R' < R$ qui majore tous les diamètres des T-filtres croissants de $\Delta(\mathcal{S}, D)$, centrés en 0, et tel que, pour tout r appartenant à l'ensemble $J = [R', R] \cap |K|$, toute classe Γ du cercle $C(r) = \{x \in K ; |x| = r\}$ contienne au moins un trou de D. Nous allons montrer que si $|K|$ ou k est non dénombrable, alors D admet un T-filtre croissant de centre 0, de diamètre R, ce qui contredit en effet le fait que $\mathcal{S}$ soit irrégulier.

Supposons d'abord k non dénombrable, et montrons que $\Delta(\mathcal{S}, D)$ admet un T-filtre croissant de centre 0, de diamètre R.

Pour cela, remarquons que, pour tout $r \in J$, il existe un nombre $\rho(r) > 0$ et une suite $\Gamma_n(r)$ de classes de $C(r)$ contenant chacune au moins un trou de D, $T_n(r)$ de diamètre au moins égal à $\rho(r)$. En effet, sinon l'ensemble des classes percées de $C(r)$ serait dénombrable d'après le lemme II.2, ce qui est faux, puisque toute classe est percée, et que k est non dénombrable. Nous allons construire le T-filtre croissant cherché de la façon suivante. Soit d_n une suite croissante de J telle que $\lim_{n\to\infty} d_m = R$, et soient $C_m = C(d_m)$ et $\rho_m = \rho(d_m)$.

Pour tout $m \geqslant 2$, soit q_{m-1} tel que $(d_{m-1}/d_m)^{q_{m-1}} \times d_m/\rho_m < 1/m$. Alors il est clair que $(d_m/\rho_m)\prod_{j=1}^{m-1}(d_j/d_m)^{q_j} < 1/m$ quel que soit $m \geqslant 2$. Considérons maintenant q_m classes $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{q_m}$ de C_m contenant au moins chacune un trou de D de diamètre supérieur ou égal à ρ_m. Alors, on a trivialement

$$\gamma_D(\Gamma_i, 1) \leqslant d_m/\rho_m .$$

Alors soit $\gamma_m = \inf_{1\leqslant i\leqslant q_m} \gamma(\Gamma_i, D, 1)$. Il est clair que la suite $(C_m, d_m, q_m, \gamma_m)$ est une suite caractéristique d'un T-filtre croissant de D dont le diamètre est R. La démonstration est donc achevée pour k dénombrable.

Supposons maintenant que $|K|$ est non dénombrable. Soit r_n une suite croissante de J telle que $\lim_{n\to\infty} r_n = R$, et soit r'_n une suite croissante de J telle que $r_{n-1} < r'_n < r_n$, quel que soit n. Puisque $|K|$ est non dénombrable,

$$J \cap [r_{n-1}, r'_n]$$

est non dénombrable et, d'après le lemme II.2, il existe une suite de nombres $\rho_n > 0$ et, pour tout n fixé, il existe une suite $j \longrightarrow (\xi_j^n)$ de J telle que $r_{n-1} < \xi_j^n < r'_n$ quel que soit j et telle que le cercle $C(\xi_j^n)$ contienne au moins un trou T_j^n de D de diamètre supérieur ou égal à ρ_n. Alors, pour tout n fixé, choisissons une classe Γ_j^n du cercle $C(\xi_j^n)$ telle que Γ_j^n contienne un trou T_j^n de diamètre $\geqslant \rho_n$. Alors, par hypothèse, on a $\gamma_D(\Gamma_j^n, 1) \leqslant R/\rho_n$ pour tout $j \in \underset{\sim}{N}$, et pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$.

Définissons une suite d_m de la façon suivante. Pour tout n, soit $S_n \in \underset{\sim}{N}$ tel que $(1/\rho_n)(r'_n/r_n)^{S_n} < 1/n$ et soit $t_n = \sum_{i=1}^{n} S_i$. Alors, soit $d_m = \xi_{m-t_n}^{n+1}$, et soit $\gamma_m = \gamma_D(\Gamma_{m-t_n}^{n+1}, 1)$ pour tout m tel que $t_n < m \leqslant t_{n+1}$. Il est clair que, si $t_n < m \leqslant t_{n+1}$, on a $\gamma_m \prod_{j=1}^{m-1} d_j/d_m < 1/n$, ce qui montre que la suite

$(C(d_m), d_m, 1, \gamma_m)$ est une suite caractéristique d'un T-filtre. La première partie du théorème est donc établie.

Montrons maintenant que si $|K|$ et k sont dénombrables, alors il existe des infraconnexes fermés bornés admettant un filtre circulaire distingué irrégulier. Pour cela, nous allons construire un infraconnexe D inclus dans la couronne $1/2 < |x| < 1$, tel que, pour tout cercle $C(0, r)$, où $1/2 < r < 1$ et $r \in |K|$, et, pour toute classe Γ de $C(0, r)$, $\Gamma \cap D$. Soit un infraconnexe dont l'ensemble des trous internes est une suite à distances croissantes qui définit un T-filtre croissant $\mathcal{C}(\Gamma)$, de diamètre r, satisfaisant certaines conditions que nous préciserons ensuite.

Il est clair que la famille des ensembles $\mathcal{C}(\mathcal{C}(\Gamma))$, où Γ parcourt l'ensemble Λ des classes de tous les cercles $C(0, r)$, $r \in]\frac{1}{2}, 1[\cap |K|$, est une partition de D ; alors nous montrerons que l'on peut imposer aux T-filtres $\mathcal{C}(\Gamma)$ $(\Gamma \in \Lambda)$ des conditions telles que tout T-filtre de D appartienne à l'ensemble τ des T-filtres $\mathcal{C}(\Gamma)$, $\Gamma \in \Lambda$, ce qui prouve que le filtre circulaire de D de centre 0, de diamètre 1, est distingué et irrégulier d'après la remarque qui précède.

Pour tout $r \in]\frac{1}{2}, 1[\cap |K|$, écrivons $\log r$ sous sa forme irréductible $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, et soit $\ell(r) = a^b$. Alors il est immédiat de voir que l'application définie sur $]\frac{1}{2}, 1[\cap |K|$ par $r \longrightarrow \ell(r)$ est injective. Pour chaque cercle $C(0, r)$ et pour tout entier $q \geq 1$, soit

$$\gamma(r, q) = \sup_{\substack{i=1,\dots,k \\ q_1+\dots+q_k=q}} \gamma_D(\Gamma_i, q_i),$$

les Γ_i sont des classes quelconques du cercle $C(0, r)$.

Nous construirons ultérieurement l'ensemble D tel que l'on ait, pour tout r et pour tout $q \in N$,

$$\log \gamma(r, q) \geq \ell(r)^{2^{(\ell(r)+1)}} \sqrt{q}, \tag{1}$$

et nous allons montrer que si cette relation est vraie, pour tout r et pour tout q, alors le problème est résolu.

En effet, supposons que D admette un T-filtre Φ qui n'appartienne pas à la famille τ. Alors Φ n'est sécant à aucune classe Γ d'aucun cercle $C(0, r)$ puisque le seul T-filtre d'un ensemble de la forme $\Gamma \cap D$ appartient à τ par construction. Par conséquent, Φ admet l'origine pour centre ; soit R son diamètre. Nous supposerons, pour la démonstration, que Φ est croissant ; si Φ est décroissant, on obtient naturellement par inversion une démonstration calquée sur celle-ci puisque de toute façon Φ est centré à l'origine.

Exprimons le fait que Φ soit un T-filtre croissant.

Il existe une suite $d_m \in K$ telle que $d_m < d_{m+1}$ et $\lim_{m\to\infty} d_m = R$, et une suite d'entiers q_m satisfaisant

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m-1}(\log R - \log d_j)q_j - \log \gamma_m(q_m) = +\infty$$

où l'on note $\gamma_m(q_m) = \gamma(d_m , q_m)$. A fortiori, on a donc

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{j=1}^{m-1} q_j - \log \gamma_m(q_m) = +\infty$$

et, trivialement, il existe un rang u tel que, pour tout $m \geqslant u$, on ait

$$\sum_{j=1}^{m-1} q_j - \log \gamma_m(q_m) \geqslant 0 ,$$

d'où, grâce à (1),

(2) $$\sqrt{q_m} \leqslant (\sum_{j=1}^{m-1} q_j)/\lambda_m ,$$

où l'on pose

(3) $$\lambda_m = \ell(d_m)^{(2^{(\ell(d_m)+1)})} .$$

Pour tout m , soit $h(m) = \sup_{j<m} q_j$; alors, d'après (2), on a $q_m \leqslant (mh(m)/\lambda_m)^2$. On en déduit, par récurrence et à l'aide de majorations grossières, en posant $A = h(u)$, que la suite q_m admet une suite majorante de la forme $(mA)^{2m}/\lambda_m^2$. En effet, il existe une suite finie $n_1 , \dots , n_s$ telle que $q_{n_1} = h(m)$, $q_{n_{i+1}} = h(n_i)$, $1 \leqslant i \leqslant s - 1$, $q_u = h(n_s)$, et l'on voit par récurrence que

$$q_m \leqslant (m^2 n_1^{2^2} \dots n_s^{2^{s+1}} h(u)^{2^{s+1}})/(\lambda_m^2 \lambda_{n_1}^{2^2} \dots \lambda_{n_s}^{2^{s+1}}) ,$$

d'où a fortiori

$$q_m \leqslant (m^{\sum_{i=1}^{m-1} 2^i} A^{2^{m-1}})/\lambda_m^2 ,$$

car $s + 1 \leqslant m - u \leqslant m - 1$; or $\sum_{i=1}^{m-1} 2^i \leqslant 2^{m-1}/\log 2 \leqslant 2^m$, d'où finalement

(4) $$q_m \leqslant (mA)^{2^m}/\lambda_m^2 .$$

D'autre part, comme la fonction définie sur $Q \cap]1/2 , 1[$ par $r \longrightarrow n(r)$ est injective, la suite $m \longrightarrow \gamma(m) = n(d_m)$ est injective et il existe donc une sous-suite $t \longrightarrow m_t$ telle que $\gamma(m_t) \geqslant m_t$ pour tout t . Alors d'après (2) et (3), la relation (4) donne

$$\begin{aligned} q_{m_t} &\leqslant (A^{2^{m_t}} m_t^{(2^{m_t})})/[\gamma(m_t)^{(2^{(\gamma(m_t))})}]^4 \\ &= (A^{(2^{m_t})}/\gamma(m_t)^{(2^{\gamma(m_t)})})(m_t^{(2^{m_t})}/\gamma(m_t)^{(2^{\gamma(m_t)})})1/\gamma(m_t)^{(2^{(\gamma(m_t)+1)})} \\ &\leqslant 1/\gamma(m_t)^{(2^{(\gamma(m_t)+1)})} , \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\lim_{t\to\infty} q_{m_t} = 0$, donc $q_{m_t} < 1$ pour t assez grand, ce qui est absurde puisque $q_m > 1$ pour tout m , par définition.

Construisons maintenant l'ensemble D tel que, pour toute classe $\Gamma \in \Lambda$, $\Gamma \cap D$ admette un T-filtre croissant de diamètre $r = \mathrm{diam}(\Gamma)$ et tel que l'on ait pour chaque cercle $C(0 , r)$, $\log \gamma(r , q) \geqslant \ell(r)^{(2^{(\ell(r)+1)})}\sqrt{q}$.

Soit $\lambda \in \underset{\sim}{R}^+$; nous allons définir un ensemble $\Delta(\lambda)$ qui servira ensuite de modèle pour construire chaque classe d'un cercle $C(0 , r)$ de l'ensemble D cherché. Soit $\alpha_1 ,\dots, \alpha_n ,\dots$ une suite de K telle que $v(\alpha_n) = \lambda/\sqrt{n}$, et soit

$\Delta(\lambda)$ l'ensemble des $x \in K$ tels que $v(x) > 0$ et $v(x - \alpha_n) \leq \lambda(\sqrt{n}/2)$, quel que soit $n \in \underset{\sim}{N}$.

Il est immédiat de voir que $\Delta(\lambda)$ admet un T-filtre croissant de diamètre 1 . En effet $\Delta(\lambda)$ admet un filtre percé croissant $\mathfrak{F}$ de diamètre 1 , défini pour la suite des trous T_n de centre α_n , de diamètre $\rho_n = \exp(-(\lambda\sqrt{n}/2))$, et si l'on note $\delta_n = d(0 , T_n)$, on a $\log \delta_n = -(\lambda/\sqrt{n})$ de sorte que

$$\sum_{j=1}^{n-1}(\log \delta_n - \log \delta_j) = \lambda[(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{j}}) - \sqrt{n}] \geq \lambda\sqrt{n}$$

et

$$(\sum_{j=1}^{n-1} \log \delta_n - \log \delta_j) + \log \rho_n \geq \frac{\lambda}{2}\sqrt{n} .$$

Ce qui prouve que $\mathfrak{F}$ est un T-filtre.

Nous allons maintenant minorer les expressions $\gamma(\Delta(\lambda) , q)$, $q \in \underset{\sim}{N}$. Nous allons établir la relation

$$\log \gamma(\Delta(\lambda) , q) \geq \frac{\lambda\sqrt{q}}{2} . \tag{5}$$

En effet, soient $a_1 , \dots , a_q$ appartenant à des trous internes $T_{n_1} , \dots , T_{n_q}$ (non nécessairement tous distincts) de $\Delta(\lambda)$. Alors, ou bien il existe un indice i tel que $n_i \geq q$, et alors

$$\log\left\|\frac{1}{x - a_i}\right\|_{\Delta(\lambda)} = - \log \rho_{n_i} \geq \frac{\lambda\sqrt{q}}{2}$$

d'où a fortiori

$$\log\left\| 1/(\prod_{i=1}^{q}(x - a_i)\right\|_{\Delta(\lambda)} \geq \frac{\lambda\sqrt{q}}{2} ,$$

ou bien $n_i < q$, pour tout i , et alors, pour $|x| \leq d_q$, on a $|\prod_{i=1}^{q}(x-a_i)| \leq d_q^q$, d'où

$$\log\left\|\frac{1}{\pi(x - a_i)}\right\|_{\Delta(\lambda)} \geq \lambda q \log d_q = \lambda\sqrt{q}$$

ce qui prouve la relation (5) dans tous les cas.

Avant de construire l'ensemble D , remarquons encore que, si un infraconnexe D_2 de K est image d'un infraconnexe D_1 par une similitude S , on a, pour tout $q \in \underset{\sim}{N}$, $\gamma(D_2 , q) = \gamma(D_1 , q)$. D'autre part, si D_1 admet, par exemple, un T-filtre de centre a , de diamètre r , alors D_2 admet un T-filtre de centre $S(a)$, de diamètre ρr , où ρ est le rapport de la similitude S .

Pour tout $r \in]\frac{1}{2} , 1[$, on peut indexer les classes du cercle $C(0 , r)$ en une suite Γ_n puisque k est dénombrable. Soit a_n une suite de $C(0 , r)$ telle que $a_n \in \Gamma_n$; notons

$$B(r) = \ell(r)^{(2^{\ell(r)+1})}$$

et, pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, soit $\Delta_{r,n}$ l'image de $\Delta(2^{n+1} B(r))$ par une similitude de rapport r qui applique 0 sur a_n , et soit $D = (\bigcup_{n\in\underset{\sim}{N},r\in]\frac{1}{2},1[} \Delta_{r,n})$. D'après les propriétés des ensembles $\Delta(\lambda)$ que l'on retrouve dans les $\Delta_{r,n}$, il est clair que, pour chaque classe Γ de $C(0 , r)$, $\Gamma \cap D$ possède un T-filtre unique croissant, de diamètre r ; il reste donc à montrer que D n'admet pas d'autre T-filtre que ceux-ci et, pour cela, comme nous l'avons vu, que les expressions $\gamma(r, q)$ satisfont la relation (1).

En effet, d'après la relation (5), on a

$$\log \gamma(\Delta_{r,n}, q) \geq 2^{n+2} B(r) \frac{\sqrt{q}}{2} = 2^{n+1} B(r) \sqrt{q} .$$

Mais en reprenant les notations précédentes, on a

$$\log \gamma(r, q) = \sup_{\substack{i=1,\dots,k \\ q_1+\dots+q_k=q}} \log \gamma_D(\Gamma_i, q_i) = \sup_{\substack{i=1,\dots,k \\ q_1+\dots+q_k=q}} \log \gamma_D(\Delta_{r,n_i}, q_i) ,$$

ce qui nous donne, pour tout $i = 1, \dots, k$,

$$\sqrt{q_i}\, 2^{n_i+1} B(r) \leq \log \gamma(r, q) ,$$

d'où

$$q = \sum_{i=1}^{k} q_i \leq \left(\frac{\log \gamma(r, q)}{B(r)}\right)^2 \sum_{i=1}^{k} 2^{-(n_i+1)} .$$

Mais comme $n_i \neq n_j$ pour $i \neq j$ (par définition), on a

$$\sum_{i=1}^{k} 2^{-(n_i+1)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n+1)} = 1$$

d'où la relation cherchée $\sqrt{q}\, B(r) \leq \log \gamma(r, q)$ et l'ensemble D est construit.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ESCASSUT (Alain). - Algèbres d'éléments analytiques en analyse non archimédienne, Indag. Math., Amsterdam (à paraître).

[2] ESCASSUT (Alain). - Eléments analytiques et filtres percés sur un ensemble infraconnexe (à paraître).

[3] ESCASSUT (Alain). - T-filtres et ensembles analytiques (à paraître).

[4] ESCASSUT (Alain). - Algèbres de Krasner intègres et noethériennes (à paraître).

[5] ESCASSUT (Alain). - Algèbres de Banach ultramétriques et algèbres de Krasner-Tate, "Plongement analytique et algèbres de Banach ultramétriques", Astérisque, 1973, n° 10, p. 1-107.

[6] GARANDEL (Gérard). - Les semi-normes multiplicatives sur les algèbres d'éléments analytiques au sens de Krasner, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, 1974, Série A, p. 823-826.

[7] GRUSON (Laurent). - Algèbres de Banach ultramétriques, "Colloque Poitou-Aquitaine : Prolongement analytique p-adique [1967. Poitiers] (multigraphié).

[8] GUENNEBAUD (Bernard). - Algèbres localement convexes sur les corps valués, Bull. Sc. math., 2e série, t. 91, 1967, p. 75-96.

[9] GUENNEBAUD (Bernard). - Sur une notion de spectre pour les algèbres normées ultramétriques, Thèse Sc. math. Poitiers, 1973.

[10] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets. "Colloques internationaux du C.N.R.S., 143 : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres, [1964, Clermont-Ferrand]", p. 97-141. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1966.

[11] MOTZKIN (Elhanan) et ROBBA (Philippe). - Plongement analytique en analyse p-adique, Séminaire de Théorie des Nombres, Faculté des Sciences de Bordeaux, 1968/1969, n° 3 (multigraphié).

[12] NAGATA (Masayoshi). - Local rings. - New York, J. Wiley and Sons, 1962 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 13).

[13] ROBBA (Philippe). - Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets : "Plongement analytique et algèbres de Banach ultramétriques", Astérisque, 1973, n° 10, p. 109-218.

[14] SALMON (Pietro). - Serie convergenti su un corpo non archimedeo con applicazione ai fasci analitici, Annali di Matematica pura ed appl., Serie 4, t. 65, 1964, p. 113-126.

[15] TATE (John). - Rigid analytic spaces, Invent. Math., Berlin, t. 12, 1971, p. 257-289.

(Texte reçu le 7 juin 1974)

Alain ESCASSUT
8 allée Sirius
33120 ARCACHON