Groupe de travail d'analyse ultramétrique

Yvette Amice

Dual d'un espace $H(D)$ et transformation de Fourier

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 1 (1973-1974), exp. nº 5, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1973-1974__1__A3_0>

Groupe de Travail d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, A. ESCASSUT, P. ROBBA)
1973/74, n° 5, 12 p.
21 janvier et 4 mars 1974

DUAL D'UN ESPACE H(D) ET TRANSFORMATION DE FOURIER

par Yvette AMICE

On sait que si E est un espace de Banach sur un corps ultramétrique K, possédant une base normale indexée dans l'ensemble I, i. e. si E est isomorphe à un espace $c_K(I)$ de familles de scalaires tendant vers 0, le dual E^* de E (espace des formes linéaires continues, muni de sa norme naturelle) est isomorphe à l'espace $b_K(I)$ des familles bornées de scalaires. Ainsi, si $E = K\{X\}$ est l'espace des séries restreintes à une variable (fonctions analytiques sur le disque unité fermé), le dual E^* de E apparaît comme espace de fonctions analytiques bornées sur le disque unité ouvert. Le but de cet exposé est de fournir des présentations explicites de duals d'espaces de fonctions ou d'éléments analytiques comme espaces de fonctions analytiques bornées. On montre de plus, au n° 3, comment la transformation de Fourier p-adique fournit une interprétation en termes de résidus de la dualité ainsi mise en évidence.

On notera les analogies de cette présentation avec la théorie de la transformation de Fantapié, telle qu'elle est utilisée en analyse complexe.

Notations.

K est un corps valué complet, non archimédien, algébriquement clos, contenant $\underset{\sim}{Q}_p$, valeur absolue et valuation sont normalisées (à partir du §3) par $|p| = 1/p$ et $v(p) = 1$.

Si E est un espace de Banach sur K, E^* est l'espace des formes linéaires continues sur E, muni de la norme $\|\mu\| = \sup_{\|x\|<1} |(\mu|x)|$.

Si D est une partie de la droite projective $\underset{\sim}{P}_1(K)$, D' est son complémentaire, $R(D)$ est l'anneau des fractions rationnelles sans pôle dans D muni de la topologie de la convergence uniforme sur D, $H(D)$ est le complété de $R(D)$, les éléments de $H(D)$ sont les éléments analytiques sur D, pour $f \in H(D)$, on note $\|f\|_D = \sup_{x\in D} |f(x)|$.

Si T est un disque ouvert, $B(T)$ est l'espace des fonctions analytiques bornées sur T, muni de la norme de la convergence uniforme sur T, notée $\|.\|_T$.

Si D contient le point à l'infini, et si $X(D)$ est un espace de fonctions sur D, $X_0(D)$ est le sous-espace des $f \in X(D)$ qui tendent vers zéro à l'infini.

1. Formes linéaires et fonctions analytiques.

1.1. Exemple. - Soit D le disque unité fermé, $D = \{x \in K ; |x| \leq 1\}$, alors $H(D)$ est l'espace des fonctions strictement analytiques sur D, i. e. des sommes sur D, de séries restreintes $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$, où $a_n \to 0$, muni de la norme

$\sup|a_n|$. Soit $\alpha \in D' \cap K$, notons $\varphi_\alpha(X) = 1/(\alpha - X)$, alors $\varphi_\alpha \in H(D)$.

Soit $\mu \in H(D)^*$, notons $\tilde{\mu}$ la fonction définie sur D' par $\tilde{\mu}(\alpha) = (\mu|\varphi_\alpha)$ si $\alpha \in D' \cap K$ et $\tilde{\mu}(\infty) = \lim_{\alpha\to\infty} \tilde{\mu}(\alpha) = 0$, alors on a le résultat suivant.

LEMME 1.1. - L'application $\mu \to \tilde{\mu}$ de $H(D)^*$ dans l'espace des fonctions définies sur D' est un isomorphisme (isométrique) de $H(D)^*$ sur $B_0(D')$.

Preuve. - Soit $\mu \in H(D)^*$; $n \geq 0$, posons $\mu_n = (\mu|X^n)$. On sait que, puisque la famille $(X^n)_{n\geq 0}$ est une base normale de $H(D)$, l'application $\mu \to (\mu_n)_{n\geq 0}$ est un isomorphisme de $H(D)^*$ sur l'espace $b_K(\underset{\sim}{N})$ des suites bornées. D'autre part, pour $\alpha \in D'$, $\varphi_\alpha(X) = \sum_{n\geq 0} X^n/\alpha^{n+1}$, donc $\tilde{\mu}(\alpha) = \sum_{n\geq 0} \mu_n/\alpha^{n+1}$. Or il est évident que $(\mu_n) \to \tilde{\mu}$, où $\tilde{\mu}(Y) = \sum_{n\geq 0} \mu_n/Y^{n+1}$ est un isomorphisme de $b_K(\underset{\sim}{N})$ sur $B_0(D')$, et le lemme en résulte.

Remarque. - Nous réserverons le terme "isomorphisme", s'agissant d'espaces de Banach, aux isomorphismes d'espaces vectoriels topologiques qui sont aussi isométriques.

1.2. Second exemple. - Soit $T = \{x \in K \; ; \; |x - 1| < 1\}$, et soit T' son complémentaire. Pour $\alpha \in T$, notons $\varphi_\alpha(X) = 1/(\alpha - X)$, alors $\varphi_\alpha \in H_0(T')$. Si $\mu \in H_0(T')^*$, posons $\tilde{\mu}(\alpha) = (\mu|\varphi_\alpha)$, alors on a le lemme suivant.

LEMME 1.2. - L'application $\mu \to \tilde{\mu}$ est un isomorphisme de $H_0(T')^*$ sur $B(T)$.

La preuve est analogue à la précédente, en utilisant la famille $(1/(1 - X)^n)_{n\geq 1}$, qui est une base normale de $H_0(T')$.

1.3. Cas d'un infraconnexe fermé borné quelconque. - Soient D un infraconnexe fermé borné de K , $\mathbb{D}$ son enveloppe (plus petit disque fermé contenant D), $\mathcal{T}(D)$ la famille des trous de D (disques ouverts maximaux de $\mathbb{D} - D$). Rappelons une forme du théorème de Mittag-Leffler (cf. [6], [4] ou [7]) :

(ML) Soit $E = H(\mathbb{D}) \oplus (\hat{\bigoplus}_{T\in\mathcal{T}(D)} H_0(T'))$, alors l'application naturelle

$$(f_0 , (f_T)) \to f_0 + \sum f_T$$

de E dans $H(D)$ est un isomorphisme surjectif.

Si E_i est une famille de K-espaces de Banach, $\hat{\bigoplus} E_i$ désigne l'espace des familles (x_i) , $x_i \in E_i$, telles que $x_i \to 0$, muni de la norme $\sup\|x_i\|$.

Notation. - Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de K-espaces de Banach, nous noterons $\Pi_b(F_i)_{i\in I}$ l'espace des familles (y_i) , $y_i \in F_i$, telles que $\sup\|y_i\| < +\infty$, muni de la norme $\sup\|y_i\|$. C'est un espace de Banach.

On vérifie aisément que $(\hat{\bigoplus} E_i)^*$ est, de façon évidente, canoniquement isomorphe à $\Pi_b(E_i^*)$.

D'autre part, nous noterons $B_0(D')$ l'espace des fonctions f bornées sur le complémentaire D' de l'infraconnexe fermé borné D, et satisfaisant $f|_{\mathcal{D}'} \in B_0(\mathcal{D}')$ et, pour $T \in \mathcal{T}(D)$, $f|_T \in B(T)$. Comme D' est réunion disjointe de $\mathcal{D}'$ et des T, $B_0(D')$ s'identifie de façon naturelle à $B_0(\mathcal{D}') \oplus (\Pi_b(B(T))_{T\in\mathcal{T}(D)})$.

PROPOSITION 1.3. - Soit D un infraconnexe fermé borné, $\alpha \in D' \cap K$; notons $\varphi_\alpha(X) = 1/(\alpha - X)$. Soit $\mu \in H(D)^*$; on pose $\tilde{\mu}(\alpha) = (\mu|\varphi_\alpha)$ si $\alpha \in D' \cap K$ et $\tilde{\mu}(\infty) = 0$. L'application $\mu \rightarrow \tilde{\mu}$ est un isomorphisme de $H(D)^*$ sur $B_0(D')$.

Preuve. - Supposons d'abord que les rayons de $\mathcal{D}$ et des trous de D appartiennent à $|K| = \{|x| ; x \in K\}$. Alors la proposition est, compte tenu des lemmes 1.1 et 1.2, une simple reformulation "duale" du théorème de Mittag-Leffler. Sinon, il suffit de prouver des lemmes analogues à 1.1 et 1.2, pour des disques dont les rayons n'appartiennent pas nécessairement à K : c'est, à partir de 1.1 et 1.2, un simple exercice d'extension-restriction de corps scalaires.

1.4. Retour au second exemple, fonctions continues sur $\underset{\sim}{Z}_p$. - Soit $C(\underset{\sim}{Z}_p, K)$ l'espace des fonctions continues sur $\underset{\sim}{Z}_p$ à valeurs dans K, muni de la norme de la convergence uniforme sur $\underset{\sim}{Z}_p$, et soit $C_p(\underset{\sim}{N}, K) = E$ l'image de $C(\underset{\sim}{Z}_p, K)$ dans $K^{\underset{\sim}{N}}$ par la restriction naturelle (plongement naturel de $\underset{\sim}{N}$ dans $\underset{\sim}{Z}_p$) : E est l'espace des suites de scalaires $f(n)$, p-adiquement continues par rapport à l'indice n, muni de la norme $\sup|f(n)|$. Il est clair que E est image isomorphe de $C(\underset{\sim}{Z}_p, K)$.

On sait que le disque $T = \{x \in K ; |x - 1| < 1\}$ est isomorphe au dual p-adique de $\underset{\sim}{Z}_p$, i. e. au groupe des homomorphismes continus de $\underset{\sim}{Z}_p$ dans K^*, par exemple, par l'isomorphisme qui à $\alpha \in T$ associe le caractère χ_α défini par $\chi_\alpha(t) = \alpha^t$, $t \in \underset{\sim}{Z}_p$.

Ainsi le dual E^* de E est, de façon naturelle, identifié à un espace de fonctions sur T ; à $\nu \in E^*$ on associe la fonction $\overline{\nu}$ définie sur T par

$$\overline{\nu}(\alpha) = (\nu|\chi_\alpha) .$$

On montre facilement [1] que l'image de E^* par l'application $\nu \rightarrow \overline{\nu}$ est $B(T)$ (on le retrouvera comme corollaire trivial de 1.4.1).

Rappelons d'autre part qu'il existe un isomorphisme naturel de $H_0(T')$ sur E : si $F \in H_0(T')$, soient $T_0(F)$ sa série de Taylor à l'origine, et $c(F)$ la suite des coefficients de $T_0(F)$. Autrement dit, $c(F)$ est définie, pour $F \in H_0(T')$, par

$$F(X) = \sum_{n\geq 0} c(F)(n)X^n , \text{ pour } |X| < 1 .$$

LEMME 1.4.0 [3]. - L'application c de $H_0(T')$ dans $K^{\underset{\sim}{N}}$, définie ci-dessus, est un isomorphisme de $H_0(T')$ sur $E = C_p(N, K)$.

Preuve. - On sait que la famille $(e_k)_{k\geq 1}$, $e_k(X) = 1/(1 - X)^k$, est une base normale de $H_0(T')$. Il nous suffit de prouver que $(c(e_k))_{k\geq 1}$ est une base normale de E . Or,

$$e_k(X) = 1/(1 - X)^k = \sum_{n\geq 0}\binom{-k}{n}(-1)^n X^n = \sum_{n\geq 0}\binom{n+k-1}{k-1}X^n \text{ , pour } |X| < 1 \text{ ,}$$

d'où $c(e_k)(n) = \binom{k+n-1}{k-1}$. Or, on sait que la famille des polynômes $(u_k)_{k\geq 1}$, $u_k(t) = \binom{t+k-1}{k-1}$ est une base normale de $C(\underset{\sim}{Z}_p , K)$, d'où le lemme.

L'isomorphisme c de $H_0(T')$ sur E induit un isomorphisme c^* (transposé) de E^* sur $H_0(T')^*$, défini, pour $\nu \in E^*$ et $F \in H_0(T')$, par

$$(c^*(\nu)|F) = (\nu|c(F)) \text{ .}$$

En composant c^* avec l'isomorphisme $\nu \longrightarrow \tilde{\nu}$, défini en 1.2, on obtient un isomorphisme $\tilde{c}^*$ de E^* sur $B(T)$: il est naturel de le comparer à l'isomorphisme $\nu \longrightarrow \bar{\nu}$, défini au début de ce paragraphe.

PROPOSITION 1.4.1. - *Quels que soient* $\nu \in E^*$ *et* $\alpha \in T$, *on a*

$$\tilde{c}^*(\nu)(\alpha) = (\alpha^{-1})\ \bar{\nu}(\alpha^{-1}) \text{ .}$$

La preuve est immédiate ; par définition, $\tilde{c}^*(\nu)(\alpha) = (c^*(\nu)|\varphi_\alpha) = (\nu|c(\varphi_\alpha))$, et $c(\varphi_\alpha)(n) = \alpha^{-(n+1)}$, donc $c(\varphi_\alpha) = \alpha^{-1}\chi_{\alpha^{-1}}$. D'où

$$(\nu|c(\varphi_\alpha)) = \alpha^{-1}(\nu|\chi_{\alpha^{-1}}) = \alpha^{-1}\ \bar{\nu}(\alpha^{-1}) \text{ .}$$

Comme nous l'avions annoncé, il en résulte que $\nu \longrightarrow \bar{\nu}$ est un isomorphisme.

COROLLAIRE 1.4.2. - *Pour* $\alpha \in T$, *posons* $\psi_\alpha(X) = 1/(1 - \alpha X)$, $\psi_\alpha \in H_0(T')$, *et, pour* $\nu \in E^*$, $(\tilde{c}^*(\nu)|\psi_\alpha) = \bar{\nu}(\alpha)$; *en d'autres termes, le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
E^+ \arrow[rr, "c^*"] \arrow[dr, "-"'] & & H_0(T')^* \arrow[dl, "\tilde{\psi}"] \\
& B(T) &
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Rappelons [1] enfin une conséquence du fait que c soit un isomorphisme :

DÉFINITION 1.4.3. - *La structure d'algèbre de* $K^{\underset{\sim}{N}}$, *définie par la convolution sur* $\underset{\sim}{N}$,

$$(f * g)(n) = \sum_{0\leq i\leq n} f(i)\ g(n - i) \text{ ,}$$

induit sur $C_p(\underset{\sim}{N} , K)$ *une structure d'algèbre de Banach à norme multiplicative*, c *est un isomorphisme d'algèbres de Banach*.

On vérifie en effet que $c(FG) = c(F) * c(G)$; les autres assertions en résultent. On notera encore $f * g$, pour f et g dans $C(\underset{\sim}{Z}_p , K)$, l'unique prolongement continu à $\underset{\sim}{Z}_p$ du produit $f * g$ défini sur $\underset{\sim}{N}$. D'autre part, $E^* \simeq C(\underset{\sim}{Z}_p , K)^*$ est aussi muni d'une structure naturelle d'algèbre : si μ et $\nu \in E^*$, $\mu * \nu$ est l'élément de E^* défini, pour $f \in E$, par $((\mu * \nu)|f) = ((\mu \otimes \nu)|\Delta f)$, où $\Delta f(x , y) = f(x + y)$.

On remarque que $\nu \to \overline{\nu}$ est un isomorphisme d'algèbres de Banach : il suffit, en effet, de vérifier que $\overline{\mu * \nu} = \overline{\mu\nu}$, or, d'après la définition,

$$((\mu * \nu)|\chi_\alpha) = (\mu|\chi_\alpha)(\nu|\chi_\alpha) \ ,$$

donc $\overline{\mu * \nu}$ et $\overline{\mu\nu}$ coïncident sur T .

Nous allons maintenant montrer comment, des structures d'algèbre sur deux espaces de Banach dont l'un est le dual de l'autre, permettent de construire une autre algèbre qui décrit ces structures, et nous verrons au §3 une interprétation "analytique" de cette construction, dans le cas de $H_0(T')$ et $B(T)$.

2. Sommes tordues $E \oplus E^*$.

Soient E un espace de Banach sur K , et E^* son dual. On suppose, dans ce paragraphe, que E et E^* sont de surcroît des algèbres de Banach. Par exemple, soit $E_1 = H(D)$ (cf. 1.1), $E_2 = H_0(T')$ (cf. 1.2), $E_3 = C(\underset{\sim}{Z}_p , K)$, E_1 , E_2 et E_3^* ont des structures naturelles d'algèbres de Banach, et le choix d'un isomorphisme de E_1^* sur $B_0(D')$, de E_2^* sur $B(T)$, ou celui d'une convolution sur E_3 , munissent les couples (E_i , E_i^*) de la structure que nous allons étudier. De même, si D est un infraconnexe fermé borné, H(D) et $H(D)^*$ fournissent un autre exemple, compte tenu de 1.3.

2.1. Définitions. - Soit $x \in E$, nous noterons M_x l'opérateur linéaire continu sur E défini par la multiplication par x : $M_x(y) = xy$. On a $\|M_x\| \leq \|x\|$; E est intègre si, et seulement si, M_x est injectif pour tout $x \neq 0$; si la norme de E est multiplicative, $\|M_x\| = \|x\|$.

Soit M_x^* le transposé de M_x , c'est-à-dire l'opérateur linéaire continu sur E^* défini par

$$\text{pour tous } \mu \in E^* \text{ et } y \in E \ , \quad (M_x^*(\mu)|y) = (\mu|xy) \ .$$

PROPOSITION 2.1.1. - L'homomorphisme $x \to M_x^*$ de E dans $\mathcal{L}(E^*)$ est

(i) injectif si, dans E , $(xy = 0 \ , \ \forall y \in E) \Rightarrow (x = 0)$, en particulier, si E est unitaire ou intègre ;

(ii) si la norme de E est multiplicative, c'est une isométrie de E sur une sous-algèbre de (E^*) et, pour tous $\mu \in E^*$ et $x \in E$, $\|M_x^*(\mu)\| = \|\mu\| \, \|x\|$.

De même, si $\mu \in E^*$, l'opérateur M_μ est faiblement continu, et admet un transposé M_μ^* .

On voit ainsi par exemple, que si $E = C(\underset{\sim}{Z}_p , K)$ et $E^* = B(T)$, on a une façon naturelle de faire opérer les fonctions sur les mesures (éléments de E^*) et de faire opérer les mesures sur les fonctions. Soit par exemple $\delta_a \in E^*$, $a \in \underset{\sim}{Z}_p$, la "mesure de Dirac en a ", définie par $(\delta_a|f) = f(a)$, alors $M_{\delta_a}^*(f)(t) = f(t+a)$. L'opérateur associé à δ_a est l'opérateur de translation par a .

PROPOSITION 2.1.2. - Soient E et E^* deux algèbres de Banach comme ci-dessus, on munit la somme directe $A = E \oplus E^*$ de l'unique structure d'algèbre prolongeant celles de E et E^* et telle que, pour tout $x \in E$ et $\nu \in E^*$, on ait

$$x\nu = M^*_\nu x + M^*_x \nu .$$

Alors A est une algèbre de Banach.

Nous ne étendrons pas sur les sorites concernant cette construction, mais passons aux exemples.

2.2. Exemple. - Soit T le disque $T = \{x \in K ; |x-1| < 1\}$, et $E = H_0(T')$, muni de sa structure d'algèbre naturelle (induite par $K^{T'}$). Nous avons vu en 1.2 que l'application définie par $\tilde{\mu}(\alpha) = (\mu|\varphi_\alpha)$ pour $\mu \in E^*$ ($\varphi_\alpha(X) = 1/(\alpha - X)$) est un isomorphisme de E^* sur $B(T)$. Nous considèrerons E^* comme munie de la structure d'algèbre transportée de celle de $B(T)$ par cet isomorphisme.

Rappelons que la famille $(e_k)_{k\geq 1}$, $e_k(X) = 1/(1-X)^k$, est une base normale de E : toute $F \in E$ admet une unique représentation $F = \sum_{k\geq 1} b_k e_k$, où $b_k \to 0$.

Soit $\mathcal{E}^-$ l'algèbre des séries de Laurent $\sum_{k\leq -1} a_k T^k$ telles que $a_k \to 0$, munie de la norme $\sup|a_k|$. Notons $\mathcal{T}_\infty$ (série de Taylor à l'infini) l'application de E dans $\mathcal{E}^-$, définie par

$$\mathcal{T}_\infty(F) = \sum_{k\leq -1} a_k T^k , \text{ si } F = \sum_{k\geq 1} a_{-k} e_k .$$

Il est clair que $\mathcal{T}_\infty$ est un isomorphisme de E sur $\mathcal{E}^-$.

De même, tout élément de $B(T)$ admet un unique développement $\sum_{k\geq 0} b_k(1-X)^k$, où b_k est une suite bornée. Notons $\mathcal{E}^+$ l'algèbre des séries de Laurent $\sum_{k\geq 0} b_k T^k$ telles que b_k soit bornée, munie de la norme $\sup|b_k|$, et $\mathcal{T}_1$ (série de Taylor au point 1) l'application de E^* dans $\mathcal{E}^+$ qui à $\mu \in E^*$ associe la série $\mathcal{T}_1(\mu) = \sum_{k\geq 0} b_k T^k$ telle que $\tilde{\mu}(X) = \sum_{k\geq 0} b_k(1-X)^k$. Alors $\mathcal{T}_1$ est un isomorphisme de l'algèbre E^* sur $\mathcal{E}^+$.

Notons enfin $\mathfrak{A}$ l'algèbre des séries de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n$ telles que a_n est bornée, $\lim_{n\to-\infty} a_n = 0$, munie de la norme $\sup|a_n|$: on vérifie, comme dans le cas des séries de Laurent convergentes, que c'est une algèbre de Banach à norme multiplicative. Rappelons que le produit dans $\mathfrak{A}$ est ainsi défini : si $A = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n$ et $B = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n T^n$ sont des éléments de $\mathfrak{A}$, le produit AB est $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n T^n$ avec

$$c_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m b_{m-n} .$$

L'espace de Banach sous-jacent à $\mathfrak{A}$ est l'espace $\mathcal{E}^- \oplus \mathcal{E}^+$.

PROPOSITION 2.2. - Soit $A = H_0(T') \oplus H_0(T')^*$ la somme directe tordue définie en 2.1.1, et soit $\mathcal{T}$ l'application de A dans $\mathfrak{A}$ définie, si $F \in H_0(T')$ et $\mu \in H_0(T')^*$, par $\mathcal{T}(F+\mu) = \mathcal{T}_\infty(F) + \mathcal{T}_1(\mu)$. Soit, de plus, Res l'application de $\mathfrak{A}$ dans K qui à $A = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n$ associe $\mathrm{Res}(A) = a_{-1}$, alors

(i) $\mathcal{T}$ <u>est un isomorphisme d'algèbres de Banach,</u>

(ii) <u>pour tous</u> $F \in H_0(T')$ <u>et</u> $\mu \in H_0(T')^*$, $(\mu|F) = \mathrm{Res}(\mathcal{T}(F)\ \mathcal{T}(\mu))$.

<u>Preuve</u>. - Nous savons déjà que $\mathcal{T}$ est un isomorphisme surjectif d'espaces de Banach, dont la restriction à E , et E^* respectivement, est un morphisme d'algèbres.

D'autre part, la relation (ii) se vérifie immédiatement : d'après le calcul fait en 1, $\mathcal{T}_1(\mu) = \sum_{n\geq 0}(\mu|e_{n+1})T^n$. Si $F = \sum_{k\geq 1} b_k\, e_k$, $(\mu|F) = \sum_{k\geq 1} b_k(\mu|e_k)$, et la relation (ii) est une simple application de la formule définissant le produit dans $\mathfrak{A}$. Ceci montre que la forme bilinéaire continue sur $\mathfrak{A}$, $(A , B) \longrightarrow \mathrm{Res}(AB)$ met $\mathcal{E}^-$ et $\mathcal{E}^+$ en dualité. Il suffit donc de prouver que la structure d'algèbre de $\mathfrak{A}$ est la structure de somme directe tordue de $\mathcal{E}^-$ et $\mathcal{E}^+$. Ceci équivaut à vérifier que, si $A \in \mathcal{E}^-$ et $B \in \mathcal{E}^+$, la série produit AB est égale à $M_A^* B + M_B^* A$, où les opérateurs transposés sont définis à l'aide de la forme bilinéaire Res . Cette dernière vérification, purement formelle, est tout-à-fait triviale, et consiste, essentiellement, à vérifier l'associativité de la multiplication dans $\mathfrak{A}$.

<u>Remarque</u>. - On observera que la démonstration ci-dessus signifie que l'algèbre tordue $E \oplus E^* = A$, définie en 2.1.2, jouit de la propriété universelle suivante : soit B une algèbre de Banach associative, munie d'une forme linéaire continue r , soient ω et ω^* des homomorphismes continus des algèbres E et E^* dans B , satisfaisant

$$r(\omega(x)\ \omega^*(x^*)) = (x|x^*)\ , \text{ quels que soient } x \in E \text{ et } x^* \in E^*\ ,$$

et soit (i , i^*) l'injection canonique de (E , E^*) dans A , alors il existe un unique morphisme d'algèbres Ω de A dans B rendant le diagramme ci-dessous commutatif.

$$\begin{tikzcd}
(E,E^+) \arrow[r, "{(i,i^+)}"] \arrow[d, "{(\omega,\omega^*)}"'] & A \arrow[d, "\mathrm{Res}"] \arrow[dl, "\Omega"'] \\
B \arrow[r, "r"] & K
\end{tikzcd}$$

La construction précédente permet donc d'interpréter la dualité entre $H_0(T')$ et $B(T)$ à l'aide d'une application résidu "formelle". Cependant elle ne donne aucune interprétation "fonctionnelle" : l'algèbre $\mathfrak{A}$ est constituée de séries "nulle part convergentes", et ne s'interprète pas raisonnablement comme algèbre de fonctions. D'ailleurs, si $\mathfrak{A}_L$ désigne l'algèbre, définie comme $\mathfrak{A}$, mais où les coefficients sont astreints à appartenir au sous-corps L de K , on montre que si L est à valuation discrète, $\mathfrak{A}_L$ est un corps.

La transformation de Fourier p-adique va nous permettre de représenter $\mathfrak{A}$ comme quotient d'une algèbre de fonctions.

3. Relations avec la transformation de Fourier.

Rappelons que le disque $T = \{x \in K\ ;\ |x - 1| < 1\}$ est un sous-groupe de K^* , isomorphe au groupe des homomorphismes continus de $\underset{\sim}{Z}_p$ dans K^*.

Nous noterons Γ le sous-groupe de torsion de T : pour $n \geq 0$, soit Γ_n le groupe des racines p^n-ièmes de 1, $\Gamma = \bigcup_{n\geq 0} \Gamma_n$. Pour $t \in T$, nous noterons χ_t le caractère de $\underset{\sim}{Z}_p$ dans K^* associé à t : $\chi_t(x) = t^x = \sum_{j\geq 0}(t-1)^j \binom{x}{j}$.

Soit $c_K(\Gamma)$ l'espace des familles de scalaires indexées dans Γ, tendant vers 0, muni de la norme sup, rappelons que la <u>transformation de Fourier</u> <u>p-adique</u> est l'application de $c_K(\Gamma)$ dans $C(\underset{\sim}{Z}_p, K)$, définie par

$$a = (a(\gamma))_{\gamma\in\Gamma} \in c_K(\Gamma) \to \mathfrak{F}(a) = \sum_{\gamma\in\Gamma} a(\gamma)\, \chi_\gamma .$$

Il est clair que $\mathfrak{F}$ est une application linéaire continue de norme ≤ 1, rappelons ([5], [4]), le théorème ci-dessous.

THÉORÈME 3.0. - <u>La transformation de Fourier</u> <u>p-adique est non injective, surjective, de norme</u> 1, <u>et induit sur le quotient</u> $C(\underset{\sim}{Z}_p, K)/\mathrm{Ker}\,\mathfrak{F}$ <u>une isométrie avec</u> $c_K(\Gamma)$.

On peut interpréter différemment cette transformation : à $a \in c_K(\Gamma)$, associons la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \mathfrak{F}(a)(n) X^n .$$

Puisque $\mathfrak{F}(a)$ est continue sur $\underset{\sim}{Z}_p$, cette série est la série de Taylor à l'origine d'un élément analytique $\mathfrak{S}(a)$ appartenant à $H_0(T')$ (lemme 1.4.0), d'ailleurs,

(1) $$\mathfrak{S}(a)(X) = \sum_\gamma a(\gamma)/(1-\gamma X) ,$$

où cette somme converge uniformément sur T', i. e. converge dans $H_0(T')$. Soit, de plus, $r > 0$ et $\Delta_r = \{x \in K ;\ \forall\, \gamma \in \Gamma,\ |\gamma x - 1| \geq r\}$, la série (1) converge uniformément sur Δ_r, et y définit un élément analytique nul à l'infini (pour $r = 1$, on retrouve $\Delta_1 = T'$).

Désormais r désigne un réel strictement positif, $r < p^{-1/(p-1)}$: alors Δ_r est un infraconnexe dont la famille des trous est la famille des disques ouverts $T_{\gamma,r}$, $T_{\gamma,r} = \{x \in K ;\ |\gamma x - 1| < r\}$, (la majoration de r assure que ces disques soient disjoints). Soit $H_0(\Delta_r)$ l'espace des éléments analytiques sur Δ_r nuls à l'infini : d'après le théorème de Mittag-Leffler, toute $F \in H_0(\Delta_r)$ admet une unique représentation

$$F = \sum_\gamma F_\gamma ,\ \text{où}\ F_\gamma \in H_0(T'_{\gamma,r}) ,\quad \|F\| = \sup \|F_\gamma\| .$$

Rappelons aussi que chaque $F_\gamma \in H_0(T'_{\gamma,r})$ admet une unique représentation

(2) $$F_\gamma(X) = \sum_{k\geq 1} b_{k,\gamma}/(1-\gamma X)^k ,$$

uniformément convergente sur $T'_{\gamma,r}$, i. e. telle que $b_{k,\gamma}\, r^{-k} \to 0$, et que la norme de F_γ pour la convergence uniforme sur $T'_{\gamma,r}$ est $\|F_\gamma\| = \max_k(|b_{k,\gamma}|\, r^{-k})$. De plus, $\|F_\gamma\| \to 0$ (sur Γ, i. e. suivant le filtre des complémentaires de parties finies de Γ).

Soient $a \in c_K(\Gamma)$, et $\mathcal{S}(a)$ définie par (1) : $\mathcal{S}(a) \in H_0(\Delta_r)$ et

$$\mathcal{S}(a)_\gamma = a(\gamma)/(1 - \gamma X) .$$

Notons $H_0^1(\Delta_r)$ le sous-espace de $H_0(\Delta_r)$ constitué des $F = \sum F_\gamma$, où F_γ est telle que, dans sa représentation (2), $b_{k,\gamma} = 0$ pour $k \neq 1$. On voit que $\mathcal{S}$ est une surjection de $c_K(\Gamma)$ sur $H_0^1(\Delta_r)$, et que $\|\mathcal{S}\| = 1/r$ (et même,

$$\|\mathcal{S}(a)\| = 1/r\|a\| , \quad \forall\, a).$$

D'autre part, pour les valeurs de r considérées, $\Delta_r \supsetneq T'$: notons R l'homomorphisme naturel de $H_0(\Delta_r)$ dans $H_0(T')$ défini par la restriction à T' : si $G \in H_0(\Delta_r)$, $R(G) = G|_{T'}$. Notons encore c l'isomorphisme de $H_0(T')$ sur $C(\underset{\sim}{Z}_p , K)$ induit par celui défini en 1.4.0, les remarques ci-dessus peuvent se résumer par : $\mathfrak{F} = c \circ R \circ \mathcal{S}$

$$\begin{tikzcd} c_K(\Gamma) \arrow[r, "\mathcal{S}"] \arrow[rrr, bend left, dashed, "\mathfrak{F}"] & H_0(\Delta_r) \arrow[r, "R"] & H_0(T') \arrow[r, "c"] & C(\underset{\sim}{Z}_p , K) \end{tikzcd} .$$

Le théorème 3.0 admet la formulation équivalente suivante :

<u>La restriction de</u> R <u>à</u> $H_0^1(\Delta_r)$ <u>est non injective et surjective</u>, R <u>induit sur le quotient</u> $H_0(\Delta_r)/\ker R$ <u>un isomorphisme d'algèbres bilinéaire</u>, <u>bicontinu</u>, <u>noté</u> $\overline{R}$, <u>et tel que</u> $\|\overline{R}(\overline{G})\| = r\|\overline{G}\|$, <u>quel que soit</u> $\overline{G} \in (H_0(\Delta_r))/(\ker R)$.

PROPOSITION 3.1. - <u>Soit</u> $C_r = \Delta_r \cap T$, <u>et soit</u> $B(C_r)$ <u>l'algèbre des fonctions bornées sur</u> C_r , <u>munie de la norme de la convergence uniforme sur</u> C_r ; <u>soit</u> B <u>le sous-espace de</u> $B(C_r)$, <u>engendré par</u> $H_0(\Delta_r)$ <u>et</u> $B(T)$, <u>alors</u>

(i) $B = H_0(\Delta_r) \oplus B(T)$;

(ii) B <u>est une sous-algèbre de</u> $B(C_r)$ <u>sur laquelle la norme est multiplicative</u>.

<u>Preuve</u>. - Remarquons d'abord que, si au lieu de considérer l'algèbre B , on avait considéré l'espace B' , engendré par $H_0(\Delta_r)$ et $H(T)$, la proposition aurait été une variante du théorème de Mittag-Leffler.

Bien entendu, dans l'énoncé, on a identifié $H_0(\Delta_r)$ et $B(T)$ avec leurs images canoniques dans $B(C_r)$, par restriction à C_r , ce qui est licite car cette restriction est injective.

D'autre part, la propriété (i) signifie qu'il s'agit d'une somme directe d'espaces de Banach, i. e. que, si $H = G + M$, où $G \in H_0(\Delta_r)$ et $M \in B(T)$,

$$\|H\| = \sup_{x \in C_r} |H(x)| = \max(\sup_{x \in \Delta_r} |G(x)| , \sup_{x \in T} |M(x)|) .$$

LEMME 3.2. - <u>Soient</u> $\rho < 1$, <u>et</u> $D_\rho = C_r \cap \{x \in K ; |x - 1| \leq \rho\}$, <u>et soient</u> $G \in H_0(\Delta_r)$, $M \in B(T)$, <u>et</u> $H = G + M \in B$, <u>alors les normes de</u> G , M , H <u>respectivement</u>, <u>pour la convergence uniforme sur</u> Δ_r , T <u>et</u> C_r , <u>sont limites</u>, <u>lorsque</u> $\rho \to 1$, <u>des normes</u>

$$\|G\|_\rho = \sup_{|x-1| \leq \rho, x \in \Delta_r} |G(x)| \; ; \; \|M\|_\rho = \sup_{|x-1| \leq \rho} |M(x)| \; \text{ et } \; \|H\|_\rho = \sup_{x \in D_\rho} |M(x)| .$$

Preuve. - Notons E_ρ le disque $\{x \in K\ ;\ |x-1| \leq \rho\}$. On a $T = \bigcup E_\rho$ et $C_r = \bigcup C_r \cap E_\rho$: les assertions concernant les normes de M et H en résultent trivialement, et on voit de plus que, pour la même raison,

$$\lim_{\rho\to 1} \|G\|_\rho = \sup_{x\in C_r} |G(x)| .$$

Il reste donc seulement à prouver que, si $G \in H_0(\Delta_r)$,

$$\sup_{x\in\Delta_r} |G(x)| = \sup_{x\in C_r} |G(x)| .$$

Or, d'après (ML), $G = \sum G_\gamma$, où $G_\gamma \to 0$, et $\|G\| = \max\|G_\gamma\|$, où $\|G\|$ est le sup de G sur Δ_r, et $\|G_\gamma\|$ celui de G_γ sur T'_γ. Soit S la famille (finie) des γ tels que $\|G_\gamma\| = \max\|G_\gamma\|$, alors, pour ε assez petit, l'ensemble des $x \in \Delta_r$ tels que $|\sum_{\gamma\in S} G_\gamma(x)| \geq (1-\varepsilon)\max\|G_\gamma\|$, $|\sum_{\gamma\notin S} G_\gamma(x)| < (1-\varepsilon)\max\|G_\gamma\|$ est non vide et contenu dans le disque $|x-1| \leq \max_{\gamma\in S}|\gamma - 1| < 1$. En particulier, cet ensemble est contenu dans C_r, et pour un tel x, $|G(x)| = \max\|G_\gamma\|$, d'où le lemme.

LEMME 3.3. - Soient $G \in H_0(\Delta_r)$ et $M \in B(T)$, alors

$$\|G + M\|_{C_r} = \max(\|G\|_{\Delta r}, \|M\|_T) .$$

(on note $\|F\|_D = \sup_{x\in D}|F(x)|$.)

Preuve. - Soient $\rho < 1$, et $G = \sum G_\gamma$, posons $G_1 = \sum G_\gamma$ où la somme est étendue aux γ tels que $\gamma \in E_\rho$, et $G_2 = G - G_1$, alors $G + M = (M + G_2) + G_1$, où $M + G_2 \in H(E_\rho)$, et les trous de D_ρ sont les T_γ tels que $\gamma \in E_\rho$. En appliquant (ML), on en déduit

$$\|G + M\|_{D_\rho} = \max(\|M + G_2\|_{E_\rho}, \|G_1\|_{E_\rho\cap\Delta_r}) .$$

Lorsque $\rho \to 1$, $\|G_2\|_{E_\rho} \to 0$, donc pour ρ assez voisin de 1,

$$\|G + M\|_{D_\rho} = \max(\|M\|_{E_\rho}, \|G\|_{E_\rho\cap\Delta_r}) ,$$

on en déduit le lemme par passage à la limite quand $\rho \to 1$, et en appliquant 3.2. L'assertion (i) de la proposition en résulte.

En ce qui concerne (ii), remarquons que, pour tout $\rho < 1$, $H(D_\rho)$ est une algèbre à norme multiplicative : si H et $H' \in B$, $HH' \in H(D_\rho)$, et

$$\|HH'\|_{D_\rho} = \|H\|_{D_\rho} \|H'\|_{D_\rho} ,$$

on a donc $\|HH'\|_{C_r} = \|H\|_{C_r} \|H'\|_{C_r}$. Reste à montrer que $HH' \in B$.

Sachant que $H_0(\Delta_r)$ et $B(T)$ sont des algèbres, il suffit de montrer que si $G \in H_0(\Delta_r)$ et $M \in B(T)$, $GM \in B$. Soit $\rho < 1$; $G = \sum G_\gamma = G_1 + G_2$ comme ci-dessus, où $G_2 \in H(D_\rho)$. Comme $H(D_\rho)$ est une algèbre à norme multiplicative, $MG \in H(D_\rho)$, et $MG = MG_1 + MG_2$ où $\|MG_2\| \to 0$ quand $\rho' \to 1$. Soit $\rho' > \rho$, $G'_1 + G'_2$ la décomposition de G relative à D_ρ, alors $MG = MG'_1 + MG'_2$, où

$$\|MG_1' - MG_1\| \leqslant \max_{\rho<|\gamma-1|\leqslant\rho'}(\|G_\gamma\|)\|M\| \ :$$

on voit ainsi que MG est limite, dans $B(C_r)$ d'éléments MG_1 qui appartiennent à B, or B est un sous-espace fermé de $B(C_r)$ (comme somme de deux sous-espaces fermés), d'où la proposition.

PROPOSITION 3.4. - <u>Soient</u> $E = H_0(T')$, <u>et</u> $A = E \oplus E^*$ <u>l'algèbre somme directe tordue étudiée en 2.2, soit</u> Φ <u>l'application linéaire continue de</u> B <u>dans</u> A, <u>définie par</u>

$$\Phi(G + M) = R(G) + M \text{ , \underline{où} } G \in H_0(\Delta_r) \text{ , } M \in B(T) \text{ , \underline{et} } R(G) = G|_{T'} \text{ ,}$$

<u>alors</u> Φ <u>est un homomorphisme d'algèbres, et induit sur</u> $B/\ker(\Phi)$ <u>un isomorphisme bicontinu et surjectif d'algèbres.</u>

Compte tenu des rappels faits au début de ce paragraphe, la seule assertion nouvelle est : Φ est un morphisme d'algèbres. Tout revient donc à montrer que $\ker \Phi$ est un idéal de B. Comme $\ker(R)$ est un idéal de $H_0(\Delta_r)$, la proposition résultera donc du lemme suivant.

LEMME 3.5. - <u>Le noyau de</u> R <u>est, dans</u> B, <u>un</u> $B(T)$-<u>module.</u>

Soit $\rho < 1$, $\rho \in |K^*|$, nous noterons $\partial D_\rho = \{x \in D_\rho \ ; \ |x - 1| = \rho\}$. Compte tenu des propriétés de continuité des fonctions "modules" des éléments analytiques (cf. par exemple, [7]), on a, pour $G \in H_0(\Delta_r)$, $\|G\|_{\partial D\rho} \longrightarrow \max_{|x-1|=1}(|G(x)|)$, lorsque $\rho \longrightarrow 1$. En particulier, $G \in \ker(R)$ équivaut à $\lim_{\rho\to1}\|G\|_{\partial D\rho} = 0$.
Soient $M \in B(T)$, $G \in H_0(\Delta_r)$, $MG = M_1 + G_1$ l'unique décomposition de MG telle que $M_1 \in B(T)$, et $G_1 \in H_0(\Delta_r)$ (proposition 3.1, (i)). On voit aisément que $\|M_1\|_{\partial D\rho}$ est une fonction non décroissante de ρ, et $\|G_1\|_{\partial D\rho}$ est strictement décroissante si $G_1 \neq 0$. Or, si $MG \neq 0$, $G_1 \neq 0$, car $MG \notin B(T)$: il existe donc un intervalle $]1 - \varepsilon , 1[$ où ces deux fonctions ne sont pas égales, alors, par l'inégalité ultramétrique, $\|MG\|_{\partial D\rho} = \max(\|M_1\|_{\partial D\rho} , \|G_1\|_{\partial D\rho})$. Donc si $G \in \ker(R)$, d'une part $\|M_1\|_{\partial D\rho} \longrightarrow 0$, ce qui implique $M_1 = 0$, d'autre part $\|G_1\|_{\partial D\rho} \longrightarrow 0$, donc $G_1 = MG \in \ker(R)$.

C. Q. F. D..

Cette proposition fournit donc une interprétation de l'algèbre A comme quotient d'une algèbre de fonctions. On peut en tirer différents corollaires sur les opérateurs de "multiplication d'une fonction par une mesure" etc. (en se souvenant que A est aussi isomorphe à la somme tordue de $C(\mathbb{Z}_p , K)$ et de son dual). Nous ne citerons que l'interprétation de la dualité en termes de résidus.

Remarquons d'abord que, sur l'algèbre $B = H_0(\Delta_r) \oplus B(T)$, est définie une application "résidu" naturelle : soit $H = G + M \in B$, où $G \in H_0(\Delta_r)$ et $M \in B(T)$, notons $\mathrm{Res}(H)$ le résidu à l'infini de G, $\mathrm{Res}(H) = \lim_{|X|\to\infty}(XG(X))$.

Soient maintenant $F \in H_0(T')$ et $M \in B(T)$, et soit G un prolongement de F à Δ_r, i. e. $G \in R^{-1}(F)$, alors $\mathrm{Res}(GM)$ ne dépend pas du choix de G dans $R^{-1}(F)$. En effet, si $G' - G \in \ker(R)$, $M(G' - G) \in \ker(\Phi)$, et, en particulier, $\mathrm{Res}(M(G' - G)) = 0$.

D'autre part, d'après la construction même de l'algèbre $A = H_0(T') \oplus B(T)$ et la proposition 2.2, si M est l'image par l'isomorphisme canonique de $H_0(T')^*$ sur $B(T)$, de l'élément μ de $H_0(T')^*$, $\mathrm{Res}(FM) = (\mu|F)$, où cette fois Res désigne le résidu formel défini sur A par isomorphisme avec l'algèbre $\mathfrak{A}$. Nous avons ainsi montré le corollaire ci-dessous.

COROLLAIRE 3.5. - Soient $F \in H_0(T')$, $\mu \in H_0(T')^*$, et $M \in B(T)$, associée à μ par $M(\alpha) = (\mu|\varphi_\alpha)$, $\varphi_\alpha(X) = 1/\alpha - X$. Quelle que soit la fonction G appartenant à $H_0(\Delta_r)$ et prolongeant F,

$$(\mu|F) = \mathrm{Res}(GM) .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Yvette). - Mesures p-adiques, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 6e année, 1964/65, n° 16, 6 p.

[2] AMICE (Yvette) et ESCASSUT (Alain). - Sur la non injectivité de la transformation de Fourier p-adique relative à $\underline{Z}_p$, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, 1974, Série A, p. 583-585.

[3] AMICE (Yvette) et FRESNEL (Jean). - Fonctions zéta p-adiques des corps de nombres abéliens réels, Acta Arithmetica, Warszawa, t. 20, 1972, p. 353-384.

[4] ESCASSUT (Alain). - Algèbres de Banach d'éléments analytiques au sens de Krasner, Thèse Sc. math. Bordeaux, 1970.

[5] FRESNEL (Jean) et de MATHAN (Bernard). - Sur la transformation de Fourier p-adique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 277, 1973, Série A, p. 711-714.

[6] GRUSON (Laurent). - Algèbres de Banach ultramétriques, "Colloque Poitou-Aquitaine de la Société mathématique de France: Prolongement analytique p-adique [1967. Poitiers]" (multigraphié).

[7] ROBBA (Philippe). - Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets, "Prolongement analytique et algèbres de Banach ultramétriques", Astérisque n° 10, 1973, p. 109-218.

(Texte reçu le 11 mars 1974)

Yvette AMICE
Ecole Normale Supérieure
48 boulevard Jourdan
75690 PARIS CEDEX 14