

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

DANIEL BARSKY

Mesures p -adiques à densité 2

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 1 (1973-1974), exp. n° 9, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1973-1974__1__A6_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MESURES p -ADIQUES À DENSITÉ 2

par Daniel BARSKY

On montre que les mesures à densité ne forment pas une sous-algèbre de convolution de l'algèbre de convolution des mesures p -adiques sur $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{C}_p)$.

Notations. - \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} ont leur signification habituelle. Soient \mathbb{Z}_p l'anneau des entiers p -adiques, \mathbb{Q}_p son corps des fractions, \mathbb{C}_p le complété de la clôture algébrique de \mathbb{Q}_p muni de la norme ultramétrique prolongeant celle de \mathbb{Q}_p normalisée par $|p| = p^{-1}$. Soient $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{C}_p) = \mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues sur \mathbb{Z}_p à valeurs dans \mathbb{C}_p muni de la norme de la convergence uniforme sur \mathbb{Z}_p notée $|\cdot|$, \mathcal{C}' le dual de \mathcal{C} muni de la norme habituelle notée $\|\cdot\|$, si $\mu \in \mathcal{C}'$,

$$\|\mu\| = \sup_{f \in \mathcal{C} - \{0\}} (|\langle \mu | f \rangle| / |f|)$$

(où l'on note $\langle \mu | f \rangle$ l'action de μ sur f).

On notera $\ell(x)$ la partie entière de $(\log(x))/\log(p)$ où $x \in \mathbb{R}$. Bien entendu, p est un nombre premier. On note $\varphi_n \in \mathcal{C}$ la fonction caractéristique de la boule $\mathcal{B}(n, \ell(n) + 1)$ de centre $n \in \mathbb{N}$ et de rayon $p^{-\ell(n)-1}$, et $\psi_{x,h} \in \mathcal{C}$ la fonction caractéristique de la boule $\mathcal{B}(x, h)$ de centre $x \in \mathbb{Z}_p$ et de rayon p^{-h} . On note enfin \mathcal{A} l'espace des fonctions analytiques bornées sur la boule unité ouverte \mathcal{B} de \mathbb{C}_p muni de la norme de la convergence uniforme sur \mathcal{B} notée $\|\cdot\|$.

1. Lien entre mesures et fonctions analytiques sur \mathcal{B} .

Nous poserons les définitions suivantes :

Définition 1 [2]. - Une mesure est un élément de \mathcal{C}' .

Définition 2 [2]. - Une mesure μ est à densité sur \mathbb{Z}_p si, pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$, il existe $d_\mu(x) \in \mathbb{C}_p$ tel que $\lim_{h \rightarrow +\infty} (\mu | \varphi_{x,h}) = d_\mu(x)$. $d_\mu(x)$ est la densité de μ au point x .

Définition 3 [2]. - Si μ et ν sont 2 mesures, leur produit tensoriel est la forme linéaire sur $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{C}_p) \times \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{C}_p) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p^2, \mathbb{C}_p)$, définie par

$$(\mu \otimes \nu | f.g) = (\mu | f)(\nu | g),$$

et prolongée par continuité sur $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p^2, \mathbb{C}_p)$.

Définition 4 [2]. - Soient μ et ν deux mesures, leur produit de convolution $\mu * \nu$ est défini par $(\mu * \nu | f) = (\mu \otimes \nu | \tilde{f})$, où $\tilde{f}(x, y) = f(x + y)$.

Soit $\theta_X(x)$ ($X \in \mathcal{B}$ et $x \in \mathbb{Z}_p$) la fonction de $\mathcal{B} \times \mathbb{Z}_p$ dans \mathbb{C}_p , définie par

$$\theta_X(x) = 1 + X \binom{x}{1} + \dots + X^n \binom{x}{n} + \dots, \text{ où } \binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!},$$

on posera $Q_n(x) = \binom{x}{n}$.

PROPOSITION 1. - Soit $F(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ un élément de \mathcal{A} . Il existe un isomorphisme d'espaces de Banach π entre \mathcal{A} et \mathcal{C}' tel que, si $\pi(F) = \mu_F$, alors $(\mu_F | Q_n) = a_n$ pour $n \geq 0$, et $(\mu_F | \theta_X) = F(X)$ pour tout $X \in \mathcal{B}$.

On sait que, si $F(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$, alors $\sup_{n \geq 0} |a_n| = \|F\|$, et qu'il existe une unique mesure μ_F telle que $(\mu_F | Q_n) = a_n$ pour tout $n \geq 0$ [6]. On a aussi

$$(\mu_F | \theta_X) = (\mu_F | \sum_{n \geq 0} Q_n X^n) = \sum_{n \geq 0} (\mu_F | Q_n) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n,$$

d'où la proposition.

\mathcal{A} est en fait une algèbre de Banach pour le produit ordinaire des fonctions, de même le produit de convolution fait de \mathcal{C}' une algèbre de Banach.

PROPOSITION 2. - L'application π , définie à la proposition 1, est un isomorphisme d'algèbre de Banach entre \mathcal{A} et \mathcal{C}' .

Il reste à montrer que $\pi(F.G) = \mu_F * \mu_G$, donc que, pour tout $X \in \mathcal{B}$,

$$(\mu_F * \mu_G | \theta_X) = (F.G)(X) = F(X) G(X)$$

or

$$(\mu_F * \mu_G | \theta_X) = (\mu_F \otimes \mu_G | \tilde{\theta}_X), \text{ où } \tilde{\theta}_X(x, y) = \theta_X(x + y) = \theta_X(x) \theta_X(y),$$

donc $(\mu_F * \mu_G | \theta_X) = (\mu_F | \theta_X)(\mu_G | \theta_X) = F(X) G(X)$; d'où la proposition.

PROPOSITION 3. - On a la formule suivante :

$$(\mu * \nu | \psi_{n,h}) = \sum (\mu | \psi_{k,h}) (\nu | \psi_{j,h})$$

la sommation étant étendue aux indices k et j tels que $0 \leq k, j < p^h$ et $|k + j - n| \leq p^{-h}$.

Soient F et G les images de μ et ν par π^{-1} . On a

$$F(X) = \sum_{k=0}^{p^h-1} (\mu | \psi_{k,h}) (1+X)^k + (1 - (1+X)^{p^h}) F_h(X), \text{ où } F_h \in \mathcal{A} \text{ et } \|F_h\| \leq \|\mu\|,$$

$$G(X) = \sum_{j=0}^{p^h-1} (\nu | \psi_{j,h}) (1+X)^j + (1 - (1+X)^{p^h}) G_h(X), \text{ où } G_h \in \mathcal{A} \text{ et } \|G_h\| \leq \|\nu\|.$$

(pour la démonstration, cf. [3] ou [5].) On a alors

$$(F.G)(X) = \sum_{n=0}^{p^h-1} \sum_{j,k} (\mu | \psi_{k,h}) (\nu | \psi_{j,h}) (1+X)^n + (1 - (1+X)^{p^h}) R_h(X)$$

la deuxième sommation porte sur j et k tels que $0 \leq k, j < p^h$ et $|k + j - n| \leq p^{-h}$, $R_h \in \mathcal{A}$, et $\|R_h\| \leq \|F\| \cdot \|G\|$. On remarque, en effet, d'une part que

$$(1+X)^{p^h+m} = (1+X)^m - (1 - (1+X)^{p^h}) (1+X)^m,$$

et d'autre part on a le lemme suivant :

LEMME. - Soit $F \in \mathcal{A}$, soit $\mu_F = \pi(F) \in \mathcal{C}'$. Soit $F_h(X) = \sum_{j=0}^{p^h-1} b_{j,h} (1+X)^j$.

Pour que l'on ait $b_{j,h} = (\mu_F | \psi_{j,h})$ pour $0 \leq j \leq p^h - 1$, il faut et il suffit
qu'il existe une application g_h de \mathcal{B} dans \mathbb{C}_p telle que

$$|F(x) - F_h(x)| \leq |(1 - (1+x)^{p^h})g_h(x)|.$$

S'il en est ainsi $g_h \in \mathcal{A}$, et $\|g_h\| \leq \|F\|$.

Pour la démonstration, voir [3].

On conclut alors, avec le lemme, que

$$(\mu * \nu | \psi_{n,h}) = \sum (\mu | \psi_{k,h}) (\nu | \psi_{j,h})$$

la sommation portant sur k et j tels que $0 \leq k, j < p^h$ et $|k+j-n| \leq p^{-h}$.

La proposition 3 est démontrée.

2. Construction d'une mesure à densité.

Soient $M^+ = \{x \in \mathbb{Z}_p; x = p^n, n > 0\}$, $M^- = \{x \in \mathbb{Z}_p; x = -p^n, n > 0\}$,
 $M = M^+ \cup M^-$. Soit f l'application de \mathbb{Z}_p dans \mathbb{C}_p , définie par

$$f(x) = 0 \text{ si } x \notin M, \quad f(x) = 1 \text{ si } x \in M^+, \quad f(x) = -1 \text{ si } x \in M^-.$$

Nous allons montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 1. - Il existe une mesure à densité sur \mathbb{Z}_p , μ , telle que, pour tout
 $x \in \mathbb{Z}_p$,

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} (\mu | \psi_{x,h}) = d_\mu(x) = f(x).$$

Considérons la quantité suivante : $D(x, \ell, h) = \sum_i f(p^i) + \sum_j f(-p^j)$ les
sommations portant sur les indices i et $j \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq i, j \leq \ell$,
 $p^i \in \mathcal{B}(x, h)$ et $-p^j \in \mathcal{B}(x, h)$. Montrons que $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} D(x, \ell, h)$ existe
pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$. Si $0 \notin \mathcal{B}(x, h)$, il n'y a qu'un nombre fini d'indices k
tels que p^k ou $p^{-k} \in \mathcal{B}(x, h)$, donc $D(x, \ell, h)$ est stationnaire pour ℓ
assez grand. En particulier, si $x = +p^n$ ou $-p^n$, alors

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} D(x, \ell, h) = +1 \text{ ou } -1 \quad (n < h),$$

si $|x \pm p^n| < p^{-h}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} D(x, \ell, h) = 0.$$

Si $0 \in \mathcal{B}(x, h)$, tous les points p^n et $-p^n$ se trouvent dans $\mathcal{B}(x, h)$
pour $n \geq h$ et, par conséquent,

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} D(x, \ell, h) = 0$$

car $D(x, \ell, h) = 0$ pour $\ell \geq 1$. Posons $(\mu | \psi_{x,h}) = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} D(x, \ell, h)$, il
est clair que ceci définit une mesure sur \mathbb{C} . Montrons que cette mesure est à
densité sur \mathbb{Z}_p . Il faut donc montrer que, pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$, il existe $d_\mu(x)$
tel que

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} (\mu | \psi_{x,h}) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \lim_{\ell \rightarrow +\infty} D(x, \ell, h) = d_\mu(x).$$

Si $x \notin M$, $x \neq 0$, il existe h_0 tel que, pour $h \geq h_0$, aucun point de M n'appartienne à $\mathcal{B}(x, h)$, donc, pour $h \geq h_0$, $D(x, \ell, h) = 0$ et donc, dans ce cas, $\lim_{h \rightarrow +\infty} (\mu|_{\psi_{x,h}}) = 0$. Si $x \in M$, il existe h_0 tel que pour $h \geq h_0$, x soit le seul point de M dans $\mathcal{B}(x, h)$, donc, pour $h \geq h_0$, $D(x, \ell, h) = 1$ ou -1 , et donc

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} (\mu|_{\psi_{x,h}}) = 1 \text{ ou } -1 \text{ suivant que } x \in M^+ \text{ ou } M^-.$$

Si $x = 0$, alors $(\mu|_{\psi_{x,h}}) = 0$ pour tout h , et donc

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} (\mu|_{\psi_{x,h}}) = 0.$$

On a donc bien montré que μ est à densité sur \mathbb{Z}_p et que $d_\mu = f$.

THÉOREME 2. - Soit μ la mesure définie au théorème 1. $\mu * \mu$ n'est pas à densité en 0.

En effet,

$$(\mu * \mu|_{\psi_{0,h}}) = \sum (\mu|_{\psi_{k,h}})(\mu|_{\psi_{j,h}})$$

la sommation portant sur k et j vérifiant $0 \leq k, j < p^h$ et $|k + j| \leq p^{-h}$; donc

$$(\mu * \mu|_{\psi_{0,h}}) = \sum_{0 \leq k < p^h} (\mu|_{\psi_{k,h}})(\mu|_{\psi_{p^h-k,h}}) + (\mu|_{\psi_{0,h}})^2.$$

Si $k \neq p^n$ ($n < h$), alors

$$(\mu|_{\psi_{k,h}}) = (\mu|_{\psi_{p^h-k,h}}) = 0 \text{ si } k = p^n,$$

alors $(\mu|_{\psi_{p^n,h}}) = -(\mu|_{\psi_{p^h-p^n}}) = 1$, donc $(\mu * \mu|_{\psi_{0,h}}) = -2h$. Or $2h$ n'a pas de limite p -adique lorsque h tend vers $+\infty$, donc $\mu * \mu$ n'est pas à densité en 0.

COROLLAIRE. - Les mesures à densité ne forment pas une sous-algèbre de convolution de \mathcal{C}' .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Y.). - Interpolation p -adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1964).
- [2] AMICE (Y.). - Mesures p -adiques, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 6e année, 1964/65, exposé n° 16, 6 p.
- [3] BARSKY (D.). - Mesures p -adiques et prolongement analytique, Thèse Sc. math. Univ. Paris-7, 1974.
- [4] BARSKY (D.). - Mesures p -adiques à densité, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 15e année, 1973/74, exposé n° 4, 6 p.
- [5] LAZARD (M.). - Les zéros d'une fonction analytique. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 14, p. 47-76).

- [6] SERRE (J.-P.). - Espaces de Banach p -adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 12, p. 69-85).

(Texte reçu le 21 juin 1974)

Daniel BARSKY
36 rue de Penthièvre
75008 PARIS
